

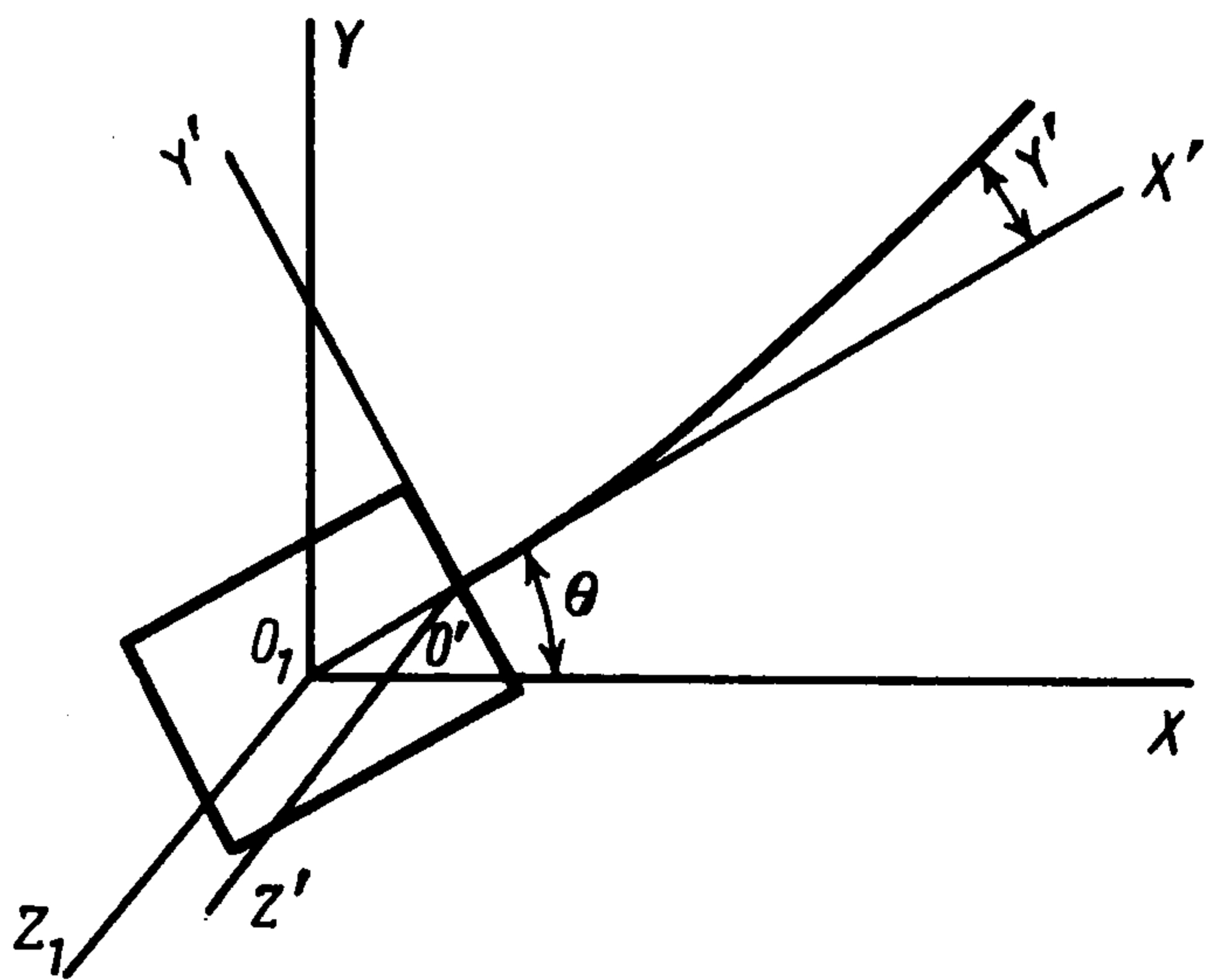
УДК 531.38:62-50

© 1992 г. Е. П. Кубышкин

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОВОРОТОМ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ГИБКИМ СТЕРЖНЕМ

Изучаются две задачи оптимального управления плоским поворотом твердого тела и жестко связанного с ним упругого стержня: задача перевода системы из начального фазового состояния в конечное с минимумом квадратичного функционала по управлению и задача быстродействия. Предлагается новый метод построения оптимального управления, основанный на результатах работ [1, 2] и методах функционального анализа, дающий возможность строить управление в виде ряда по некоторой системе функций. В рамках модели материала Фойхта рассмотрена также система с вязкоупругим стержнем, для которой получены аналогические результаты. Метод может быть применен к задаче перевода системы из начального фазового состояния в конечное с минимизацией любого выпуклого по управлению функционала.

1. Постановка задачи. Изучается механическая система, состоящая из твердого тела и жестко связанного с ним упругого стержня постоянного сечения и равномерно распределенной по длине массой. Поместим в центр



Фиг. 1

масс твердого тела систему координат $O_1X_1Y_1Z_1$ инерциального пространства, расположив ее таким образом, чтобы центральная ось стержня находилась в плоскости $O_1X_1Y_1$. Механическая система может совершать вращательные движения вокруг оси O_1Z_1 , относительно которой приложен момент $M'(t')$ управляющих сил. Свяжем с твердым телом систему координат $O'X'Y'Z'$, поместив ее начало в точку заделки упругого стержня, задав направление оси $O'X'$ вдоль касательной к нейтральной

оси стержня в точке заделки, а направление оси $O'Z'$ параллельно оси O_1Z_1 . Положение механической системы может быть охарактеризовано углом поворота $\theta(t')$ (между осями $O'X'$ и O_1X_1) и величиной $y'(x', t')$ поперечной деформации стержня в точке x' и момент времени t' (фиг. 1).

