Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 531.31+531.38

© 1992 г. С. В. Болотин

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ХАОТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ДИНАМИКЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предлагается метод доказательства существования хаотических движений гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, основанный на вариационном исчислении «в целом» (теории Морса) и работе [1]. Этот метод применен для анализа движения динамически симметричного тяжелого твердого тела с центром масс в диаметральной плоскости. Аналогично может быть разобран случай динамически несимметричного тела.

Методы исследования неинтегрируемых систем, основанные на теории возмущений, применимы лишь к системам, близким к интегрируемым [2]. В динамике твердого тела они позволяют установить неинтегрируемость и хаотическое поведение решений только для значений параметров, мало отличающихся от значений параметров для известных интегрируемых случаев. Предлагаемый метод не связан подобными ограничениями.

1. Хаотические движения твердого тела. Уравнения Эйлера — Пуассона движения тяжелого твердого тела имеют вид

$$J\omega^{\cdot}=[J\omega, \omega]+[\gamma, e] \quad \gamma^{\cdot}=[\gamma, \omega] \tag{1.1}$$

где γ — единичный вектор Пуассона, ω — вектор угловой скорости, J — тензор инерции, e — произведение веса тела и радиус-вектора центра масс. Уравнения (1.1) гамильтоновы на четырехмерном множестве уровня

$$M=\{(J\omega, \gamma)=c, \quad |\gamma|=1\}\subseteq R^6 \tag{1.2}$$

интеграла площадей и имеют интеграл энергии

$$H=T+V; \quad T=(J\omega, \omega)/2, \quad V=(e, \gamma) \tag{1.3}$$

Пусть центр масс твердого тела не совпадает с неподвижной точкой. Тогда во всех известных случаях полной интегрируемости системы (1.1) на уровне (1.2) — Лагранжа, Ковалевской и Горячева — Чаплыгина тело динамически симметрично, а в последних двух случаях центр масс лежит в диаметральной плоскости эллипсоида инерции. Пусть это предположение выполнено и, кроме того, постоянная площадей $c=0$, как в случае Горячева — Чаплыгина.

Можно выбрать единицы измерения и оси инерции твердого тела таким образом, что $e=e_1$ — единичный базисный вектор, вектор e_3 направлен по оси динамической симметрии и осевой момент инерции равен единице. Тогда система (1.1) на уровне M зависит от единственного безразмерного параметра a — отношения экваториального и осевого моментов инерции. В силу неравенства между моментами инерции $1/2\leqslant a<\infty$. Уравнения (1.1) на уровне (1.2) интегрируемы при $a=1$ (шаровой эллипсоид инерции), $a=$

$=2$ (случай Ковалевской) и $a=4$ (случай Горячева — Чаплыгина). В случае $c\neq0$ доказана неинтегрируемость по Лиувиллю уравнений (1.1) на уровне (1.2) при $a\gg1$ [3], однако в рассматриваемом случае $c=0$ неинтегрируемость не была ранее доказана.

Теорема 1. Пусть $a>4$. Тогда система (1.1) на нулевом уровне M интеграла площадей не имеет аналитических первых интегралов, независимых от энергии H, и аналитических групп симметрий [4]. При значениях h, немного больших максимума 1 потенциальной энергии, ее траектории обладают стохастическим поведением на инвариантном подмножестве уровня энергии $\{H=h\}\cap M$ в фазовом пространстве.

Доказательство неинтегрируемости и стохастичности гамильтоновых систем обычно основано на построении достаточного числа трансверсальных гомоклинических (двоякоасимптотических) траекторий (см., например, [1–6]). Для доказательства существования таких траекторий используется метод Мельникова — Арнольда, применимый только для систем, близких к интегрируемым. В рассматриваемой задаче они годятся лишь при a, близких к 1, 2, 4, ∞. Будет дано доказательство существования гомоклинических траекторий, основанное на теории Морса [7] и использующее предложенные ранее методы [8].

