Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 531.36 : 534

© 1992 г. С. А. Довбыш

КОЛМОГОРОВСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ, НЕВОЗМОЖНОСТЬ РАЗГОНА ФЕРМИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ ТИПА ГАМИЛЬТОНОВЫХ

Рассматриваются системы специального вида, возникающие в различных задачах механики и физики и не содержащие явно малого параметра. С использованием некоторой замены переменных в уравнения движения искусственно вводится малый параметр и на основе теории Колмогорова – Арнольда – Мозера доказывается, что инвариантные (колмогоровские) торы существуют и, более того, заполняют все фазовое пространство, кроме некоторого множества конечной меры (хотя мера всего фазового пространства бесконечна). Получены оценки для величины деформации инвариантных торов и относительной меры колмогоровского множества. Из геометрической теоремы Пуанкаре следует, что во всех изучаемых задачах существует бесконечно много периодических решений. Впервые дано полное строгое теоретическое обоснование результатам численных экспериментов по задаче Улама и получены аналогичные утверждения для других задач.

Далее для так называемых маятниковых систем в качестве малого параметра выступает величина, обратная импульсу. Этот способ введения параметра в применении к уравнениям механики (когда импульс=угловая скорость) впервые использовался [1] для получения асимптотики быстрых вращений. Для задачи Улама вводился [2] малый параметр, обратный скорости частицы.

Данная работа обобщает и развивает результаты [3], которые следуют из теоремы 1 в качестве частного случая.

Рассматриваемый круг вопросов тесно связан с анализом возможности в детерминированных системах механизма ускорения, аналогичного стохастическому механизму Ферми [4], и с изучением устойчивости консервативной системы [5].

Сложные вопросы возникают уже при изучении уравнений

$$\varphi^{\cdot\cdot}+\omega_0^2\sin\varphi=F(t) \tag{0.1}$$

$$x^{\cdot\cdot}+\omega_0^2(1+\alpha x^2)x=F(t),\qquad \alpha>0 \tag{0.2}$$

описывающих осцилляторы, на которые действуют возмущения $F(t)$, содержащие много гармоник. Полукачественная теория и численные эксперименты [5, 6] приводят к выводу, что при некоторых условиях на F осциллятор будет колебаться так, как будто на него действует случайная сила, т. е. будет работать механизм, аналогичный ускорению Ферми, и энергия колебаний в среднем будет расти пропорционально времени.

В модели, предложенной Уламом [7] для изучения ускорения Ферми, частица движется между двумя параллельными стенками, осциллирующими по периодическому закону, упруго от них отражаясь. Численные эксперименты, однако, показали, что разгона не происходит, а фазовая плоскость соответствующего отображения разбивается на три области: 1) малых скоростей, где движение стохастично; 2) промежуточных скоростей, где внутри стохастической компоненты имеются островки устойчивости, окружающие эллиптические точки; 3) больших скоростей, где узкие стохастические слои в окрестности сепаратрис изолированы друг от друга инвариантными кривыми, пересекающими весь интервал изменения фазы (см. [8]). Частичное объяснение этому явлению дали Г. М. Заславский и Б. В. Чириков в 1964 г.

Между тем не исключалось, что в некоторых случаях частица может разгоняться до больших скоростей [9]. В ряде работ исследовалась так называемая упрощенная модель Улама, где колеблющиеся стенки заменены на неподвижные, которые, однако, при соударении действуют на частицу так, как если бы они колебались по периодическому закону. Результаты, полученные при исследовании моделей Улама, точной и упрощенной, аналогичны.

Ниже показано, в частности, что для уравнений (0.1) и (0.2) с гладким периодическим возмущением F и для моделей Улама разгон до больших скоростей невозможен, а механизм Ферми может работать лишь в ограниченной области фазового пространства. Объяснена также наблюдавшаяся в экспериментах структура фазовой плоскости задач Улама (теорема 2). В качестве следствия из геометрической теоремы Пуанкаре выведено существование бесконечного числа периодических решений без традиционно используемых для этих целей предположений симметрии уравнений [10–13]. В частности, в применении к одному из самых популярных объектов исследований – уравнению В. В. Белецкого – полученные результаты являются наиболее сильными (см. обзор [14]). Кроме того, при выполнении соответствующих условий симметрии для всех взаимно простых $m>0$, n методы [10, 12, 13] позволяют доказать существование одного $2\pi m/n$-периодического решения, в то время как согласно теореме 3 имеются по крайней мере два таких решения.

