Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 530.12

© 1992 г. О. Ю. Динариев

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИГНАЛА В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЖИДКОСТИ С ВЯЗКОСТЬЮ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Для устранения парадокса, обусловленного сверхсветовой скоростью распространения сигнала в рамках стандартных релятивистских моделей жидкости с диссипацией, предлагается заменить в материальных соотношениях диссипативные коэффициенты релаксационными ядрами, т. е. использовать теорию с наследственностью. Показано, что в этом случае скорость сигнала получается конечной, но, вообще говоря, не обязательно меньшей скорости света. Условие, что скорость сигнала не выше скорости света в вакууме, налагает определенные априорные ограничения на диссипативные характеристики жидкости.

Для описания жидкости или газа с вязкостью и теплопроводностью в теории относительности используются две стандартные модели: Эккарта [1] и Ландау – Лифшица [2], являющиеся физически эквивалентными [3], причем обе они сохраняют характерную черту нерелятивистской модели Навье – Стокса – Фурье – бесконечную скорость распространения сигнала в локально сопутствующей инерциальной системе отсчета (ЛСИСО).

В нерелятивистской механике неполноценность теорий с бесконечной скоростью распространения сигнала была давно осознана. Было предложено [4] модифицировать уравнение теплопроводности так, чтобы динамика температурного поля подчинялась уравнению телеграфного типа. Эта идея была обобщена посредством постулирования релаксационной связи теплового потока и градиента температуры [5], т. е. в рамках теории сред с наследственностью [6, 7]. Была построена [8] нерелятивистская модель вязкой теплопроводной жидкости с наследственностью и доказано, что скорость сигнала в жидкости конечна. Для бесконечно медленных процессов материальные соотношения модели сводятся к законам Навье – Стокса и Фурье.

Помимо теории сред с наследственностью в неравновесной термодинамике существует еще одно направление, которое также приводит к конечности скорости сигнала,– расширенная термодинамика [9, 10]. В этом подходе диссипативным потокам приписывается статус независимых переменных. С формально математической точки зрения возникающие уравнения совпадают с уравнениями теории сред с наследственностью для частного вида релаксационных ядер. Однако сторонники расширенной термодинамики считают свой подход более фундаментальным (см. обсуждение в [10]).

Ниже методы релаксационной гидродинамики используются для построения модели вязкой теплопроводной жидкости в рамках специальной теории относительности.

Везде используется плоская метрика Минковского $(g_{\alpha\beta})=\mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)$. Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3, соответствуя некоторой инерциальной системе отсчета x^α. При этом x^0 – время. Римские индексы a, b пробегают значения 0, 1, 2, 3, римские индексы i, j, k, l – значения 1, 2, 3. По повторяющимся индексам производится суммирование. В разд. 1 и 2 для упрощения формул используется система единиц измерения, в которой скорость света в вакууме равна единице. Жидкость предполагается однокомпонентной. Гравитация не учитывается.

I. Следуя Эккарту [1], определим 4-скорость среды u^α так, что поток вещества в ЛСИСО равен нулю. Если n — плотность числа частиц среды в ЛСИСО, то $j^\alpha=nu^\alpha$ — 4-вектор потока вещества. 4-скорость удовлетворяет нормировочному условию $u_\alpha u^\alpha=1$, а поток удовлетворяет уравнению сохранения

$$j^\alpha{}_{,\alpha}=0 \tag{1.1}$$

Пусть ε — плотность энергии в ЛСИСО, q^α — 4-вектор потока тепла, $\pi^{\alpha\beta}$ — симметричный тензор напряжений. Тензор энергии-импульса среды задается формулой

$$T^{\alpha\beta}=\varepsilon u^\alpha u^\beta+q^\alpha u^\beta+u^\alpha q^\beta+\pi^{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