2. Существование гомоклинических траекторий. Потенциальная энергия V достигает максимума 1 в точке $P=\{\gamma=e\}$ сферы Пуассона S^2. Соответствующее положение равновесия $O=\{\omega=0,\gamma=e\}$ системы (1.1) в фазовом пространстве $M\subseteq R^6$ — неустойчивое положение равновесия с вещественными характеристическими показателями ±1, $\pm1/a^{1/2}$. Существуют четыре маятниковые двоякоасимптотические к O траектории системы (1.1) на уровне M, такие, что твердое тело вращается вокруг горизонтальной оси, ортогональной радиус-вектору центра масс $e=e_1$. Две маятниковые траектории $\Gamma_{1,2}\subseteq M$ соответствуют вращению твердого тела вокруг горизонтальной оси e_2 и задаются формулами

$$\gamma_2=0,\quad \gamma_1^2+\gamma_3^2=1,\quad \omega=\omega_2e_2,\quad \omega_2=\pm(2(1-\gamma_1)/a)^{1/2}$$

Они получаются одна из другой изменением знака времени. Две другие маятниковые траектории $\Gamma_{3,4}\subseteq M$ соответствуют вращению вокруг горизонтальной оси симметрии e_3 и задаются формулами

$$\gamma_3=0,\quad \gamma_1^2+\gamma_2^2=1,\quad \omega=\omega_3e_3,\quad \omega_3=\pm(2(1-\gamma_1))^{1/2}$$

Траектория Γ_3 соответствует $\omega_3>0$, а Γ_4 отвечает $\omega_3<0$.

Через точку $O\in M$ проходят два аналитических инвариантных двумерных многообразия W^s и W^u, состоящих из траекторий системы (1.1), асимптотических к положению равновесия O при $t\to+\infty$ и $t\to-\infty$ соответственно. Гомоклинические траектории (ГТ) $\Gamma_1-\Gamma_4$ — линии пересечения многообразий W^s и W^u.

Напомним, что ГТ называется трансверсальной, если многообразия W^s и W^u пересекаются вдоль неё под ненулевым углом. Хотя при почти всех a ГТ $\Gamma_1-\Gamma_4$ трансверсальные, это не позволяет сделать вывод о неинтегрируемости и сложном поведении системы (1.1) на M, поскольку характеристические показатели положения равновесия O вещественны [9]. Например, можно показать, что при $a=2$ все маятниковые ГТ трансверсальны, несмотря на интегрируемость системы.

Согласно теореме Тураева — Шильникова [1], хаотическое поведение гамильтоновой системы, имеющей положение равновесия с вещественными ненулевыми характеристическими показателями, вытекает из существования по крайней мере трех трансверсальных ГТ, касающихся при $t\to\infty$ и $t\to-\infty$ ведущих собственных направлений уравнения первого приближения, отвечающих наибольшему отрицательному и наименьшему положительному характеристическому показателю соответственно (в [5] при немного других условиях доказана неинтегрируемость).

Для положения равновесия O системы (1.1) на M при $a>1$ (экваториальный момент инерции больше осевого) ведущими направлениями, отвечающими характеристическим показателям, равным по модулю $1/a^{1/2}$, являются направления входа и выхода маятниковых двоякоасимптотических траекторий Γ_3 и Γ_4. Маятниковые траектории Γ_1 и Γ_2 касаются собственных направлений, отвечающих большему по модулю характеристическому показателю 1. Поэтому все остальные двоякоасимптотические к O траектории, если они существуют, касаются в точке O ведущих направлений. Таким образом, для применения теоремы Тураева — Шильникова достаточно установить трансверсальность маятниковых ГТ Γ_3 и Γ_4 и построить трансверсальную не маятниковую двоякоасимптотическую к O траекторию.

Теорема 2. Пусть $a>4$. Тогда маятниковые ГТ Γ_3 и Γ_4 трансверсальны. Кроме маятниковых существуют еще по крайней мере четыре двоякоасимптотические к O траектории $\Gamma_5-\Gamma_8$, причем для Γ_5 и Γ_6 вектор Пуассона принадлежит полусфере $\gamma_3>0$, а для Γ_7 и Γ_8 — полусфере $\gamma_3<0$. Каждая из построенных траекторий либо трансверсальна, либо касание инвариантных многообразий W^s и W^u вдоль нее имеет нечетный порядок. Траектории $\Gamma_{5,6}$ и $\Gamma_{7,8}$ отличаются изменением знака времени.

Здесь касание аналитических многообразий W^s и W^u, лежащих на трехмерном уровне энергии $\{H=1\}\cap M$, имеет нечетный порядок, если части, на которые линия пересечения делит свою окрестность в W^s, лежат по разные стороны W^u. Используя аналитичность рассматриваемой системы, можно показать, что при почти всех $a>4$ построенные ГТ трансверсальны, однако применяемые вариационные методы не позволяют определить исключительные значения параметра.

Следствие 1. При достаточно малых $h-1>0$ пересечение окрестности множества $\cup\Gamma_i\cup\{0\}\subseteq M$; $i=3,\ldots,8$ с уровнем энергии $\{H=h\}\cap M$ содержит инвариантное подмножество, на котором система (1.1) топологически эквивалентна надстройке над топологической марковской цепью (или схемой Бернулли).