Невозможность разгона связана с наличием адиабатического инварианта и следует из существования инвариантных кривых отображения последования. В применении к задаче Улама на это ранее указывалось в некоторых физических работах, однако строгие результаты отсутствовали [15]. Был сделан вывод [16] о невозможности разгона в точной модели Улама, однако вопрос о мере инвариантных кривых не обсуждался, а доказательство было излишне усложнено.

Следует отметить весьма близкие в идейном плане работы [17–20], где были получены родственные результаты (без оценки меры колмогоровского множества). Так, изучались уравнение $\ddot{x}+2x^3=p(t)$ с периодической кусочно-непрерывной функцией $p(t)$ [17], уравнения типа Дюффинга [18] (см. разд. 2), частный случай маятниковых систем [19, 20], имеющий отношение к задачам механики (см. разд. 2). При этом основное внимание уделялось указанию минимальной необходимой для применения КАМ-теории гладкости [18, 20] или доказательству наличия разгона в маятниковой системе для «неконсервативного» случая [19] (см. разд. 2). Для периодического по времени t уравнения $\ddot{x}+f(x,t)=0$ при весьма общих предположениях с применением к некоторому отображению последования обобщенной геометрической теоремы Пуанкаре [21] был доказан [22] аналог п. 2,3 теоремы 3. Для уравнения $\ddot{x}+g(x)=p(t)$ с функцией $g(x)\operatorname{sign} x$ растущей быстрее, чем $|x|$ при $x\to\infty$ в предположении симметрии удалось доказать также [23] ограниченность всех решений на основании топологических соображений для отображения последования и без использования КАМ-теории.

Ниже основное внимание уделяется вопросу о мере колмогоровского множества и величине деформации инвариантных торов при достаточно высокой гладкости системы. В разд. 1, 2 изложен общий подход к системам трех типов, которые в работах [16–20] рассматривались отдельно, причем предложенные там доказательства могут быть значительно упрощены благодаря ссылкам на известные результаты о точности процедуры усреднения.

Была строго доказана [24–28] возможность и типичность явления разгона в ряде других задач, однако для построенных траекторий фазы (или аналогичные им величины) жестко коррелированы, что являет некоторый контраст со стохастическим механизмом и доказывает отсутствие перемешивания. Близкий результат получен в разд. 6 для смешанной модели Улама.

1. Краткое описание основных методов. После искусственного введения малого параметра рассматриваемые системы принимают вид гамильтоновых систем с одной быстровращающейся фазой и остальными (двумя) медленными переменными [2], причем в качестве быстрой фазы выступает координата либо время. Первый случай имеет место для систем, изучаемых в разд. 2, системы второго типа возникают в разд. 3. Аналогичным образом отображения Улама $z \to z+\varepsilon l(z)+O(\varepsilon^2)$, $z=(p, q)$ в разд. 4 оказываются точными каноническими и близкими к тождественному, а следовательно, могут быть представлены [2] как отображения последования для 2π-периодических гамильтоновых систем второго типа с гамильтонианом $O(\varepsilon^2)$-близким к εE, где

$$E(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{z_0}^{z} l^{(q)}\,dp-l^{(p)}\,dq$$

а $l^{(p)}$, $l^{(q)}$ — компоненты сдвига l, интеграл, входящий в определение E, не зависит от пути интегрирования (неканонический вариант этого утверждения использован в разд. 6).

В аналитическом случае каноническая процедура усреднения позволяет отнести зависимость гамильтониана от быстрой переменной в экспоненциально малые члены (см. подробности в [2, 29]), т. е. найти близкую интегрируемую систему. Затем для соответствующего отображения последования за период используется теорема Мозера об инвариантных кривых кручений или, более общо, малых кручений [30]. В [31] были получены соответствующие оценки для меры и величины деформации в случае кручений, однако результаты [31] без изменений переносятся на общий случай малых кручений совершенно аналогично тому, как переносится первоначальное доказательство Мозера [30] (послужившее основой для [31]). Траектории, проходящие через инвариантную кривую отображения последования, образуют искомый тор.