При этом справедливы соотношения

$$q^\alpha u_\alpha=0, \qquad \pi^{\alpha\beta}u_\alpha=0 \tag{1.3}$$

Движение среды подчиняется уравнениям сохранения энергии-импульса

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0 \tag{1.4}$$

Определим проекционный тензор $\Delta^{\alpha\beta}=u^\alpha u^\beta-g^{\alpha\beta}$. Справедливо равенство

$$\Delta_{\alpha\gamma}\Delta^{\gamma\beta}=-\Delta_\alpha{}^\beta \tag{1.5}$$

Положим

$$\pi^{\alpha\beta}=p\Delta^{\alpha\beta}-\tau^{\alpha\beta} \tag{1.6}$$

Здесь p — гидростатическое давление, $\tau^{\alpha\beta}$ — тензор вязких напряжений. Введем обозначения: $D=u^\alpha\partial/\partial x^\alpha$, $h=\varepsilon+p$ — плотность энтальпии в ЛСИСО. Тогда, подставляя выражние (1.2) в (1.4) и используя соотношения (1.3), (1.5), (1.6), получаем уравнения движения

$$\begin{aligned}0=\Delta_{\alpha\gamma}T^{\gamma\beta}{}_{,\beta}=hDu_\alpha-\Delta_{\alpha\gamma}Dq^\gamma+q_\alpha u^\beta{}_{,\beta}+\\ +u_{\alpha,\beta}q^\beta+\Delta_\alpha{}^\gamma p_{,\gamma}+\Delta_{\alpha\gamma}\tau^{\gamma\beta}{}_{,\beta}\end{aligned} \tag{1.7}$$

Пусть T — абсолютная температура, s — плотность энтропии в ЛСИСО, μ — химический потенциал. Справедливы термодинамические соотношения

$$d\varepsilon=Tds+\mu dn, \qquad \varepsilon=Ts-p+\mu n \tag{1.8}$$

Из соотношений (1.1) и (1.8) выводим

$$0=u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=T(u^\alpha s)_{,\alpha}-Du^\alpha q_\alpha+q^\beta{}_{,\beta}+\tau^{\alpha\beta}u_{\alpha,\beta}$$

Отсюда вытекает уравнение для производства энтропии

$$(su^\alpha+T^{-1}q^\alpha)_{,\alpha}-\sigma=0 \tag{1.9}$$

$$\sigma=q^\alpha[(T^{-1})_{,\alpha}+T^{-1}Du_\alpha]-T^{-1}\tau^{\alpha\beta}u_{\alpha,\beta} \tag{1.10}$$

Здесь σ — производство энтропии на единицу объема среды.

Рассмотрим теперь выделенную мировую линию частицы жидкости: $x^\alpha=x^\alpha(\tau)$, где τ — собственное время. Пусть $e_a{}^\alpha=e_a{}^\alpha(\tau)$ — тетрада, переносимая вдоль мировой линии по Ферми — Уолкеру [11]. При этом

$$e_0{}^\alpha(\tau)=u^\alpha(x^\beta(\tau)), \qquad e_a{}^\alpha e_b{}^\beta g_{\alpha\beta}=g_{ab}.$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$n_a = n_{,\alpha} e_a{}^\alpha, \quad T_a = T_{,\alpha} e_a{}^\alpha, \quad p_a = p_{,\alpha} e_a{}^\alpha$$

$$u_{ab} = u_{\alpha,\beta} e_a{}^\alpha e_b{}^\beta, \quad q_a{}' = q_\alpha e_a{}^\alpha, \quad \tau_{ab}{}' = \tau_{\alpha\beta} e_a{}^\alpha e_b{}^\beta$$

Римские индексы можно опускать и поднимать при помощи метрики g_{ab}. Отметим, что согласно (1.3) $q_0{}'=0$, $\tau_{0a}{}'=0$.

Уравнения (1.1), (1.7), (1.9) определяют движение жидкости. Однако для того, чтобы задача была замкнутой, нужно задать термодинамические уравнения

$$p = p(n, T), \quad s = s(n, T) \tag{1.11}$$

и материальные соотношения, т. е. явные выражения для теплового потока и тензора вязких напряжений через поле плотности n, температуры T и скорости u_α.

В локальной теории в каждой точке мировой линии полагают

$$q'^i(\tau_0) = q'^i(n(\tau_0), \quad T(\tau_0), \quad n_j(\tau_0), \quad T_j(\tau_0), \quad u_{jk}(\tau_0)) \tag{1.12}$$

$$\tau'^{ij}(\tau_0) = \tau'^{ij}(n(\tau_0), \quad T(\tau_0), \quad n_k(\tau_0), \quad T_k(\tau_0), \quad u_{kl}(\tau_0)) \tag{1.13}$$