В случае трансверсальности построенных ГТ траекторий следствие вытекает из теоремы 2 и работы [1]. Там указан, кроме того, вид матрицы перехода марковской цепи. Можно показать, что результаты [1] переносятся на случай нетрансверсальных гомоклинических траекторий нечетной кратности. Неинтегрируемость системы (1.1) на M вытекает из полученного следствия. Для доказательства неинтегрируемости можно воспользоваться также методами [5].

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 2 методами теории Морса.

3. Минимальность маятниковых траекторий. Переходя в системе (1.1) на M от переменных γ, ω к переменным γ, $\gamma^{\cdot}$, при нулевой постоянной площадей получим натуральную систему с конфигурационным пространством — сферой Пуассона $S^2\{\gamma\}$ и фазовым пространством $M=TS^2$. При условии $(J\omega, \gamma)=0$ в силу (1.1) имеем $\omega=[\gamma^{\cdot}, J\gamma]/(\gamma, J\gamma)$. Из (1.3) найдем кинетическую энергию $T={}^1/_2(J'\gamma^{\cdot}, \gamma^{\cdot})/(J\gamma, \gamma)$, где J' — присоединенная матрица. Согласно принципу наименьшего действия Мопертюи — Якоби, проекции траектории энергии $h=1$ системы (1.1) на сферу Пуассона являются геодезическими линиями метрики Якоби

$$\|\gamma^{\cdot}\|^2=2(h-V(\gamma))T(\gamma, \gamma^{\cdot})=(1-(e, \gamma))(J'\gamma^{\cdot}, \gamma^{\cdot})/(J\gamma, \gamma) \qquad (3.1)$$

Метрика Якоби вырождена в точке максимума потенциальной энергии $P=\{\gamma=e_1\}$. Действие Якоби кривой $t\to\gamma(t)\in S^2$ (длина кривой в метрике (3.1)) имеет вид

$$S(\gamma)=\int((1-\gamma_1)(\gamma_1^{\cdot 2}+\gamma_2^{\cdot 2}+a\gamma_3^{\cdot 2})/(a\gamma_1^2+a\gamma_2^2+\gamma_3^2))^{1/2}\,dt \qquad (3.2)$$

Пусть $\Gamma\subseteq S^2$ — экватор $\{\gamma_3=0\}$ сферы Пуассона. Он является кривой, описываемой вектором γ при движении вдоль маятниковых ГТ $\Gamma_{3,4}$, а значит, критической точкой функционала действия (3.2) в классе кусочно-гладких кривых с концами в точке P.

Замечание. В силу вырождения метрики Якоби (3.1) в точке $P=\{\gamma_1=1\}$ сферы Пуассона, подынтегральное выражение в (3.2) не является гладким в точке P. Поэтому понятие критической точки функционала S нуждается в уточнении. Это будет сделано в пункте 4 путем модификации области определения S: вместо множества кривых с концами в точке P следует рассматривать множество Ω кривых, концы которых находятся на малом расстоянии (в метрике Якоби) ε от точки P.

Лемма 1. При $a>4$ экватор Γ является точкой невырожденного локального минимума функционала действия Якоби в классе Ω кусочно-гладких кривых на S^2 с концами в точке P.

Утверждение леммы означает, что для всех кривых из Ω, близких к Γ вместе с производными, действие Якоби не меньше $S(\Gamma)$, причем неравенство строгое для всех близких к Γ кривых, кроме полученных из Γ перепараметризацией, и вторая вариация функционала S (в смысле предыдущего замечания) невырождена. Лемма 1 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 2. Пусть $t\to\gamma(t)$ — кривая из Ω. Тогда $\partial(a^{1/2}S(\gamma))/\partial a\geqslant 0$, причем знак равенства выполнен только если кривая содержится в экваторе Γ сферы Пуассона.

Доказательство. Вычисляя производную, получим из (3.2)

$$\partial(a^{1/2}S(\gamma))/\partial a=a^{1/2}\int(1-\gamma_1)^{1/2}\{(J\gamma, \gamma)^{-1/2}(J'\gamma^{\cdot}, \gamma^{\cdot})^{-1/2}\gamma_3^{\cdot 2}+(J\gamma, \gamma)^{-3/2}(J'\gamma^{\cdot}, \gamma^{\cdot})^{1/2}\gamma_3^2\}\,dt/2\geqslant 0$$

Знак равенства выполнен только при $\gamma_3\equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 3. При $a=4$ вторая вариация функционала действия S в точке $\Gamma\in\Omega$ неотрицательна и имеет степень вырождения 1.