В дальнейшем $C_1, \ldots, C_{18}$ — некоторые постоянные, $\langle\cdot\rangle^{\varphi}$ — операция осреднения по угловой переменной φ, $\{\cdot\}^{\varphi}=(\cdot)-\langle\cdot\rangle^{\varphi}$ — взятие чисто периодической части. Символ $\|\cdot\|_{C^s}$ означает C^s-норму, где s — натуральное число либо символ ω, C^{ω} — пространство функций, аналитических в некоторой комплексной окрестности вещественной области.

2. Маятниковые системы и уравнения типа Дюффинга.

Маятниковые системы. На прямом произведении

$$M=\mathbf{R}^1\{y\}\times S^1\{x \bmod 2\pi\}\times S^1\{t \bmod 2\pi\}$$

задана система $\dot{x}=\partial H/\partial y$, $\dot{y}=-\partial H/\partial x$ с гамильтонианом

$$H=\sum_{i\geqslant 0} c_i(t, x)\, y^i \tag{2.1}$$

где c_i — некоторые аналитические функции на торе $T^2\{t, x\}$. Пусть $c_i=0$ для $i>n$ (в задачах механики $n=2$) и c_n не зависит от x, $c_n(t)>\delta>0$ для всех t.

Уравнения типа Дюффинга. На прямом произведении

$$M=\mathbf{R}^2\{x, y\}\times S^1\{t \bmod 2\pi\}$$

рассматривается система с гамильтонианом

$$H=y^2/2+ax^n+f(x, t)$$

где $f(x, t)$ — полином от x степени не выше $n-1$ с коэффициентами, 2π-периодическими и аналитическими по t, $a>0$, четное число $n\geqslant 4$.

В частности, для уравнения Дюффинга $n=4$, $f(x, t)=bx^2+p(t)x$.

Перейдем от канонически сопряженных переменных x, y к переменным действие — угол I, φ для гамильтониана $H_0=y^2/2+ax^n$; I, φ можно выбрать так, что

$$x=I^{2/(n+2)}X(\varphi), \quad y=I^{n/(n+2)}Y(\varphi)$$

где X, Y — некоторые аналитические функции на

$$S^1\{\varphi \bmod 2\pi\}, \quad I=C_1H^{(n+2)/(2n)}$$

$$C_1=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{a^{-1/n}}\sqrt{1-ax^n}\,dx>0$$

В новых переменных гамильтониан примет вид

$$H=C_1^{-n\alpha}I^{n\alpha}f(I^\alpha X(\varphi), t), \quad \alpha=2/(n+2) \tag{2.2}$$

Итак, гамильтонианы (2.1) и (2.2) являются частными случаями гамильтониана

$$H=c_n(t)\,I^{n\alpha}+\sum_{i=0}^{n-1}c_i(t,\varphi)\,I^{i\alpha} \tag{2.3}$$

где $\alpha=1$ для маятниковых систем и $\alpha=2/(n+2)$ для уравнений типа Дюффинга.

Введем новые переменные $J=\varepsilon I$, $\tau=\varepsilon^{-\beta}t$, $\beta=n\alpha-1$, используя малый параметр $\varepsilon>0$. Система

$$\dot\varphi=\partial H/\partial I, \quad \dot I=-\partial H/\partial\varphi$$

перейдет в систему

$$d\varphi/d\tau=\partial F/\partial J, \quad dJ/d\tau=-\partial F/\partial\varphi$$

которая имеет гамильтониан

$$F=c_n(t)\,J^{n\alpha}+\sum_{i=0}^{n-1}c_i(t,\varphi)\,J^{i\alpha}\varepsilon^{(n-i)\alpha}$$

и содержит медленно меняющийся параметр t (так как $\beta>0$).