$$\sigma(\tau_0) \geqslant 0 \tag{1.14}$$

Если ограничиться линейным приближением по пространственным градиентам в выражениях (1.12), (1.13) и соответственно квадратичным приближением для σ, достаточно подставить в (1.10) приближенное выражение, вытекающее из (1.7): $Du_\alpha = -\Delta_\alpha{}^\gamma h^{-1} p_{,\gamma}$ и воспользоваться неравенством (1.14). Тогда материальные соотношения (1.12), (1.13) приобретают следующий конкретный вид [1]:

$$q_i{}' = -\varkappa(T_i - T h^{-1} p_i), \quad \tau_{ij}{}' = -\eta\lambda g_{ij} - 2\mu s_{ij} \tag{1.15}$$

$$\lambda = u_i{}^i, \quad s_{ij} = {}^1/_2 (u_{ij} + u_{ji}) - {}^1/_3 \lambda g_{ij}$$

Здесь $\varkappa$, η, μ — неотрицательные коэффициенты теплопроводности, объемной и сдвиговой вязкости соответственно. Если известны зависимости

$$\varkappa = \varkappa(n, T), \quad \eta = \eta(n, T), \quad \mu = \mu(n, T)$$

то задача о движении релятивистской жидкости становится замкнутой.

Для устранения серьезного недостатка модели (1.15), состоящего в том, что она приводит к сверхсветовой скорости сигнала в жидкости, рассмотрим теорию с наследственностью, следуя идеям работы [8].

При наличии эффектов памяти в жидкости тепловой поток и тензор вязких напряжений в любой точке мировой линии становятся функционалами от всех предшествующих состояний частицы жидкости

$$\begin{gathered} q'^i(\tau_0) = q'^i[n(\tau\leqslant\tau_0), \ T(\tau\leqslant\tau_0), \ n_j(\tau\leqslant\tau_0), \ T_j(\tau\leqslant\tau_0), \ u_{jk}(\tau\leqslant\tau_0)) \\ \tau'^{ji}(\tau_0) = \tau'^{ij}[n(\tau\leqslant\tau_0), \ T(\tau\leqslant\tau_0), \ n_k(\tau\leqslant\tau_0), \ T_k(\tau\leqslant\tau_0), \ u_{kl}(\tau\leqslant\tau_0)) \end{gathered} \tag{1.16}$$

Пусть при $\tau \to \pm\infty$ жидкость движется поступательно с постоянной скоростью (как твердое тело). Тогда справедливо неравенство Клазиуса —

Дюгема [6], обобщающее условие (1.14):

$$W \geqslant 0, \quad W = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \, d\tau \tag{1.17}$$

Ограничимся случаем, когда плотность n и температура T мало отличаются от некоторых постоянных n_* и T_*. Для произвольной функции f параметров n и T будем обозначать

$$f_* = f|_{n=n_*, \, T=T_*}$$

Введем вспомогательные обозначения:

$$\delta = n - n_*, \quad \theta = T - T_*, \quad \xi = p - p_*, \quad \delta_a = \delta_{,\alpha} e_a{}^\alpha$$

$$\theta_a = \theta_{,\alpha} e_a{}^\alpha, \quad \xi_a = \xi_{,\alpha} e_a{}^\alpha, \quad \Theta_a = {}_a\theta - T_* h_*^{-1} \xi_a$$

Ограничимся линейным приближением для функционалов (1.16). Простейшие линейные функционалы — функционалы типа свертки с некоторыми релаксационными ядрами. Примем по аналогии с [8]

$$\begin{aligned} q_i'(\tau_0) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} K_3(\tau_0 - \tau)\, \Theta_i(\tau)\, d\tau \\ \tau_{ij}'(\tau_0) &= -\int_{-\infty}^{+\infty} K_1(\tau_0 - \tau)\, \lambda(\tau)\, d\tau g_{ij} - 2\int_{-\infty}^{+\infty} K_2(\tau_0 - \tau)\, s_{ij}(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{1.18}$$

На релаксационные ядра $K_A = K_A(\tau)$ $(A = 1, 2, 3)$ естественно наложить ряд условий. По принципу причинности $K_A(\tau) = 0$ при $\tau < 0$. При $\tau \geqslant 0$ $K_A(\tau)$ — положительные монотонно убывающие функции.

Для произвольной функции времени $f = f(\tau)$ обозначим символом f_F преобразование Фурье — Лапласа по времени

$$f_F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau)\, d\tau$$

Если $f = f(\tau)$ — действительная функция, то

$$(f_F(\omega))^* = f_F(-\omega) \tag{1.19}$$

По теореме Пэли-Винера $K_{AF}(\omega)$ — голоморфные функции в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega < 0$, непрерывные вплоть до действительной прямой.