Математической моделью рассматриваемой механической системы является следующая система дифференциальных уравнений [3, 4]:

$$J\theta'' + \int_0^1 (x+a) y_{tt}(x, t) dx = M(t) \quad (1.1)$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} = -(x+a)\theta'' \quad (1.2)$$

которая записана в безразмерных переменных

$$x = x'/l, \quad y(x, t) = y'(x', t')/l, \quad t = bt', \quad b^2 = EI/(ml^4) \\ a = a'/l, \quad J = J'/(ml^3), \quad M(t) = M'(t')/(ml^3b^2)$$

с граничными условиями

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0, \quad y_{xx}(1, t) = y_{xxx}(1, t) = 0 \quad (1.3)$$

Здесь l , EI , m — соответственно длина стержня, его жесткость и погонная масса, a' — расстояния от центра масс твердого тела до точки заделки стержня, а

$$J' = J_1' + m \int_0^l (x' + a')^2 dx'$$

где J_1' — момент инерции твердого тела относительно оси O_1Z_1 . (Ниже $J_1 = J_1'/(ml^3)$.)

В дальнейшем $L_2(0, T)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций $M(t)$ ($0 \leq t \leq T$). Скалярное произведение и норма в $L_2(0, T)$ введены обычным образом:

$$(M_1(t), M_2(t))_{L_2(0, T)} = \int_0^T M_1(t) M_2(t) dt, \quad \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2 = (M(t), M(t))_{L_2(0, T)} \quad (1.4)$$

Рассматриваются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. Определить момент управления $M(t) \in L_2(0, T)$, переводящий систему (1.1), (1.2) из начального состояния

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta_0' \quad (1.5)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y_t(x, 0) = y_0'(x) \quad (1.6)$$

в конечное в заданный момент времени T

$$\theta(T) = \theta_T, \quad \theta'(T) = \theta_T', \quad y(x, T) = y_T(x), \quad y_t(x, T) = y_T'(x) \quad (1.7)$$

и минимизирующее функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2/2 \quad (1.8)$$

Здесь и в дальнейшем начальный момент времени без ограничения общности считается равным нулю, в случае разрывности $M(t)$ речь идет об обобщенном решении задачи (1.1) — (1.3).

Задача 2. Определить момент управления $M(t) \in L_2(0, T)$, $\Phi(M) \leq L < \infty$, переводящий систему (1.1) — (1.3) из (1.5), (1.6) в (1.7) за минимальное время T .

2. Метод интегрирования краевой задачи (1.1) — (1.3). Преобразуем систему уравнений (1.1), (1.2) согласно идеям работ [1, 2]. Выразив для этого из (1.2) $y_{tt}(x, t)$ и подставив в (1.1), имеем

$$\left[J - \int_0^1 (x+a)^2 dx \right] \theta'' - \int_0^1 (x+a) y_{xxxx}(x, t) dx = M(t) \quad (2.1)$$

Интегрируя затем в (2.1) по частям второй интеграл при учете граничных условий, получим уравнение

$$J_1 \theta'' + ay_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t) = M(t) \quad (2.2)$$

Выразив теперь θ'' из (2.2), подставим в правую часть уравнения (1.2). В результате получим для определения $y(x, t)$ уравнение

$$y_{tt} + y_{xxxx} - J_1^{-1}(x+a)(ay_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t)) = -J_1^{-1}(x+a)M(t) \quad (2.3)$$

с граничными условиями (1.3).

Найдем решение уравнения (2.3) с начальными условиями (1.8) методом Фурье. Рассмотрим сначала однородное уравнение

$$y_{tt} + y_{xxxx} - J_1^{-1}(x+a)(ay_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t)) = 0 \quad (2.4)$$

с граничными условиями (1.3). Определяя его решение в виде $y(x, t) = v(x)\tau(t)$, для функции $v(x)$ получаем спектральную краевую задачу

$$v'''' - J_1^{-1}(x+a)(av''''(0) - v''(0)) = \lambda v \quad (2.5)$$

$$v(0) = v'(0) = 0, \quad v''(1) = v'''(1) = 0 \quad (2.6)$$

а для $\tau(t)$ — следующее уравнение:

$$\tau'' + \lambda \tau = 0 \quad (2.7)$$

Спектральная краевая задача (2.5) — (2.6) подробно изучалась [1] и была построена полная система собственных значений $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ и соответствующих собственных функций $v_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$). При этом $\lambda_n = \beta_n^4$, где β_n — n -й положительный корень характеристического уравнения

$$\begin{aligned} & \operatorname{ch} \beta \cos \beta + 1 + J_1^{-1} \{ 2a\beta^{-2} \operatorname{sh} \beta \sin \beta + \\ & + \beta^{-3} [(a^2\beta^2 + 1) \operatorname{ch} \beta \sin \beta + (a^2\beta^2 - 1) \operatorname{sh} \beta \cos \beta] \} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$v_n(x) = v_n^*(x) / \langle v_n^*(x), v_n^*(x) \rangle$$

Здесь:

$$\begin{aligned} v_n^*(x) = & A_n \operatorname{ch}(\beta_n x) + B_n \operatorname{sh}(\beta_n x) + C_n \cos(\beta_n x) + D_n \sin(\beta_n x) + \\ & + (J_1 \beta_n^2)^{-1} (x+a) (A_n - a\beta_n B_n + a\beta_n D_n - C_n) \end{aligned}$$

$$A_n = \operatorname{sh} \beta_n + [1 - 2a(J_1 \beta_n^2)^{-1}] \sin \beta_n - 2a^2 (J_1 \beta_n)^{-1} \cos \beta_n$$

$$B_n = -\operatorname{ch} \beta_n - [1 + 2a(J_1 \beta_n^2)^{-1}] \cos \beta_n - 2(J_1 \beta_n^3)^{-1} \sin \beta_n$$

$$C_n = -[1 + 2a(J_1 \beta_n^2)^{-1}] \operatorname{sh} \beta_n - \sin \beta_n - 2a^2 (J_1 \beta_n)^{-1} \operatorname{ch} \beta_n$$

$$D_n = [1 - 2a(J_1 \beta_n^2)^{-1}] \operatorname{ch} \beta_n + \cos \beta_n - 2(J_1 \beta_n^3)^{-1} \operatorname{sh} \beta_n$$

а скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеет вид

$$\langle v(x), w(x) \rangle = (v(x), w(x))_{L_2(0,1)} - J^{-1}(x+a, v(x))_{L_2(0,1)} (x+a, w(x))_{L_2(0,1)}$$

Между функциями $v_n(x)$ выполнены следующие условия ортогональности:

$$\langle v_n(x), v_m(x) \rangle = \delta_{nm} \quad (2.9)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

Уравнение (2.7) при $\lambda = \lambda_n$ интегрируется очевидным образом. При этом

$$\tau_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \quad (\omega_n = \beta_n^2)$$

Отсюда следует, что решение уравнения (2.4), удовлетворяющее начальным условиям (1.8), будет иметь вид

$$y_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) (a_{0n} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \omega_n^{-1} \sin(\omega_n t)) \quad (2.10)$$

$$a_{0n} = \langle y_0(x), v_n(x) \rangle, \quad b_{0n} = \langle y_0'(x), v_n(x) \rangle \quad (n=1, 2, \dots)$$

Обозначим $Bv = v''''$ оператор с областью определения

$$D(B) = \{v | v(x) \in W_2^4(0, 1), \quad v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0\}$$

Оператор B является самосопряженным и положительно определенным. В дальнейшем считаем, что $y_0(x) \in D(B)$, $y_0'(x) \in D(B^b)$, где B^b — положительный корень из оператора B [5].

Построим теперь решение $y_*(x, t)$ уравнения (2.3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Представим для этого функцию $x+a$ в виде ряда по системе функций (2.8). При учете условий (2.9) имеем

$$x + a = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v_n(x)$$

$$d_n = \langle x+a, v_n(x) \rangle = J_1 J^{-1} (x+a, v_n(x))_{L_2(0,1)} = J_1 J^{-1} c_n$$

Отсюда, очевидно, получим

$$y_*(x, t) = -J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) c_n \int_0^t k_n(t-\tau) M(\tau) d\tau \quad (2.11)$$

где

$$k_n(t) = \omega_n^{-1} \sin(\omega_n t) \quad (2.12)$$

Подставив теперь найденное решение $y(x, t) = y_0(x, t) + y_*(x, t)$ уравнения (2.3), удовлетворяющее начальным условиям (1.6), в уравнение (1.1), получим для определения $\theta(t)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\theta''(t) = qM(t) + \int_0^t G(t-\tau) M(\tau) d\tau + f(t) \quad (2.13)$$

$$q = 1 + J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2, \quad G(t) = J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 k_n''(t)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n^2 (a_{0n} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \omega_n^{-1} \sin(\omega_n t))$$

В результате, интегрируя (2.13) при учете начальных условий (1.5),

имеем искомое решение

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_0 \cdot t + \int_0^t (t - t_1) \left(qM(t_1) + \int_0^{t_1} G(t - \tau) M(\tau) d\tau + f(t_1) \right) dt_1 \quad (2.14)$$

3. Решение задачи 1. Результаты разд. 2 при учете соотношений (1.7), (2.10), (2.11) позволяют переформулировать задачу 1 как гладкую экстремальную задачу с ограничениями типа равенств следующим образом: найти минимум функционала (1.8) при ограничениях

$$\theta_T = \theta_0 + \int_0^T \left(qM(t_1) + \int_0^{t_1} G(t_1 - \tau) M(\tau) d\tau + f(t_1) \right) dt_1 \quad (3.1)$$

$$\theta_T = \theta_0 + \theta_0 \cdot T + \int_0^T (T - t_1) \left(qM(t_1) + \int_0^{t_1} G(t_1 - \tau) M(\tau) d\tau + f(t_1) \right) dt_1 \quad (3.2)$$

$$a_{Tn} = a_{0n} \cos(\omega_n T) + b_{0n} \omega_n^{-1} \sin(\omega_n T) - J^{-1} c_n \int_0^T k_n(T - \tau) M(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$b_{Tn} = -\omega_n a_{0n} \sin(\omega_n T) + b_{0n} \cos(\omega_n T) - J^{-1} c_n \int_0^T k_n(T - \tau) M(\tau) d\tau \quad (3.4)$$

$$a_{Tn} = \langle y_T(x), v_n(x) \rangle, \quad b_{Tn} = \langle y_T'(x), v_n(x) \rangle \quad (n=1, 2, \dots)$$

Обозначим через $M_2(0, T)$ множество функций $M(t) \in L_2(0, T)$, удовлетворяющих условиям (3.1)–(3.4). Непосредственно проверяется, что $M_2(0, T)$ – замкнутое выпуклое множество [6], а $\Phi(M)$ – выпуклый функционал.

Отсюда, согласно теореме Куна – Таккера [6], существует единственная функция $M^*(t) \in M_2(0, T)$, доставляющая минимум функционалу (1.8).