Согласно [29], имеется $O(\varepsilon^\alpha)$-близкая к тождественной, зависящая от времени t, каноническая замена $(J, \varphi)\to(J', \varphi')$, приводящая гамильтониан к виду $F_0(J', t)+F_1(J', \varphi', t)$, где $F_1=O(\exp(-C_2\varepsilon^{-\beta}))$ $(C_2>0)$. Пусть T_0 (соответственно T) — отображение последования системы с гамильтонианом $F_0(F_0+F_1)$ за период $2\pi\varepsilon^{-\beta}$. Тогда в координатах z, φ', где $J'=C_3+$ $+\varepsilon^\beta z$, $C_3\neq0$, отображение T экспоненциально близко к $T_0: z_1=z$, $\varphi_1'=\varphi'+$ $+g(z)$, причем

$$\frac{\partial g}{\partial z}=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2F_0(J,\lambda)}{\partial J^2}\,d\lambda$$

Применяя теорему Мозера и возвращаясь к координатам I, φ, получим следующий результат.

Теорема 1. Пусть $n\alpha>1$, $c_n(t)>\delta>0$, $C_4>0$. Тогда весь тороидальный слой $|I-I_0|<C_4$, кроме, может быть, множества относительной меры

$O(\exp(-C_5|I_0|^\beta))$ $(C_5>0)$, будет накрываться колмогоровскими торами. При этом каждый колмогоровский тор будет зажат между торами

$$I=I_{1,2}, \quad |I_2-I_1|=O((|I_0|+1)^{1-\alpha}). \tag{2.4}$$

Следствия. 1°. Все фазовое пространство M кроме, может быть, множества конечной меры, заполнено колмогоровскими торами, несущими условно-периодические движения.

2°. В процессе движения переменная I может испытывать лишь колебания величины $O(|I|^{1-\alpha}+1)$ в соответствии с (2.4).

Замечания. 1°. Если функции c_i, входящие в выражение для гамильтониана (2.3), имеют лишь конечное, но достаточно большое число производных по t, φ, то теорема 1 и ее следствие останутся в силе, но экспоненциально малая оценка заменится на степенную: $O(|I_0|^{-m})$.

2°. Предположим, что коэффициент $c_n(t, \varphi)$ при старшем члене в гамильтониане (2.3) зависит от φ, но μ-близок в $C^s(s\leqslant\omega)$-норме к положительной функции, не зависящей от φ. В этом случае, если s — достаточно велико, то теорема 1 останется в силе (с учетом замечания 1), но оценка (2.4) заменится на более слабую:

$$|I_2-I_1|=O(\mu|I_0|+|I_0|^{1-\alpha}+1)$$

Для уравнения типа Дюффинга такая ситуация имеет место, если H_0 (старшие члены гамильтониана H) равняется $H_0=k(t)/2y^2+a(t)x^n$, где $k(t)$ и $a(t)$ близки в C^s-норме к положительным постоянным.

3°. Если функции $c_n, \ldots, c_{n-k+1}$ не зависят от φ, то оценку (2.4) можно улучшить: $|I_2-I_1|=O((|I_0|+1)^{1-k\alpha})$.

В частности, для уравнения Дюффинга $n=4$, $f(x, t)=bx^2+p(t)x$ и переменная $I=C_1H_0^{3/4}$ может испытывать только колебания величины $O(|I|^{1/3}+1)$.

Приведем известные примеры маятниковых систем, встречающихся в задачах механики.

1°. *Колебания математического маятника с вибрирующей точкой подвеса* [32]

$$H=y^2/2-\omega_0^2(1+f(t))\cos x \tag{2.5}$$

где $f(t)-2\pi$-периодическая функция, x — угол поворота, а y — угловая скорость вращения маятника. Уравнение вида $x^{\cdot\cdot}+\omega_0^2(1+f(t))\sin x=0$ встречается также в ряде других задач. Система интегрируема, если $\mu_1=\omega_0^2=0$, либо $\mu_2=\|\{f(t)\}\|_{C^\omega}=0$.

2°. *Плоские колебания спутника на эллиптической орбите* [33]

$$H=\frac{1}{2}\left[\frac{p}{1+e\cos\nu}-2(1+e\cos\nu)\right]^2-(1+e\cos\nu)\mu\cos\delta \tag{2.6}$$

Здесь в роли x, y, t выступают соответственно переменные δ, p, ν, имеющие следующий смысл: ν — истинная аномалия центра масс спутника на эллиптической орбите с эксцентриситетом e, $\delta/2$ — угол, характеризующий поворот спутника относительно радиус-вектора, проведенного из притягивающего центра в центр масс спутника, $p=(2+d\delta/d\nu)(1+e\cos\nu)^2$ равняется умноженной на константу угловой скорости вращения спутника вокруг его центра масс. Величина μ характеризует распределение масс спутника, $|\mu|<3$. Задача интегрируема, если $\mu_1=\mu=0$ либо $\mu_2=e=0$.