Доказательство. Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 4. В случае Горячева — Чаплыгина устойчивое W^s и неустойчивое W^u инвариантные многообразия положения равновесия O касаются вдоль гомоклинических маятниковых траекторий $\Gamma_{3,4}\subseteq M$ и в их окрестности диффеоморфно проектируются на сферу Пуассона при проекции π: $M=TS^2\to S^2$ фазового пространства на конфигурационное.

При доказательстве будем использовать переменные Эйлера – Пуассона γ, ω. Уравнения (1.1) имеют дополнительный интеграл $F=\omega_3^2(\omega_1^2+\omega_2^2)-\omega_1\gamma_3$ Горячева – Чаплыгина. На многообразиях $W^{s,u}$ все первые интегралы задачи принимают постоянные значения, равные значениям в точке O. Следовательно,

$$W^s\cup W^u\subseteq N=\{H=1,\quad (J\omega,\gamma)=0,\quad |\gamma|=1,\quad F=0\}$$

Пусть $L\subseteq M$ – одна из маятниковых траекторий Γ_3 или Γ_4, а $Q=(\gamma,\omega)$ – точка кривой L. Найдем касательные плоскости инвариантных многообразий T_QW^s, $T_QW^u\subseteq R^6$.

Пусть $\gamma(t)$, $\omega(t)$ – кривая в W^s или W^u с началом в точке $Q=(\gamma(0),\ \omega(0))$. Дифференцируя интегралы энергии, площадей, геометрический и Горячева – Чаплыгина по t при $t=0$, получим

$$\omega_2\omega_2^{\boldsymbol\cdot}+\gamma_1^{\boldsymbol\cdot}=0,\quad 4\gamma_1\omega_1^{\boldsymbol\cdot}+4\gamma_2\omega_2^{\boldsymbol\cdot}+\omega_3\gamma_3^{\boldsymbol\cdot}=0,\quad \gamma_1\gamma_1^{\boldsymbol\cdot}+\gamma_2\gamma_2^{\boldsymbol\cdot}=0 \tag{3.3}$$

и $\omega_3(\omega_1^{\boldsymbol\cdot 2}+\omega_2^{\boldsymbol\cdot 2})-\omega_1^{\boldsymbol\cdot}\gamma_3^{\boldsymbol\cdot}=0$. Исключая $\gamma_3^{\boldsymbol\cdot}$ и используя, что кривая L удовлетворяет соотношениям (2.2), можно привести последнее уравнение к виду

$$((1+\gamma_1)\omega_1^{\boldsymbol\cdot}+\gamma_2\omega_2^{\boldsymbol\cdot})^2=0 \tag{3.4}$$

Таким образом, множество векторов, касательных к N в точке Q, является двумерной плоскостью в R^6 и, следовательно, касательные плоскости $T_QW^s=T_QW^u=T_QN$ совпадают и задаются уравнениями (3.3) и (3.4).

Чтобы доказать, что многообразия $W^{s,u}$ диффеоморфно проектируются на сферу Пуассона в окрестности точки Q, достаточно проверить, что при заданном $\gamma^{\boldsymbol\cdot}\in T_\gamma S^2$ уравнения (3.3) и (3.4) однозначно разрешимы относительно $\omega^{\boldsymbol\cdot}$. В точке Q имеем $\omega_2\neq0$. При $\gamma_2\neq0$ получим $\omega_1^{\boldsymbol\cdot}=\gamma_3^{\boldsymbol\cdot}\omega_3/4$, $\omega_2^{\boldsymbol\cdot}=\gamma_3^{\boldsymbol\cdot}\omega_3(1+\gamma_1)/4\gamma_2$, $\omega_3^{\boldsymbol\cdot}=-\gamma_1^{\boldsymbol\cdot}/\omega_3$. Поскольку многообразия $T_QW^{s,u}$ гладко зависят от точки Q, то требуемое утверждение верно и при $\gamma_2=0$. Лемма 4 доказана.