Для бесконечно медленных процессов модель (1.18) сводится к модели (1.15). Диссипативные коэффициенты выражаются через ядра:

$$\eta_* = \int_0^{+\infty} K_1(\tau)\, d\tau, \quad \mu_* = \int_0^{+\infty} K_2(\tau)\, d\tau, \quad \varkappa_* = \int_0^{+\infty} K_3(\tau)\, d\tau$$

Обратимся к условию (1.17). Из (1.18) вытекает выражение

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{T_*} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_2 \,[K_1(\tau_1 - \tau_2)\, \lambda(\tau_1)\, \lambda(\tau_2) + 2K_2(\tau_1 - \tau_2)\, s^{ij}(\tau_1)\, s_{ij}(\tau_2) - \\ - T_*^{-1} K_3(\tau_1 - \tau_2)\, \Theta^i(\tau_1)\, \Theta_i(\tau_2)] \end{aligned}$$

Переходя здесь к фурье-образам и используя соотношение получаем

$$W=\frac{1}{\pi T_*}\int\limits_0^{+\infty} d\omega\,[\operatorname{Re}K_{1F}(\omega)\,|\lambda_F(\omega)|^2+2\operatorname{Re}K_{2F}(\omega)\,s_F^{ij}(\omega)\,\overset{*}{s}_{ijF}(\omega)-$$
$$-T_*^{-1}\operatorname{Re}K_{3F}(\omega)\,\Theta_F^i(\omega)\,\overset{*}{\Theta}_{iF}(\omega)]$$

Отсюда видно, что неравенство Клазиуса — Дюгема эквивалентно неравенствам $\operatorname{Re}K_{AF}(\omega)\geqslant 0$, $A=1, 2, 3$.

Обращение величины $\operatorname{Re}K_{AF}$ в нуль при некоторой частоте означает существование бездиссипативного колебательного процесса с этой частотой. Такое явление возможно для сверхтекучих сред. Однако не будем рассматривать такой случай и наложим более сильные условия

$$\operatorname{Re}K_{AF}(\omega)>0,\quad A=1,\ 2,\ 3 \tag{1.20}$$

Имеет место асимптотическая формула

$$\begin{gathered}K_{AF}(\omega)=(i\omega)^{-1}K_A(0)+o(|\omega|^{-1})\\ \operatorname{Im}\omega\leqslant 0,\quad A=0,\ 1,\ 2,\ 3,\quad K_0(\tau)=K_1(\tau)+{}^4/_3K_2(\tau)\end{gathered} \tag{1.21}$$

Из свойств голоморфных функций и соотношений (1.21) вытекает, что неравенства (1.20) выполняются во всей нижней комплексной полуплоскости.

2. Рассмотрим распространение малых возмущений в покоящейся жидкости. Будем использовать обозначения:

$$\nabla=\operatorname{grad},\quad \nabla^+=\operatorname{div},\quad \Delta=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2$$
$$p_{n*}=\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{T_*},\ p_{T*}=\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{n_*},\ s_{n*}=\left(\frac{\partial s}{\partial n}\right)_{T_*},\ s_{T*}=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{n_*}$$

$\mathbf{v}$ — 3 — вектор-столбец, причем $v^i=u^i$, g_1*g_2 — свертка двух функций по времени.

Поскольку речь идет о малых возмущениях, можно считать, что в формулах (1.18) нужно осуществлять интегрирование по времени x^0 в точке пространства с фиксированными координатами x^i.

Тогда уравнения (1.1), (1.7), (1.9) приводятся к виду:

$$\frac{\partial\delta}{\partial x^0}+n_*\nabla^+\mathbf{v}=0$$

$$h_*\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^0}+p_{n*}\nabla\delta+p_{T*}\nabla\theta-\left(K_1+\frac{1}{3}K_2\right)*\nabla\nabla^+\mathbf{v}-K_2*\Delta\mathbf{v}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^0}\nabla\,[K_3*(T_*h_*^{-1}p_{n*}\delta+(T_*h_*^{-1}p_{T*}-1)\,\theta)]=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(s_{n*}\delta+s_{T*}\theta)+s_*\nabla^+\mathbf{v}+T_*^{-1}\Delta\,[K_3*(T_*h_*^{-1}p_{n*}\delta+(T_*h_*^{-1}p_{T*}-1)\,\theta)]=0$$