3°. *Ограниченная задача о вращении симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой* [34]. Переменные Эйлера — Пуассона в пределе выражаются через величины $\xi \bmod 2\pi$, η, соответствующие переменным x, y.

$$H=\eta^2/2+(2h)^{-1}(\alpha\cos\xi+\beta\sin\xi\sin\tau) \tag{2.7}$$

Здесь в роли времени выступает $\tau=\sqrt{2h}t$; $\alpha^2+\beta^2=1$. Числа α, β, h характеризуют интегралы энергии и площадей системы, η равняется деленной на $\sqrt{2h}$ проекции r угловой скорости тела на ось динамической симметрии. Система интегрируема, если $\mu_1=(2h)^{-1}=0$ либо $\mu_2=\beta=0$.

4°. *Движение математического маятника под действием периодического вращающего момента с нулевым средним*[1]. Уравнение имеет вид $q^{\cdot\cdot}+\omega_0^2\sin q=f(t)$, где q — угол, образуемый маятником с вертикалью, $f(t)$—2π-периодический вращающий момент, $\langle f\rangle^t=0$. Это уравнение можно представить в гамильтоновой форме с гамильтонианом

$$H={}^1/_2(p+f_1(t))^2-\omega_0^2\cos q, \tag{2.8}$$

где $q^\cdot=p+f_1(t)$, $f_1(t)=\int f(t)dt+C_4$, постоянная C_4 такова, что $\langle f_1\rangle^t=0$. Задача интегрируема, если $\mu_1=\omega_0^2=0$ либо $\mu_2=\|f_1(t)\|_{C^\omega}=0$.

5°. *Движение математического маятника с периодически изменяющейся длиной подвеса* (*маятник Эйнштейна*):

$$H=p^2/(2l^2)-\omega_0^2\cos q \tag{2.9}$$

где q — угол поворота, $p=l^2q^\cdot$ — сопряженный момент, $l(t)$ — длина подвеса. Система интегрируема, если $\mu_1=\omega_0^2=0$ либо

$$\mu_2=\|\{l(t)\}\|_{C^\omega}=0.$$

Отметим, что примеры 1°, 4°, 5° можно комбинировать.

Во всех примерах относительная мера множества M^*, дополнительного к колмогоровскому, не превосходит $O(\exp(-C_5|y_0|)$. В примерах 1°—3°, 5° в качестве y выступает величина, канонически сопряженная углу поворота, т. е. кинетический момент, который согласно замечанию 3 сохраняется с точностью $O(|y_0|^{-1})$.

Пример 4° допускает содержательное обобщение. Добавим к гамильтониану (2.1) 2π-периодический по t и непериодический по x член $-xp(t)$, характеризующий наличие внешней силы $p(t)$. В «консервативном» случае, когда $\langle p\rangle^t=0$, уравнения движения представимы в гамильтоновой форме с гамильтонианом вида (2.1), что доказывает наличие колмогоровского множества и отсутствие разгона. В «неконсервативном» случае ($c=\langle p\rangle^t\neq0$) можно установить отсутствие инвариантных торов, расположенных вблизи уровней $y=\mathrm{const}$, и разгон всех траекторий в области больших положительных значений cy (ср. с [19]). Родственный результат для смешанной модели Улама получен в разд. 6.

Гамильтонианы (2.5)-(2.9) обладают следующим общим свойством: при $\mu_1=0$ исчезает зависимость от фазы x, а при $\mu_2=0$ получается гамильтониан математического маятника

$$H={}^1/_2y^2+\omega_0^2\cos x,\quad \omega_0^2=\mu_1$$

[1] *Буров А. А.* Некоторые задачи динамики маятниковых систем // Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1984. 132 с.

(для этого в (2.6) необходимо предварительно произвести замену p на $p+2$). Используя это, можно установить следующие факты.