Выведем лемму 3 из леммы 4. Лемма 4 означает, что для каждой точки $q\in S^2$, достаточно близкой к Γ, существует единственная траектория системы (1.1) $t\mapsto(\gamma_+(t),\ \gamma_+^{\boldsymbol\cdot}(t))\in TS^2=M$, $0\leqslant t<\infty$, асимптотическая к точке O при $t\to\infty$, близкая к ГТ L, такая что $\gamma_+(0)=q$ и единственная траектория $t\mapsto(\gamma_-(t),\ \gamma_-^{\boldsymbol\cdot}(t))\in M$, $-\infty<t\leqslant0$, асимптотическая к точке O при $t\to-\infty$, близкая к L и такая, что $\gamma_-(0)=q$. Кроме того, при $q\in\Gamma$ функция $\|\gamma_+^{\boldsymbol\cdot}(0)-\gamma_-^{\boldsymbol\cdot}(0)\|$ обращается в нуль вместе с производными. Пусть $S_+(q)$ – действие Якоби кривой γ_+, а $S_-(q)$ – кривой γ_-. По формуле для вариации функции действия имеем $\gamma_\pm^{\boldsymbol\cdot}(0)=\mp\operatorname{grad}S_\pm(q)$ (градиент вычисляется в римановой метрике на сфере Пуассона, задаваемой кинетической энергией).

Для любой кривой $\gamma\in\Omega$, достаточно близкой к Γ и проходящей через точку q, имеем $S(\gamma)\geqslant S(\gamma_+)+S(\gamma_-)=S_+(q)+S_-(q)$, а по доказанному первый и второй дифференциалы этой функции обращаются в нуль на Γ. Лемма 3 доказана.

Следствие 2. При $a>4$ каждая точка $q\in S^2$, достаточно близкая к Γ, соединяется с точкой P ровно двумя локально минимальными геодезическими $\gamma_\pm$ метрики Якоби. Эти геодезические не пересекают кривую Γ и угол между γ_+ и γ_- в треугольнике $\Gamma\gamma_+\gamma_-$ меньше π.

Геодезическая локально минимальна, если она является точкой локального минимума функционала длины S среди всех кривых с теми же концами. Существование геодезических $\gamma_\pm$ следует из отсутствия сопряженных точек на локально минимальной геодезической Γ. По лемме 1 сумма $S(q)$ длин кривых $\Gamma_\pm$ достигает невырожденного минимума $S(\Gamma)$ на Γ. Поэтому при q, близких к Γ, вектор $\operatorname{grad}S(q)$ направлен от Γ. Однако, как при доказательстве леммы 3, можно показать, что он составляет с геодезическими $\Gamma_\pm$ равные углы и направлен в сторону угла между ними, большего π.

Следствие 3. При $a>4$ инвариантные многообразия $W^{s,u}$ трансверсально пересекаются вдоль $\Gamma_{3,4}$ и диффеоморфно проектируются на сферу Пуассона в их окрестности.

Первое утверждение теоремы 2 доказано.

4. Доказательство существования гомоклинических траекторий. Докажем следующее общее утверждение, из которого следует оставшаяся часть теоремы 2. Рассмотрим натуральную гамильтонову систему с конфигурационным пространством S^2, кинетической энергией T, являющейся положительно определенной квадратичной формой по скорости, и потенциальной энергией V. Предполагается, что функции T и V гладкие (по крайней мере класса C^2). Пусть V достигает невырожденного максимума h в точке $P\in S^2$. В [7] доказано, что всегда существует двоякоасимптотическая к положению равновесия P траектория энергии $H=T+V=h$. Ее траектория $\Gamma\subseteq S^2$ является геодезической метрики Якоби $\|\gamma^\cdot\|^2=2(h-V(\gamma))T(\gamma,\gamma^\cdot)$ в области $D=S^2\setminus\{P\}$.

Теорема 3. Пусть траектория Γ является точкой невырожденного локального минимума действия Якоби, причем Γ является при $t\to\pm\infty$ противоположной ведущей асимптотической траекторией. Тогда

1°. В каждой из областей, на которые Γ делит сферу S^2, существует двоякоасимптотическая к положению равновесия P траектория.

2°. Если система аналитическая, то эта траектория либо трансверсальна, либо имеет нечетную кратность.

Можно считать, что сфера ориентирована. Зафиксируем также ориентацию кривой Γ. Тогда можно говорить о правой и левой стороне Γ. В дальнейшем ограничимся правой W из областей, на которые Γ делит сферу. Первое утверждение теоремы допускает следующее уточнение.

1°′. Пусть Γ_s $(0\leqslant s\leqslant 1)$ — гомотопия кривой Γ в точку, состоящая из кривых на сфере с концами в точке P, расположенных по правую сторону Γ. Тогда существует двоякоасимптотическая к P траектория β, расположенная по правую сторону Γ, действия Якоби

$$S(\beta)\leqslant L=\max_s S(\Gamma_s) \tag{4.1}$$

Доказательство теоремы использует предложенные ранее методы [8]. Отметим, что часть доказательства, относящаяся к существованию ГТ, отличной от Γ, допускает обобщение на многомерный случай. Для доказательства теоремы надо показать, что функционал действия S имеет на Ω критические точки, отличные от Γ. Метрика Якоби не полна в области D, поэтому стандартные методы теории Морса [7] неприменимы. Приходится использовать обходной путь.