Остановимся на практическом вычислении $M^*(t)$. Преобразуем предварительно соотношения (3.1) и (3.2) при учете (2.12), (2.13) и (3.3), (3.4). Заметим сначала, что:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(qM(t_1) + \int_0^{t_1} G(t_1 - \tau) M(\tau) d\tau \right) dt_1 = \int_0^T \left(qM(t_1) - \right. \\ & \quad \left. - J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \omega_n \int_0^{t_1} \sin(\omega_n(t_1 - \tau)) M(\tau) d\tau \right) dt_1 = \\ & = \int_0^T \left[qM(t_1) - J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \omega_n \left(\sin(\omega_n t_1) \int_0^{t_1} \cos(\omega_n \tau) M(\tau) d\tau - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \cos(\omega_n t_1) \int_0^{t_1} \sin(\omega_n \tau) M(\tau) d\tau \right) \right] dt_1 = \int_0^T qM(t_1) dt_1 + \\ & + J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \left(\cos(\omega_n T) \int_0^T \cos(\omega_n \tau) M(\tau) d\tau + \sin(\omega_n T) \int_0^T \sin(\omega_n \tau) M(\tau) d\tau - \right. \\ & \quad \left. - \int_0^T M(\tau) d\tau \right) = \int_0^T M(t_1) dt_1 + J^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \int_0^T k_n(T - \tau) M(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Тогда при учете соотношения (3.3) и

$$\int_0^T f(t_1) dt_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [\omega_n a_{0n} \sin(\omega_n T) + b_{0n} (1 - \cos(\omega_n T))]$$

равенство (3.1) можно переписать в виде

$$l_{T_0}(M) \equiv (1, M(t))_{L_2(0, T)} = A_0(T) \quad (3.5)$$

$$A_0(T) = \theta_T - \theta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (b_{Tn} - b_{0n})$$

Аналогично преобразуется равенство (3.2).

В результате имеем

$$l_{T_1}(M) \equiv (T-t, M(t))_{L_2(0, T)} = A_1(T) \quad (3.6)$$

$$A_1(T) = \theta_T - \theta_0 - \theta T - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (a_{Tn} - a_{0n} - b_{0n} T)$$

Из (3.3), (3.4) соответственно имеем:

$$l_{T_{2n}}(M) \equiv (k_n(T-t), M(t))_{L_2(0, T)} = A_{2n}(T) \quad (3.7)$$

$$A_{2n}(T) = c_n^{-1} J(-b_{Tn} - \omega_n a_{0n} \sin(\omega_n T) + b_{0n} \cos(\omega_n T))$$

$$l_{T_{2n+1}}(M) \equiv (k_n(T-t), M(t))_{L_2(0, T)} = A_{2n+1}(T) \quad (3.8)$$

$$A_{2n+1}(T) = c_n^{-1} J(-a_{Tn} + a_{0n} \cos(\omega_n T) + \omega_n^{-1} b_{0n} \sin(\omega_n T))$$

Замечание 1. Из свойств функций $v_n(x)$ (при $n \rightarrow \infty$ они равномерно стремятся к обычным балочным функциям, удовлетворяющим краевым условиям (2.6) [1]) вытекает, что $c_n \sim O(n^{-1})$, $a_{0n}, a_{Tn} \sim O(n^{-4})$, $b_{0n}, b_{Tn} \sim O(n^{-2})$ при $n \rightarrow \infty$.

Отсюда, и так как $\omega_n \sim [\pi(2n+1)/2]^2$ при $n \rightarrow \infty$, имеем $A_{2n}(T) \sim O(n^{-1})$, $A_{2n+1}(T) \sim O(n^{-3})$ при $n \rightarrow \infty$. В связи с этим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(T) < \infty$$

Обозначим через $P_{2N+1}(0, T)$ $(2N+1)$ -мерное подпространство $L_2(0, T)$, являющееся линейной оболочкой ортогональных в $L_2(0, T)$ функций

$$m_0(t) = T^{-1/2}, \quad m_{2j-1}(t) = T^{-1/2} \cdot 2 \cos(2\pi T^{-1} j t)$$

$$m_{2j}(t) = T^{-1/2} \cdot 2 \sin(2\pi T^{-1} j t) \quad (j=1, \dots, N)$$

Найдем минимум функционала (1.8) на подпространстве $P_{2N+1}(0, T)$ при условии (3.5)–(3.8), в которых $n=0, \dots, N$. Воспользуемся для этого методом множителей Лагранжа. Из условия минимума функции Лагранжа

$$L(M, \lambda_0, \dots, \lambda_{2N+1}) = \Phi(M) + \sum_{j=0}^{2N+1} \lambda_j l_{T_j}(M)$$

при условиях (3.5)–(3.8) (в которых $n=1, \dots, N$) для определения коэф-

коэффициентов разложения функции

$$M_N^*(t) = \sum_{j=0}^{2N} P_j m_j(t)$$

и множителей Лагранжа $\lambda_0, \dots, \lambda_{2N+1}$ с необходимостью получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$P_i + \sum_{j=0}^{2N+1} \lambda_j l_{Tj}(m_i) = 0 \quad (i = 0, \dots, 2N) \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=0}^{2N} P_i l_{Tj}(m_i) = 0 \quad (j = 0, \dots, 2N + 1) \quad (3.10)$$

которая однозначно разрешима. В силу единственности решения экстремальной задачи (1.8), (3.5)–(3.8) $M_N^*(t) \rightarrow M^*(t)$ при $N \rightarrow \infty$.

Изложенная методика построения оптимального управления $M^*(t)$ справедлива для любого выпуклого функционала $\Phi(M)$. В этом случае уравнения (3.9) могут быть нелинейными относительно P_i , однако система (3.9), (3.10) также будет однозначно разрешима.

Для функционала (1.8) рассмотрим еще один, более эффективный, способ построения оптимального управления $M^*(t)$. Введем систему функций

$$\varphi_0(t) = 1, \quad \varphi_1(t) = T - t, \quad \varphi_{2j}(t) = k_j(T - t), \quad \varphi_{2j+1}(t) = k'(T - t) \quad (3.11) \\ (j = 1, 2, \dots)$$

Обозначим через $H_2(0, T)$ подпространство $L_2(0, T)$, являющееся замкнутой линейной оболочкой системы функций (3.11).