1°. Если $C_4>0$ и числа $2\sqrt{|\mu_1|}$, $3\sqrt{|\mu_1|}$ не являются целыми, а μ_2 – мало, то относительная мера множества M^* в кольце $|y-y_0|<C_4$ не превосходит $O(\sqrt{\mu_2}\exp(-C_5z)$, где $z=|y_0|+1$, причем инвариантные торы будут $O(|\mu_2|z^{-1}+\sqrt{|\mu_2|}\exp(-C_5z))$ – близки к поверхностям

$$^1/_2y^2+\mu_1\cos x=\text{const} \tag{2.10}$$

Для примеров 4°, 5°, когда гамильтониан имеет вид $H={}^1/_2\alpha(t)y^2+f_1(t)y-\omega_0^2\cos x$, последняя оценка улучшается до $O(|\mu_2|z^{-2}+\sqrt{|\mu_2|}\exp(-C_5z))$. Постоянная $C_5>0$ и O-оценки зависят от μ_1, C_4.

Итак, полная мера множества M^* есть $\operatorname{mes}M^*=O(\sqrt{|\mu_2|})$ (для оценок в области небольших $|y|$ фазовое пространство разбивается на области трех типов: окрестность эллиптического периодического решения, окрестность сепаратрисы гиперболического периодического решения, кольцевые области, дополнительные к областям первых двух типов. Для областей третьего типа искомые оценки следуют из [31], а для областей второго типа – из [35].

Доказательство для областей первого типа использует приводимость интегрируемой системы к нормальной форме Биркгофа, один шаг процедуры нормализации Биркгофа возмущенной системы и оценки для инвариантных кривых малых кручений).

2°. Если $\mu_1\neq0$ и $2\sqrt{|\mu_1|}$ либо $3\sqrt{|\mu_1|}$ – целое число, то указанные выше оценки останутся в силе, если только исключить из рассмотрения произвольную окрестность эллиптического периодического решения $x\equiv0 \bmod 2\pi$ (для $\mu_1<0$) или $x\equiv\pi \bmod 2\pi$ (для $\mu_1>0$).

3°. Для малых μ_1 относительная мера множества M^* в области $|y-y_0|<C_4$ не превосходит $O(\sqrt{|\mu_1|}\exp(-C_5z))$, причем инвариантные торы будут $O(|\mu_1|z^{-1}+\sqrt{|\mu_1|}\exp(-C_5z))$ – близки к торам $y=\text{const}$. Постоянная $C_5>0$ и O – оценки зависят от μ_2, C_4. Итак, $\operatorname{mes}M^*=O(\sqrt{|\mu_1|})$.

4°. Для малых μ_1, μ_2 относительная мера множества M^* в области $|y-y_0|<C_4$, $|y_0|>2C_4$ не превосходит $O(\sqrt{|\mu_1\mu_2|}\exp(-C_5|y_0|))$, причем инвариантные торы будут $O(|\mu_1\mu_2|z^{-1}+\sqrt{|\mu_1\mu_2|}\exp(-C_5|y_0|))$ – близки к поверхностям (2.10). Для примеров 4°, 5° эта оценка улучшается до $O(|\mu_1\mu_2|z^{-2}+\sqrt{|\mu_1\mu_2|}\exp(-C_5|y_0|))$. Постоянная $C_5>0$ и O-оценки зависят от C_4.

В разд. 3 будет доказано, что в области $|y|<C_4$ мера множества M^* также составляет $O(\sqrt{|\mu_1\mu_2|})$, причем инвариантные торы близки к поверхностям, аналогичным (2.10). Итак, $\operatorname{mes}M^*=O(\sqrt{|\mu_1\mu_2|})$.

3. Исследование примеров 1°–5° в области малых значений параметров μ_1, μ_2 и импульса y. Гамильтонианы (2.5)–(2.9) имеют вид (с точностью до несущественного слагаемого)

$$H={}^1/_2y^2(1+g(t))+h(t)y-\omega_0^2(\cos x+f(t,x))$$

где 2π-периодические функции g, h, f аналитически зависят от параметра μ_2, причем $g(t)\equiv0$, $f(t,x)\equiv0$, $h(t)\equiv\text{const}$, когда $\mu_2=0$.