Следующая лемма доказана в [8].

Лемма 5 (аналог леммы Гаусса). Пусть $\rho(q)$ — расстояние точки $q\in S^2$ до P в метрике Якоби. Существует $\delta>0$, такое что ρ — гладкая функция в области $U_\delta=\{q\in S^2\colon 0<\rho(q)\leqslant\delta\}$. Каждая точка $q\in U_\delta$ соединяется с P в U_δ единственной геодезической метрики Якоби γ_q. Она имеет длину $\rho(q)$ и пересекает все кривые $\Sigma_\varepsilon=\{p\colon\rho(p)=\varepsilon\}$; $0<\varepsilon\leqslant\delta$ под прямым углом. В частности, $n(q)=-\gamma_q^{\cdot}(0)$ — внешняя нормаль к U_δ. Каждая отличная от γ_q геодезическая в U_δ представляет собой отрезок L с обоими концами a, $b\in\Sigma_\delta$. Он пересекает кривые γ_q не более чем в одной точке и касается единственной кривой Σ_ε, $0<\varepsilon<\delta$. В частности, область U_δ геодезически выпукла, т. е. геодезическая кривизна ее границы Σ_δ положительна.

Используя ориентацию сферы, для векторов, угол между которыми острый, можно определить левый и правый. Пусть W — правая из областей, на которые Γ делит область D. Достаточно доказать существование гомоклинической траектории в области W. Пусть A и B — точки пересечения Γ с Σ_δ, причем Γ ориентирована от A к B.

Лемма 6. Существует близкая к Γ не пересекающая ее ориентированная геодезическая в W с концами p и q на Σ_δ, близкими к точкам A и B соответственно, такая что вектор скорости в точке p направлен левее $n(p)$, а в точке q — правее $-n(q)$.

Доказательство. Пусть точка $q\in\Sigma_\delta\cap W$ достаточно близка к B. По лемме 5 точка q соединяется с P в U_δ единственной геодезической γ_q длины δ с начальным вектором скорости $-n(q)$. Согласно следствию 1, существует еще одна геодезическая, близкая к Γ, соединяющая P с q, которая не пересекает Γ и пересекает Σ_δ в точке $p\in\Sigma_\delta\cap W$, близкой к A. Ее вектор скорости в точке p направлен вдоль $n(p)$, а в точке q — правее $-n(q)$. Выпустим из точки p геодезическую с начальным вектором скорости, направленным чуть левее $n(p)$. По непрерывности она удовлетворяет требуемому условию. Лемма доказана.

По лемме 5 продолжение построенной в лемме 6 геодезической γ за точки p и q пересечет Σ_δ в точках p' и q', таких что отрезки $p'p$ и qq' содержатся в U_δ, причем вектор скорости в p' направлен правее $-n(p')$, а в q' — левее $n(q')$. Если геодезическая γ достаточно близка к Γ, то можно показать, что отрезки pp' и qq' не пересекают неведущие главные асимптотические направления точки и, следовательно, точки A, pp', $q'q$, B расположены на Σ_δ в указанном порядке. Здесь использовано, что Γ касается при $t\to\pm\infty$ противоположных ведущих направлений.

Пусть K — компактное подмножество W, ограниченное геодезической γ и куском кривой $\Sigma_\delta\cap W$ между точками p' и q'.

Лемма 7. Граница ∂K множества K геодезически вогнута. Это значит, что любой достаточно короткий отрезок геодезической метрики Якоби с концами на ∂K не пересекается с внутренностью $K\backslash\partial K$ множества K.

Доказательство. По построению граница K состоит из куска геодезически вогнутой кривой Σ_δ и геодезической γ, а оба внешних угла K меньше π.

Выберем ε $(0<\varepsilon<\delta)$ настолько малым, чтобы множество K не пересекалось с U_ε. Пусть Ω — множество кусочно-гладких кривых β: $[0, 1]\to D$ с концами на Σ_ε. Определим на Ω функционал F по формуле

$$F(\beta)=\int_0^1 \|\beta^{\cdot}(t)\|^2\,dt \tag{4.2}$$

где $\|\ \|$ — метрика Якоби. Функционал F удобнее действия S для применения теории Морса [7]. Его критические точки, отличные от одноточечных кривых,— геодезические метрики Якоби в D, параметризованные пропорционально длине дуги и ортогональные Σ_ε в своих концах. По лемме 5 они соответствуют двоякоасимптотическим к P траекториям. Для применения теории Морса недостает полноты метрики Якоби в области D.