Для произвольной функции $g=g(x^\alpha)$ обозначим символом $g_\Phi(\omega, k_i)$ преобразование Фурье этой функции

$$g_\Phi(\omega, k_i) = \int e^{-i(\omega x^0 + k_j x^j)} g(x^\alpha)\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3$$

Обозначим индексом $+$ транспонирование матриц, символом k — вектор-столбец k_i, $k^2=k^+k$. Если осуществить преобразование Фурье, то система уравнений (2.1) превращается в систему линейных алгебраических уравнений

$$\Sigma \begin{Vmatrix} \delta_\Phi \\ \theta_\Phi \\ v_\Phi \end{Vmatrix} = 0, \quad \Sigma = \Sigma(\omega, k) =$$

$$= \begin{Vmatrix} i\omega & 0 & in_* \mathbf{k}^+ \\ i(1 + i\omega K_{2F} T_* h_*^{-1}) p_{n*} \mathbf{k} & \begin{matrix} i(p_{T*} + i\omega K_{2F} \times \\ \times (T_* h_*^{-1} p_{T*} - 1))\mathbf{k} \end{matrix} & \begin{matrix} i\omega h_* + (K_{1F} + {}^1/_3 K_{2F}) \mathbf{k}\mathbf{k}^+ + \\ + K_{2F} k^2 \end{matrix} \\ i\omega s_{n*} - K_{2F} h_*^{-1} p_{n*} k^2 & \begin{matrix} is_{T*}\omega + K_{3F} \times \\ \times (T_*^{-1} - h_*^{-1} p_{T*}) k^2 \end{matrix} & is_* \mathbf{k}^+ \end{Vmatrix} \tag{2.2}$$

Чтобы исследовать распространение сигнала от некоторого источника, нужно в общем случае ввести в правые части уравнений (1.1), (1.7), (1.9) (и, соответственно, (2.1)) источники вещества, силы и энтропии. Предположим, что источники сосредоточены в точке пространства-времени $x^\alpha=0$. Тогда в правую часть уравнения (2.2) нужно ввести постоянный 5-компонентный вектор $\mathbf{l}$, описывающий интенсивность источников.

Рассмотрим возмущения полей плотности, температуры и скорости, возникшие в результате действия источников, в точке пространства с координатами $x_0{}^i=L\delta_1{}^i$, $L>0$.

После вычислений получим

$$\begin{Vmatrix} \delta_\Phi(\omega, x_0{}^j) \\ \theta_\Phi(\omega, x_0{}^j) \\ \mathbf{v}_\Phi(\omega, x_0{}^j) \end{Vmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x^0} \begin{Vmatrix} \delta(x^0, x_0{}^j) \\ \theta(x^0, x_0{}^j) \\ \mathbf{v}(x^0, x_0{}^j) \end{Vmatrix} dx^0 = Y\mathbf{l} \tag{2.3}$$

$$Y = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ik_1 L} \Bigl(\sum(\omega, \mathbf{k})\Bigr)^{-1} dk_1\, dk_2\, dk_3 \tag{2.4}$$

Заметим, что $(\Sigma(\omega, \mathbf{k}))^{-1}=P^{-1}\Sigma^*(\omega, \mathbf{k})$, где Σ^* — матрица, дополнительная к матрице Σ, и:

$$P=\det\Sigma(\omega, \mathbf{k})=P_1{}^2 P_2$$

$$P_1=i\omega h_* + K_{2F} k^2$$

$$\begin{aligned} P_2=P_2(\omega, k^2)=(k^2)^2 K_{3F}[-n_* p_{n*} T_*{}^{-1} + i\omega K_{0F}(h_*{}^{-1} p_{T*} - T_*{}^{-1})] + \\ + k^2 i\omega[-s_{T*} n_* p_{n*} + p_{T*}(n_* s_{n*} - s_*) - s_{T*} i\omega K_{0F} + \\ + i\omega K_{3F}(n_* p_{n*} s_{T*} T_* h_*{}^{-1} - h_* T_*{}^{-1} + p_{T*} + \\ + (T_* h_*{}^{-1} p_{T*} - 1)(s_* - n_* s_{n*}))] + is_{T*} h_* \omega^3 \end{aligned}$$