Полагая

$$x=x'+\int\{h\}^t dt+y\int\{g\}^t\,dt,\quad y=y'-\langle h\rangle^t/(1+\langle g\rangle^t)$$

введем зависящую от времени каноническую замену $(x,y)\to(x',y')$. В новых переменных система описывается гамильтонианом

$$H={}^1/_2Gy'^2-\omega_0^2(\cos x'+l(t,x',y'))$$

где $l=0$ при $\mu_2=0$; $G=1+\langle g\rangle^t$. Вводя новую переменную $Y=\varepsilon^{-1}y'$, где $\varepsilon>0$ – малый параметр, перейдем к гамильтоновой системе с канонически сопряженными переменными x', Y и гамильтонианом

$$F=\varepsilon^{-1}H=\varepsilon\{{}^1/_2GY^2-(\omega_0/\varepsilon)^2(\cos x'+l(t,\ x',\ \varepsilon Y))\}$$

Пусть C_6, C_7 – положительные постоянные и $|\omega_0/\varepsilon|<C_6$. Из [2] следует, что при малых ε, μ_2 в некоторой комплексной окрестности вещественной области $|Y|<C_7$ определена $O((\omega_0/\varepsilon)^2\mu_2)$ – близкая к тождественной каноническая замена, приводящая F к виду

$$F'(Y,\ x')+F''(Y,\ x',\ t)$$

$$F''=O((\omega_0/\varepsilon)^2\mu_2\exp(-C_8\varepsilon^{-1}))\quad (C_8>0)$$

Отсюда вытекает, что при малых $\mu_1=\omega_0^2$, μ_2, C_4 весь торический слой $|y|<C_4$ кроме, может быть, множества относительной меры $O(\sqrt{|\mu_1\mu_2|}\exp(-C_9\varepsilon^{-1}))$, где $\varepsilon=\max\{|\omega_0|;C_4\}$, $C_9>0$, покрывается инвариантными торами системы, являющимися возмущениями поверхностей $Gy^2/2-\omega_0^2\cos x=\mathrm{const}$ (ср. [2], разд. 6).

4. Модели Улама: точная и упрощенная. *Точная модель* [2]. Выберем ось координат x вдоль линии движения частицы и стенок. Предположим, что координаты стенок задаются 2π-периодическими гладкими функциями $d_1(t)$, $d_2(t)$, $d_1<d_2$, где t – время. В промежуток между двумя соударениями частица движется равномерно и прямолинейно по закону $x(\tau)=v(\tau-t)$, где v – скорость, t играет роль момента прохождения начала координат. Пусть после соударения со второй стенкой v, t принимают значения $(-v',\ t')$. Таким образом, для $v>\max_t|d_2^{\cdot}(t)|$ определено отображение A_2: $(v,\ t)\to(v',\ t')$. Аналогично определяется отображение A_1: $(v',\ t')\to(v'',\ t'')$, соответствующее удару о первую стенку.

Исследование модели сводится к изучению так называемого точного отображения Улама $A=A_1\circ A_2$, определенного при $v>v_{cr}=2\max_t|d_1^{\cdot}|+2\max_t|d_2^{\cdot}|$ и отображающего полуцилиндр $\mathbf{R}_+^1\{v>v_{cr}\}\times S^1\{t \bmod 2\pi\}$ в полуцилиндр $K=\mathbf{R}_+^1\{v:v>0\}\times S^1\{t \bmod 2\pi\}$. Нетрудно показать, что отображение A сохраняет относительный интегральный инвариант v^2dt, т. е. является точным каноническим в координатах $I=v^2$, $t \bmod 2\pi$ (ср. [2, 8]).

Изменим масштаб времени, совершая подстановку $t=\varepsilon\tau$, $v=\varepsilon^{-1}V$. Отображение A: $(J,\ t)\to(J,\ t)$, где $J=V^2/2$, в области $0<C_{10}<V<C_{11}$ будет точным каноническим и $O(\varepsilon)$-близким к тождественному [2], а в качестве функции E выступает $E=\pi^{-1}L$ [2], где $L=V(d_2-d_1)$ – известный адиабатический инвариант [36]. Поэтому, если функции d_i аналитичны, то, применяя процедуру усреднения и оценки для меры и величины деформации инвариантных кривых малых кручений и возвращаясь к исходным переменным, получим следующий результат.