Пусть φ — вещественная гладкая функция на $(0, \infty)$, такая, что $\varphi(x)=1$ при $x>1$ и $\varphi(x)=1/x^2$ при $0<x<{}^1/_2$. Для любого μ $(0<\mu<\varepsilon)$ определим новую риманову метрику $\|\ \|_\mu$ в области D по формуле

$$\|q^\cdot\|_\mu=\|q^\cdot\|\cdot\varphi(\rho(q)/\mu) \tag{4.3}$$

Метрика (4.3) совпадает с метрикой Якоби вне U_μ. Расстояние в этой метрике точки $q\in U_\mu$ до Σ_μ равно $\mu^2/\rho(q)$, так что она полна. Геодезические метрики Якоби, соединяющие точки U_δ с P, являются геодезическими метрики (4.3). Пусть F_μ — функционал на Ω, заданный формулой (4.2) с заменой метрики Якоби на (4.3).

Лемма 8. Для любого $0<\mu<\varepsilon$ функционал F_μ имеет критическую точку $\beta\in\Omega$, такую, что кривая β содержится в области W, пересекается с множеством K и

$$F_\mu(\beta)\leqslant C=(L-2\varepsilon)^2 \tag{4.4}$$

Доказательство использует стандартные методы теории Морса [7] и следует предложенной ранее процедуре [8], поэтому подробности будут опущены. Семейство кривых Γ_s с концами в точке P определяет семейство $\beta_s\in\Omega$; $0\leqslant s\leqslant 1$, стягивающее отрезок $\beta_0=AB$ кривой Γ в точку β_1 и такое, что при достаточно малом μ:

$$\max_s F_\mu(\beta_s)=\max_s F(\beta_s)\leqslant C \tag{4.5}$$

Выберем достаточно мелкое разбиение отрезка $[0, 1]$ и пусть X – множество ломаных геодезических β метрики (4.3) из Ω, соответствующее данному разбиению, таких что $F_\mu(\beta)<C$ [7]. Тогда X – гладкое компактное многообразие с краем $\{f=C\}$, где $f=F_\mu$ – гладкая функция на X, критические точки которой – геодезические метрики (4.3), ортогональные Σ_ε в концах. Пусть Y – множество кривых из X, содержащихся в $W\cup\Gamma$, а Z – множество кривых из Y, пересекающихся с K. Тогда утверждение леммы означает, что функция f имеет критическую точку на множестве Z.

Обозначим через $g_t: X\to X$, $t\geqslant 0$ полугруппу преобразований, порожденную векторным полем $-\operatorname{grad} f$ (риманова метрика на X определена в [7]). Так как множество $W\backslash K$ геодезически выпукло в метрике (4.3) по лемме 6, то множества Y и $Y\backslash Z$ инвариантны относительно полугруппы g_t [8]. Аппроксимируя кривые семейства β_s ломаными геодезическими, можем считать, что $\beta_s\in Y$, причем выполнено (4.5). Если f не имеет критических точек на $Y\cap Z$, то в силу компактности $\|\operatorname{grad} f\|\geqslant a>0$ на этом множестве. Тогда через время $T=C/a$ множество $g_T(Y)$ не пересекается с Z (здесь существенна инвариантность $Y\backslash Z$). Поскольку β_0 – геодезическая, то $g_T(\beta_0)=\beta_0$. Получим гомотопию $g_T(\beta_s)$ кривой β_0 в точку, состоящую из кривых в полусфере W, не пересекающих множество K. Это невозможно.

Доказательство теоремы 3. Пусть β — построенная в лемме 7 геодезическая метрики (4.3) и пусть $\beta(\tau)\in K$; $0<\tau<1$. Можно считать, что β параметризована пропорционально длине дуги. Продолжим геодезическую β влево и вправо от τ до ближайшей точки пересечения с Σ_μ. Получим геодезическую γ_μ метрики Якоби с концами на Σ_μ, причем по построению $S(\gamma_\mu)\leqslant L$ и γ_μ пересекается с K. Здесь использовано, что геодезическая β ортогональна Σ_ε в своих концах, так что если, например, кривая $\beta([0, \tau])$ не пересекает Σ_μ, то продолжение кривой $\beta(t)$ в область отрицательных t дает кривую β: $[-(\varepsilon-\mu)/\|\beta^\cdot\|, 0]$, соединяющую Σ_μ с Σ_ε.