В выражении (2.4) удобно перейти к интегрированию в сферических координатах R, ψ, φ, связанных с k_1, k_2, k_3 равенствами

$$k_1=R\sin\psi\cos\varphi,\qquad k_2=R\sin\psi\sin\varphi,\qquad k_3=R\cos\psi$$

$$R\geqslant 0,\qquad \psi\in[-\pi/2,\ \pi/2],\qquad \varphi\in[-\pi,\ \pi]$$

После интегрирования по φ каждый элемент матрицы Y — сумма слагаемых вида

$$y=C(\omega)\int\limits_{\substack{0\leqslant R<+\infty\\ -\pi/2\leqslant\psi\leqslant\pi/2}}\exp(iRL\sin\psi)\,R^{n+2}\sin^l\psi\cos^{m+1}\psi\,(P(\omega,R^2))^{-1}\,dR\,d\psi \tag{2.5}$$

Поскольку элементы матрицы $\Sigma^*(\omega,\ k)$ полиномиально зависят от k_i, то справедливо равенство $n=l+m$. Матрица $\Sigma(\omega,\ k)$ (а следовательно, и матрица $\Sigma^*(\omega,\ k)$) остается инвариантной при формальной замене $(R,\ \psi,\ \varphi)\mapsto(-R,\ -\psi,\ -\varphi)$, откуда следует, что $m=2q$, где q — натуральное число.

Сделаем в (2.5) подстановку $w=\sin\psi$ и проинтегрируем по переменной w

$$y=C(\omega)\sum_{d=0}^{q}C_q^d(-1)^d\int\limits_{\substack{0\leqslant R<+\infty\\ -1\leqslant w\leqslant 1}}\exp(iRLw)\,R^{l+2q+2}w^{l+2q}\,(P(\omega,R^2))^{-1}\,dR\,dw=$$

$$=C(\omega)\sum_{d=0}^{q}a_d\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R^{2(q-d)+1}\exp(iRL)\,(P(\omega,R^2))^{-1}\,dR \tag{2.6}$$

Здесь C_q^d — биномиальные коэффициенты, a_d — постоянные. В последнем интеграле можно выполнить интегрирование по R с помощью теории вычетов, если замкнуть контур интегрирования в верхней комплексной полуплоскости. Для этого исследуем корни уравнения

$$P(\omega,\ R^2)=0 \tag{2.7}$$

относительно R. Очевидно, что уравнение (2.7) имеет при $\operatorname{Im}\omega\leqslant 0$ шесть корней, причем множество корней инвариантно относительно преобразования инверсии $R\mapsto(-R)$. Удобно занумеровать эти корни так, что $\pm R_1(\omega)$ — корни уравнения $P_1(\omega,\ R^2)=0$, причем $\operatorname{Im}R_1(\omega)\geqslant 0$, а $\pm R_2(\omega)$, $\pm R_3(\omega)$ — корни уравнения $P_2(\omega,\ R^2)=0$, причем $\operatorname{Im}R_A(\omega)\geqslant 0$ ($A=2,\ 3$).

. При изменении ω в нижней комплексной полуплоскости корни $R_A(\omega)$ движутся в верхней комплексной полуплоскости. Важно, что корни никогда при этом не пересекают действительную ось, т. е. функции $R_A=R_A(\omega)$ — гладкие (и даже голоморфные).

Докажем это утверждение. Пусть R — произвольное действительное число, отличное от нуля. Положим $F_1(\omega)=P_1(\omega,\ R^2)$. $F_1(\omega)$ — голоморфная в нижней комплексной полуплоскости функция. Рассмотрим поведение этой функции на границах своей области определения. При $|\omega|\to\infty$, $\operatorname{Im}\omega<0$ имеем $\operatorname{Re}F_1\to -h.\ \operatorname{Im}\omega>0$. При $\operatorname{Im}\omega\to 0$ из (1.20) вытекает, что $\operatorname{Re}F_1\to R^2\operatorname{Re}K_{2F}>0$. Отсюда следует, что $\operatorname{Re}F_1>0$ во всей нижней комплексной полуплоскости. Поэтому $\operatorname{Im}R_1(\omega)>0$ при $\operatorname{Im}\omega\leqslant 0$.

Введем новую термодинамическую переменную $r=s/n$ — энтропию на одну частицу вещества. Тогда уравнение можно заменить уравнениями $p=p(n, r)$, $T=T(n, r)$.