Система функций (3.11) не ортогональна в $L_2(0, T)$. Построим по (3.11) ортонормированную в $L_2(0, T)$ систему функций $\psi_n(t)$, используя для этого ортогонализацию Шмидта [5]. Положим:

$$\psi_0^\sim(t) = \varphi_0(t), \quad \psi_0(t) = \psi_0^\sim(t)/v_0 \quad (3.12)$$

$$\psi_1^\sim(t) = \varphi_1(t) - \alpha_{10}\psi_0(t), \quad \psi_1(t) = \psi_1^\sim(t)/v_1$$

...

$$\psi_n^\sim(t) = \varphi_n(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{nj}\psi_j(t), \quad \psi_n(t) = \psi_n^\sim(t)/v_n$$

$$(\alpha_{nj} = (\varphi_n(t), \psi_j(t))_{L_2(0,T)}, \quad v_n = \|\psi_n^\sim(t)\|_{L_2(0,T)})$$

Наряду с (3.12) введем в рассмотрение величины $\beta_n(T)$ по следующей схеме:

$$\beta_0(T) = A_0(T)/v_0, \quad \beta_1(T) = (A_1(T) - \alpha_{10}\beta_0(T))/v_1, \dots, \beta_n(T) = \\ = \left(A_n(T) - \sum_{j=0}^n \alpha_{nj}\beta_j(T) \right) / v_n \quad (3.13)$$

Непосредственно вычисляя, имеем

$$\psi_0(t) = T^{-1/2}, \quad \psi_1(t) = 3^{1/2}T^{-1/2} - 2 \cdot 3^{1/2}T^{-1/2}t \\ \beta_0(T) = A_0(T)T^{-1/2}, \quad \beta_1(T) = (2A_1(T)T^{-1/2} - A_0(T)T^{-1/2})3^{1/2}$$

Замечание 2. Согласно замечанию 1, виду функций (3.11) и схеме построения (3.12) и (3.13)

$$\Theta(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) < \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \Theta(T) = \infty, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \Theta(T) = 0$$

Функции $\psi_n(t)$ образуют ортонормированный базис в $H_2(0, T)$. Отсюда и из (3.12), (3.13) следует, что равенства (3.5) – (3.8) эквивалентны равенствам

$$(M(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} = \beta_n(T) \quad (n=0, 1, \dots) \quad (3.14)$$

Утверждение 1. Решение задачи 1 дается формулой

$$M^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(T) \psi_n(t) \quad (3.15)$$

Для доказательства представим пространство $L_2(0, T)$ в виде прямой суммы $L_2(0, T) = H_2(0, T) \oplus Q_2(0, T)$, где $Q_2(0, T)$ ортогональное к $H_2(0, T)$ подпространство. Отсюда следует, что любую функцию $M(t)$, принадлежащую выпуклому множеству $M_2(0, T)$, можно представить в виде $M(t) = M^*(t) + Q(t)$, где $M^*(t)$ дается формулой (3.15), а $Q(t)$ – произвольная функция, принадлежащая $Q_2(0, T)$. Действительно, согласно (3.14), (3.15)

$$(M(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} = (M^*(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} + (Q(t), \psi_n(t))_{L_2(0, T)} = \beta_n(T)$$

Так как $\|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0, T)}^2 + \|Q(t)\|_{L_2(0, T)}^2$, то

$$\inf_{M \in M_2(0, T)} \|M(t)\|_{L_2(0, T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0, T)}^2 + \inf_{Q \in Q_2(0, T)} \|Q(t)\|_{L_2(0, T)}^2 = \|M^*(t)\|_{L_2(0, T)}^2$$

что и доказывает утверждение.

4. Решение задачи 2. Введем в рассмотрение функцию $\Theta^\sim(T) = \Theta(T) - L$. Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $\Theta^\sim(T) = 0$. Существование такого корня следует из замечания 2.

Утверждение 2. Решение задачи 2 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ дается формулой (3.15), в которой $T = T^*$.

Доказательство утверждения 2 почти дословно повторяет доказательство утверждения 1. При этом следует лишь учесть, что

$$\|M^*(t)\|_{L_2(0, T)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^2(T)$$

5. Случай вязкоупругого стержня. Рассмотрим механическую систему, описанную в разд. 1, считая при этом стержень вязкоупругим. В рамках реологической модели материала Фойхта ($\sigma = E(\epsilon + \nu \epsilon^\cdot)$) [7], математической моделью такой механической системы будет следующая система дифференциальных уравнений:

$$J\theta'' + \int_0^1 (x+a) y_{tt}(x, t) dx = M(t) \quad (5.1)$$

$$y_{tt} + h y_{txxxx} + y_{xxxx} = -(x+a)\theta'' \quad (5.2)$$

с краевыми условиями (1.3). Система записана в безразмерных переменных, смысл которых определен в разд. 1. При этом $h = \nu(EI/m)^{1/2}l^2$.