Можно считать, что $t \to \gamma_\mu(t)$ параметризована длиной дуги и $\gamma_\mu(0) \in K$. Пусть $\mu \to 0$. Выделим из $\gamma_\mu(0)$, $\gamma_\mu^{\cdot}(0)$ сходящиеся к точке из K и единичному вектору подпоследовательности. Геодезическая метрики Якоби с соответствующим начальным условием отвечает двоякоасимптотической к P траектории [8]. Первое утверждение теоремы 3 доказано.

Пусть рассматриваемая система аналитическая. Тогда инвариантные многообразия $W^{s,u}$ положения равновесия — аналитические подмногообразия в фазовом пространстве. Поскольку Γ — трансверсальная двоякоасимптотическая траектория, то они не совпадают и, следовательно, их линии пересечения имеют конечную кратность и изолированы. На каждом из многообразий определена функция S — действие Якоби соответствующей асимптотической траектории, причем множества $\{S \leqslant C\} \cap W^{s,u}$ компактны. Следовательно, число двоякоасимптотических к P траекторий действия Якоби $S \leqslant C$ конечно.

Лемма 9. Предположим, что все гомоклинические к P траектории в области W действия не больше C не трансверсальны и имеют четную кратность. Тогда существует гладкая функция V', сколь угодно близкая к V и равная V вне $W \setminus U_\varepsilon$, такая, что возмущенная система с потенциальной энергией V' и прежней кинетической энергией не имеет гомоклинических к P траекторий в W действия не больше C.

Выведем отсюда второе утверждение теоремы 3. Предположим, что в области W все ГТ действия не больше L имеют четную кратность (L определяется формулой (4.1)). Тогда это верно при замене L на C, немного большее L. По лемме 9 возмущенная система не имеет в W ГТ действия не больше C. Согласно первому утверждению теоремы 3, при V', достаточно близком к V, система с потенциальной энергией V' имеет отличную от Γ двоякоасимптотическую к P траекторию действия не больше C. Полученное противоречие доказывает теорему.

Ограничимся наброском доказательства леммы 9. Гомоклинической траектории в W четной кратности отвечает геодезическая метрики Якоби γ в W, ортогональная Σ_ε в своих концах p и q и пересекающаяся с K. Можно считать, что точка q не является фокальной для p, т. е. многообразия $W^{s,u}$ диффеоморфно проектируются на D в окрестности q. Тогда для всех геодезических, выходящих из окрестности U точки p на Σ_ε по нормали n к Σ_ε касательный вектор в точке пересечения с Σ_ε, близкой к q направлен в одну сторону от нормали $-n$ (для определенности правее). Исключение — касательный вектор к γ в точке q, направленный вдоль $-n(q)$.

Пусть Q — точка на γ, близкая к q. Заменим V на $V' = V + \alpha f$, где гладкая функция f не равна 0 в малой окрестности Q и вектор grad $f(Q)$ ортогонален γ и направлен вправо. Тогда можно показать, что при достаточно малом $\alpha > 0$ векторы скорости всех построенных выше геодезических метрик Якоби с началом в U в точке пересечения с Σ_ε вблизи q направлены правее нормали $-n$. Отсюда следует, что в достаточно малой не зависящей от α окрестности γ нет двоякоасимптотических траекторий возмущенной системы действия не больше C. Повторяя это построение для каждой из конечного числа ГТ, получим противоречие, поскольку ГТ возмущенной системы действия Якоби, ограниченного константой C, могут существовать только в сколь угодно малой окрестности невозмущенных ГТ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тураев Д. В., Шильников Л. П.* О гамильтоновых системах с гомоклиническими кривыми седла // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304. № 4. С. 811–814.
2. *Козлов В. В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
3. *Козлов В. В., Трещев Д. В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой, I, II // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1985. № 6. С. 73–81; 1986. № 1. С. 39–44.
4. *Козлов В. В.* О группах симметрии динамических систем // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 4. С. 531–541.
5. *Болотин С. В.* Двоякоасимптотические траектории и условия интегрируемости гамильтоновых систем // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1990. № 1. С. 55–63.
6. *Довбыш С. А.* Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1990. № 3. С. 70–77.
7. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965. 184 с.
8. *Болотин С. В.* Либрационные движения обратимых динамических систем // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1978. № 6. С. 72–77.
9. *Devaney R. L.* Transversal homoclinic orbits in an integrable system // Amer. J. Math. 1978. V. 100, № 3. P. 631–642.

Москва

Поступила в редакцию 18.III.1991