Обозначим:

$$p_{n*}'=\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_{r*},\quad p_{r*}'=\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{n*},\quad T_{n*}'=\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_{r*},\quad T_{r*}'=\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{n*}$$

Найдем:

$$P_2(\omega, R^2)=-is_{T*}h_*\omega R^4(z^2+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)z+\lambda_1\lambda_2)$$

$$z=i\omega/R^2,\quad \lambda_1=n_*^{-1}\alpha K_{3F},\quad \alpha=T_*^{-1}T_{r*}'-h_*^{-1}p_{r*}'$$

$$\lambda_2=h_*^{-1}[K_{0F}+n_*T_*^{-1}T_{r*}'p_{n*}'\alpha^{-1}(i\omega)^{-1}]$$

$$\lambda_3=n_*h_*^{-1}T_*\beta K_{3F}+n_*h_*^{-2}p_{n*}'p_{r*}'\alpha^{-1}(i\omega)^{-1}=$$
$$=b\lambda_1+a(i\omega)^{-1}$$

$$\beta=T_*^{-1}T_{n*}'-h_*^{-1}p_{n*}',\quad b=n_*^2h_*\alpha\beta^{-1}T_*^{-1}$$

$$a=n_*h_*^{-2}p_{n*}'p_{r*}'\alpha^{-1}$$

Будем полагать, что выполнены термодинамические неравенства

$$p_{n*}'>0,\quad p_{r*}'>0,\quad \alpha>0,\quad \beta>0$$

Тогда, используя условия (1.20), можно убедиться, что при $\operatorname{Im}\omega<0$

$$\operatorname{Re}\lambda_A>0,\quad A=1,\ 2,\ 3 \tag{2.8}$$

Кроме того, из (1.21) вытекают асимптотические равенства

$$\lambda_A(\omega)=\Lambda_A(i\omega)^{-1}+o(|\omega|^{-1}),\quad A=1,\ 2,\ 3 \tag{2.9}$$

$$\Lambda_1=n_*^{-1}\alpha K_3(0),\quad \Lambda_2=h_*^{-1}(K_0(0)+n_*T_*^{-1}T_{r*}'p_{n*}'\alpha^{-1}),\quad \Lambda_3=b\Lambda_1+a$$

При действительном $R\neq0$ введем функцию

$$F_2(\omega)=z+\lambda_2+z\lambda_3/(z+\lambda_1)$$

Она голоморфна в нижней комплексной полуплоскости. Исследуем ее поведение на границах своей области определения.

При $|\omega|\to+\infty$, $\operatorname{Im}\omega<0$

$$\operatorname{Re}F_2\to-R^{-2}\operatorname{Im}\omega>0$$

При $\operatorname{Im}\omega\to0$

$$\operatorname{Re}F_2\to\operatorname{Re}\lambda_2+R^{-2}\operatorname{Re}\frac{\lambda_3 i\omega}{z+\lambda_1}$$

Последнее слагаемое при $\operatorname{Im}\omega=0$ преобразуется к виду

$$R^{-2}(a+\omega^2bR^{-2})\operatorname{Re}\lambda_1[(\operatorname{Re}\lambda_1)^2+(\omega R^{-2}+\operatorname{Im}\lambda_1)^2]^{-1}$$

Отсюда в силу (2.8) при $\operatorname{Im}\omega\to0$ имеем $\operatorname{Re}F_2>0$, и потому $\operatorname{Re}F_2>0$ во всей нижней комплексной полуплоскости. Теперь очевидно, что $\operatorname{Im}R_A(\omega)>0$, $A=2,\ 3$, $\operatorname{Im}\omega\leqslant0$.

Выполняя интегрирование в (2.6), получим выражение

$$y=\sum_{A=1}^{3}c_A(\omega)\exp(iR_A(\omega)L) \tag{2.10}$$

где голоморфные функции $c_A(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega<0$ удовлетворяют неравенствам

$$|c_A|\leqslant C|\operatorname{Im}\omega|^{-N_1}(1+|\omega|)^{N_2} \tag{2.11}$$

для некоторых положительных постоянных C, N_1, N_2.