Остановимся на построении решений краевой задачи (1.3), (5.1), (5.2) с начальными условиями (1.5), (1.6). По аналогии с изложенным в разд. 2 преобразуем систему уравнений (5.1), (5.2). В результате аналогом уравнения (2.3) будет уравнение

$$y_{tt} + h[y_{txxxx} - J_1^{-1}(x+a)(ay_{txxx}(0, t) - y_{txx}(0, t))] + y_{xxxx} - J_1^{-1}(x+a)(ay_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t)) = -J_1^{-1}(x+a)M(t) \quad (5.3)$$

Построим решение уравнения (5.3) с краевыми и начальными условиями (1.3) и (1.6) соответственно. Воспользовавшись методом Фурье, найдем сначала решения уравнения

$$y_{tt} + h[y_{txxxx} - J_1^{-1}(x+a)(ay_{txxx}(0, t) - y_{txx}(0, t))] + y_{xxxx} - J_1^{-1}(x+a)(ay_{xxx}(0, t) - y_{xx}(0, t)) = 0 \quad (5.4)$$

Определяя $y(x, t) = v(x)\tau(t)$, с необходимостью получаем, что функция $v(x)$ должна удовлетворять спектральной краевой задаче (2.5), (2.6), а $\tau(t)$ дифференциальному уравнению

$$\tau'' + h\omega_n^2\tau' + \omega_n^2\tau = 0 \quad (5.5)$$

общее решение которого имеет вид

$$\tau(t) = d_{n1} \exp(q_{n1}t) + d_{n2} \exp(q_{n2}t)$$

где $q_{n1, n2} = [-h\omega_n^2 \pm (h^2\omega_n^4 - 4\omega_n^2)^{1/2}]/2$. При тех n , для которых величины q_{n1} , q_{n2} комплексные, считаем d_{n1} , d_{n2} комплексно сопряженными.

Отсюда следует, что решение уравнения (5.4), удовлетворяющее начальным условиям (1.6), имеет вид

$$y_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) (d_{n1} \exp(q_{n1}t) + d_{n2} \exp(q_{n2}t))$$

$$d_{n1} = (a_{0n}q_{n2} - b_{0n}) / (q_{n2} - q_{n1}), \quad d_{n2} = (a_{0n}q_{n1} - b_{0n}) / (q_{n1} - q_{n2})$$

а решение уравнения (5.3) будет $y(x, t) = y_0(x, t) + y_*(x, t)$, где $y_*(x, t)$ дается формулой (2.11), в которой

$$k_n(t) = (\exp(q_{n1}t) - \exp(q_{n2}t)) / (q_{n1} - q_{n2}) \quad (5.6)$$

Функция $\theta(t)$ определяется уравнением (2.13), в котором $k_n(t)$ определяется формулой (5.6), а

$$f(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n (d_{n1}q_{n1}^2 \exp(q_{n1}t) + d_{n2}q_{n2}^2 \exp(q_{n2}t))$$

Для краевой задачи (1.3), (5.1), (5.2) справедливы все результаты разд. 3 и 4. При этом

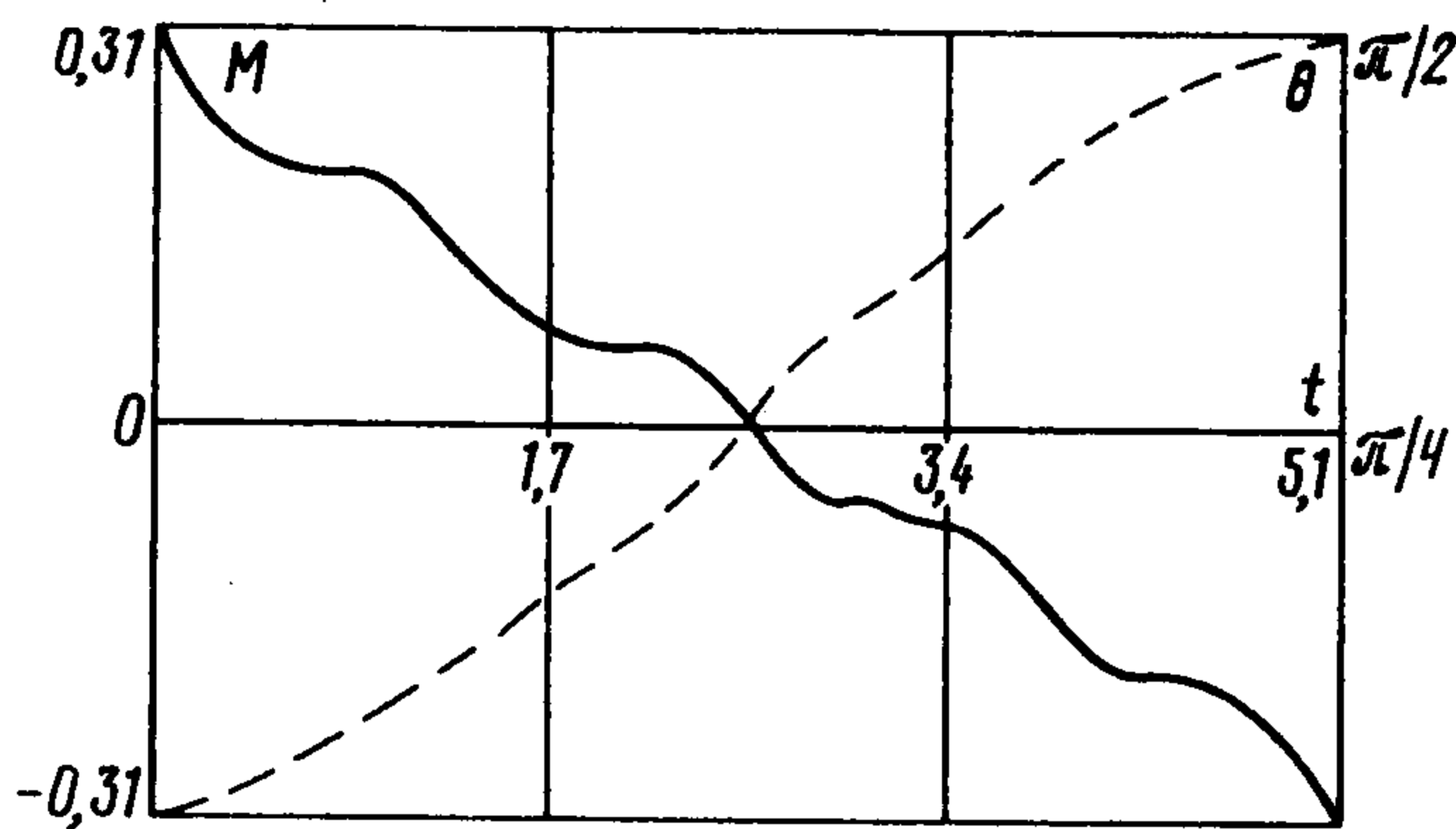
$$A_0(T) = \theta_T - \theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (-b_{Tn} + d_{n1}q_{n1} + d_{n2}q_{n2})$$