Введем в рассмотрение функции

$$L_A = L_A(\omega) = \operatorname{Im} R_A(\omega)/(-\operatorname{Im}\omega), \qquad \operatorname{Im}\omega<0 \qquad (A=1,\ 2,\ 3)$$

Из (2.3) и (2.10) вытекает, что

$$\begin{Vmatrix} \delta_F(\omega, x_0^j) \\ \theta_F(\omega, x_0^j) \\ \mathbf{v}_F(\omega, x_0^j) \end{Vmatrix} = \sum_{A=1}^{3} l_A \exp(iLR_A(\omega)) \tag{2.12}$$

где $l_A = l_A(\omega)$ — пятикомпонентные векторы, покомпонентно удовлетворяющие неравенствам типа (2.11). Из (2.12) и теоремы Пэли — Винера следует, что для отсутствия возмущений в точке x_0^j при $x^0<L$ необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$L_A(\omega)\geqslant 1, \qquad \operatorname{Im}\omega<0 \qquad (A=1,\ 2,\ 3)$$

Положим

$$V_A^{-1} = \inf_{\operatorname{Im}\omega<0} L_A(\omega) \qquad (A=1,2,3)$$

Заметим, что функции $L_A = L_A(\omega)$ не могут достигать нижней грани ни в одной точке нижней комплексной полуплоскости.

В самом деле, предположим противное: пусть точка $\omega=\omega_0$, $\operatorname{Im}\omega_0<0$ есть точка абсолютного минимума функции $L_A(\omega)$ для некоторого A, $L_A(\omega_0)=V_A^{-1}$. Тогда гармоническая функция двух действительных переменных ω_1 и ω_2

$$h_A = h_A(\omega_1, \omega_2) = \operatorname{Im} R_A(\omega_1 + i\omega_2) + V_A^{-1}\omega_2$$

достигает в ω_0 абсолютного минимума, равного нулю. Поэтому $h_A\equiv 0$, что противоречит предыдущим результатам.

Итак, справедливо равенство

$$V_A^{-1} = \lim_{\zeta\to+\infty} \inf_{|\omega|\geqslant\zeta} L_A(\omega)$$

Используя равенства (2.9), теперь найдем

$$V_1 = (h_*^{-1}K_2(0))^{1/2} \tag{2.13}$$

$$V_{2,3} = 2^{-1/2}(\Lambda_0 \pm (\Lambda_0^2 - 4\Lambda_1\Lambda_2)^{1/2})^{1/2}, \quad \Lambda_0 = \sum_{A=1}^{3}\Lambda_A$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что V_A $(A=1,\ 2,\ 3)$ — максимальные скорости распространения различных мод в жидкости. Формула (2.13) соответствует полученному ранее [12] результату, так как эта мода описывает перенос вихрей в релятивистской жидкости.

Таким образом, показано, что модель релятивистской жидкости с наследственностью естественным образом описывает вязкость и теплопроводность и в то же время дает конечную скорость распространения сигнала. Для релаксационных ядер общего вида, удовлетворяющих всем перечисленным в разд. 1 условиям, эта скорость сигнала может оказаться все же большей скорости света в вакууме. Условия $V_A\leqslant 1$ следует рассматривать как некоторые априорные ограничения на диссипативные характеристики жидкости.

Предложенную модель следует использовать, когда внутренние времена релаксации среды больше или сравнимы по величине с характерными временами протекания макроскопических процессов. В противном случае модель будет давать те же результаты, что и модель Эккарта и Ландау — Лифшица.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eckart C.* The thermodynamics of irreversible processes. III. Relativistic theory of simple fluid // Phys. Rev. 1940. V. 58. № 10. P. 919–924.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
3. *Гроот С. де, Ван Леуден В., Ван Верт Х.* Релятивистская кинетическая теория: Принципы и применения. М.: Мир, 1983. 422 с.
4. *Cattaneo M. C.* Sur une forme de l'equation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantané // C. r. Acad. sci. 1958. T. 247. № 4. P. 431–433.
5. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1968. V. 31. № 2. P. 113–126.
6. *Дэй У. А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.
7. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. М.: Мир, 1975. 592 с.
8. *Динариев О. Ю.* О скорости распространения сигнала в жидкости с релаксацией // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. I. С. 59–64.
9. *Müller I.* Extended thermodynamics – past, present, future // Lecture Notes in Physics. 1984. V. 199. P. 32–71.
10. *Lebon G.* An appoach to extended irreversible thermodynamics // Lecture Notes in Physics. 1984. V. 199. P. 72–104.
11. *Синг Дж. Л.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 432 с.
12. *Динариев О. Ю.* О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1095–1097.

Москва

Поступила в редакцию
28.III.1991