$$A_1(T) = \theta_T - \theta_0 - \theta_0 T + \sum_{n=1}^{\infty} c_n [-a_{Tn} + (q_{n1}T + 1)d_{n1} + (q_{n2}T + 1)d_{n2}]$$

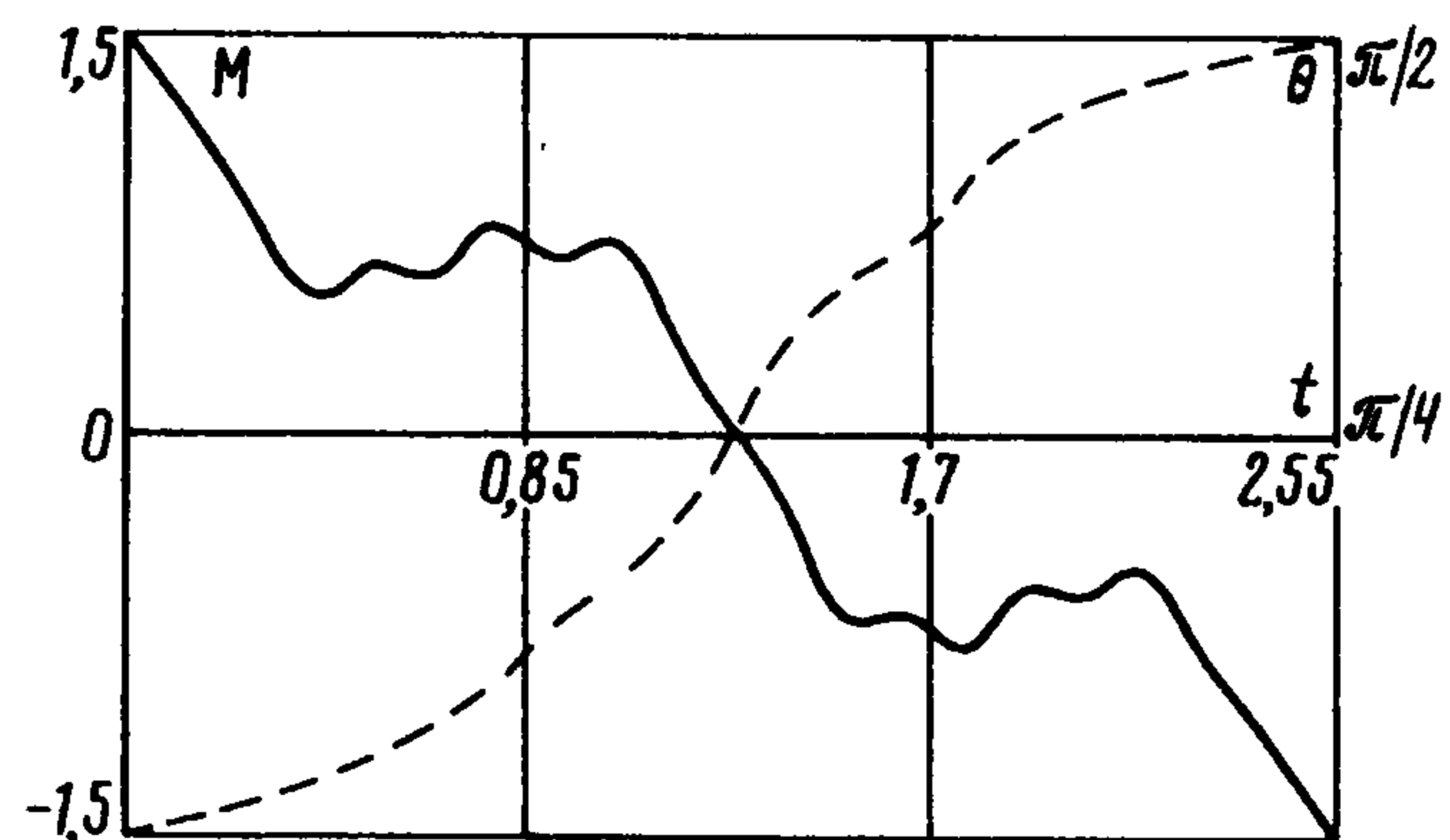
$$A_{2n}(T) = c_n^{-1} J (-b_{Tn} + d_{n1}q_{n1} \exp(q_{n1}T) + d_{n2}q_{n2} \exp(q_{n2}T))$$

$$A_{2n+1}(T) = c_n^{-1} J (-a_{Tn} + d_{n1}q_{n1} \exp(q_{n1}T) + d_{n2}q_{n2} \exp(q_{n2}T))$$

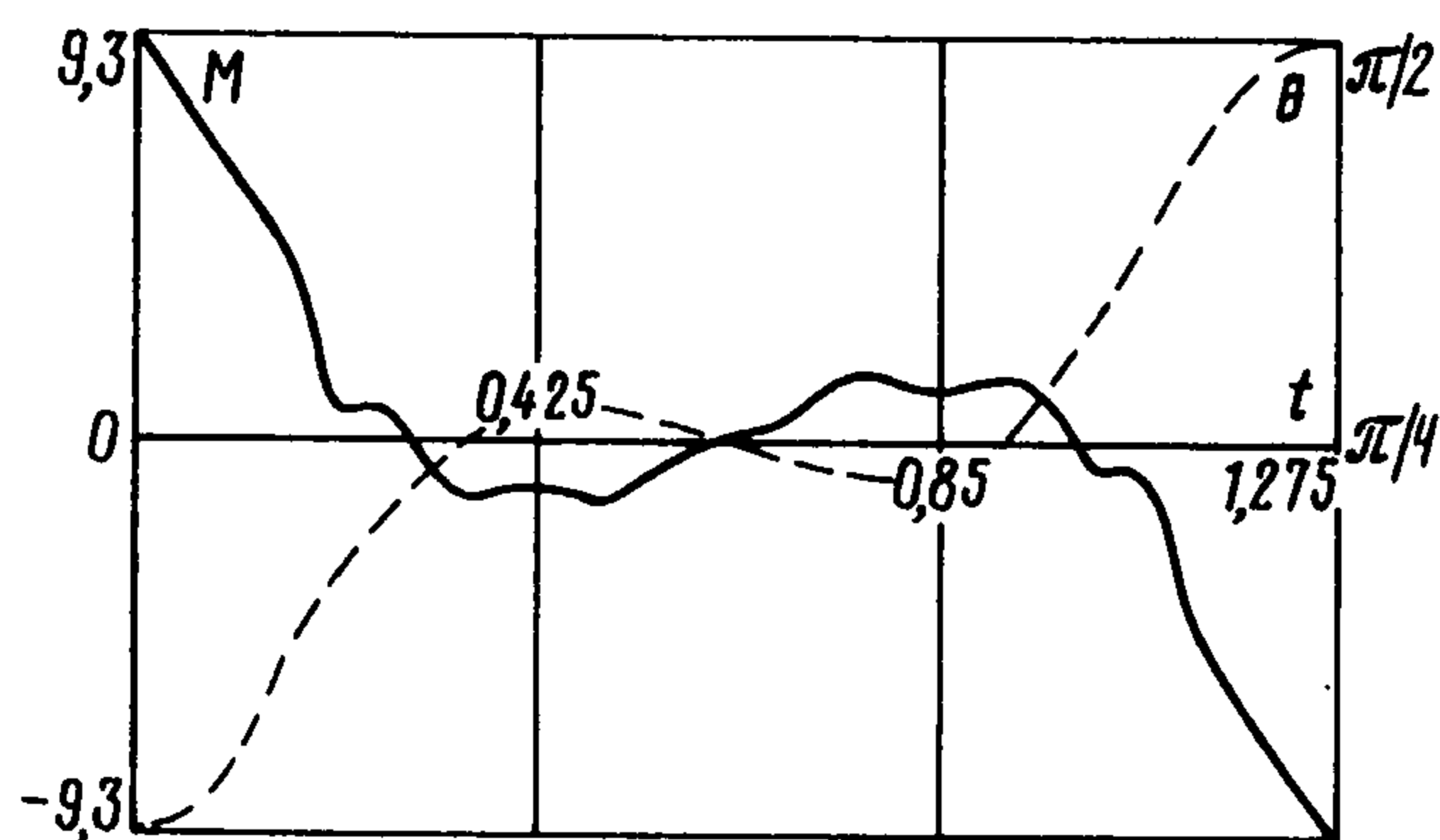
Пример. Рассмотрим следующую механическую систему: твердое тело – куб со стороной $h=1,5 \cdot 10^{-1}$ м; стержень упругий, имеет длину $l=7,5 \cdot 10^{-1}$ м и квадратное сечение со стороной $h_1=10^{-2}$ м; материал – сталь ($\rho=7,8 \cdot 10^3$ кг/м³, $E=2 \cdot 10^{11}$ Н/м²). В результате имеем: $J_1=3 \cdot 10^{-1}$; $J=7,331 \cdot 10^{-1}$; $b=2,55 \cdot 10^1$ с⁻¹; $\beta_1=2,306$; $\beta_2=4,764$;



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$\beta_3=7,877$; $\beta_4=1,101 \cdot 10^1$; $\beta_5=1,414 \cdot 10^1$; $c_1=9,759 \cdot 10^{-1}$; $c_2=3,255 \cdot 10^{-1}$; $c_3=1,431 \cdot 10^{-1}$; $c_4=8,021 \cdot 10^{-2}$; $c_5=6,064 \cdot 10^{-2}$.

На фиг. 2, 3, 4 приведены графики функций $M(t)$, дающие решение задачи 1, и фазовой переменной $\theta(t)$ (штриховой линией) в случае поворота системы из нулевого положения равновесия на угол $\theta_0=\pi/2$ с полным гашением колебаний стержня соответственно для $T=0,2$ с; $0,1$ с; $0,05$ с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О влиянии колебаний упругих элементов с распределенными массами на ориентацию спутника // Космич. исследования. 1987. Т. 25. Вып. 4. С. 537–544.
2. Злочевский С. И., Кубышкин Е. П. О стабилизации спутника с гибкими стержнями. I // Космич. исследования. 1989. Т. 27. Вып. 5. С. 643–651.
3. Черноуцько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г. Манипуляционные работы. М.: Наука, 1989. 363 с.
4. Бербюк В. Е. Оптимизация управляемых вращений твердого тела с упругим стержнем с помощью первых интегралов свободной системы // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 8–16.
5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
6. Иоффе А. Д., Тихомиров В. Н. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.
7. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.

Ярославль

Поступила в редакцию
28.II.1991