Теорема 2. Пусть $C_4>0$. Зададим на полуцилиндре K две естественные меры mes_i, определяемые соответственно 2-формами $dv^i\wedge dt$, $i=1,\ 2$. Тогда все кольцо $|v-v_0|<C_4$, кроме, может быть, множества относительной меры $\mathrm{mes}_i=O(\exp(-C_{12}v_0))$ $(C_{12}>0)$, будет накрываться инвариантными кривыми точного отображения Улама. При этом каждая такая кривая заключена между линиями уровней $L=L_{1,2}$ адиабатического инварианта $L=v(d_2-d_1)$, для которых

$$|L_2-L_1|=O(1)\tag{4.1}$$

Следствия. 1°. Вся область определения точного отображения Улама, кроме, может быть, множества конечной меры mes_i, накрывается инвариантными кривыми.

2°. В процессе движения частицы ее адиабатический инвариант L испытывает колебания $O(1)$.

Отображение Улама A, очевидно, интегрируемо, если $d_1=\mathrm{const}$, $d_2=\mathrm{const}$. Зафиксируем $D=\langle d_2\rangle^t-\langle d_1\rangle^t>0$ и введем малый параметр $\mu=\|\{d_1\}^t\|_{C^\omega}+\|\{d_2\}^t\|_{C^\omega}$. Легко видеть, что отображение A: $(J, t)\to(J, t)$ будет $O(\mu\varepsilon)$-близко к закручивающему отображению $J\to J$, $t\to t+2\varepsilon DV^{-1}$. Поэтому при $v_0>C_4>0$ оценки теоремы примут соответственно вид $O(\sqrt{\mu}\exp(-C_{12}v_0))$ и

$$|L_2-L_1|=O(\mu+\sqrt{\mu}\exp(-C_{12}v_0)) \qquad (4.2)$$

Чтобы исследовать область $v_0<C_4$, совершим замену $v=\varepsilon V$, где $0<C_{13}<V<C_{14}$, $\varepsilon>0$ – малый параметр. Если μ/ε велико, то отображение A не определено корректно (частица может два раз подряд столкнуться с одной стенкой). Поэтому далее предполагается, что $\mu<C_{15}\varepsilon$, $C_{15}>0$. После второй замены $V=V_0(1+\varepsilon w)$, $|w|<C_{16}$ отображение A примет вид

$$w'=w+O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^2}\right)$$

$$t'=t+\frac{2D}{\varepsilon V_0}-\frac{2D}{V_0}w+O_w(\varepsilon)+O\left(\frac{\mu}{\varepsilon^2}\right)$$

где O_w – член, не зависящий от t. Применяя оценки [31] и возвращаясь к исходным координатам (v, t), получим, что при малых μ/ε^2 все кольцо $C_{13}\varepsilon<v<C_{14}\varepsilon$ кроме, может быть, множества относительной меры $O(\sqrt{\mu}/\varepsilon)$, заполнено инвариантными замкнутыми кривыми, $O(\sqrt{\mu\varepsilon})$-близкими к окружностям $v=\mathrm{const}$, причем в $O(\sqrt{\mu\varepsilon})$-окрестности каждой окружности $v=\mathrm{const}$ найдется такая кривая.

Следствия. 1°. Если в некоторый момент времени скорость частицы очень мала, то в любой другой момент она не превышает нижнего порога $O(\sqrt{\mu})$.

2°. Вся область $0<v<C_4$, кроме, может быть, множества, имеющего меры $\mathrm{mes}_1=O(\sqrt{\mu}\ln\mu)$, $\mathrm{mes}_2=O(\sqrt{\mu})$, накрывается инвариантными замкнутыми кривыми точного отображения Улама. Эти же оценки справедливы, если рассматривать область $0<v<+\infty$.

3°. Если в какой-либо момент времени скорость частицы $v_0>C_{17}\sqrt{\mu}$, где $C_{17}>0$ – некоторая постоянная, то в процессе движения скорость испытывает лишь колебания относительной величины $O(\sqrt{\mu})$.

Упрощенная модель. Пусть теперь стенки неподвижны и имеют координаты $d_1^0<d_2^0$, но при соударении с частицей действуют на нее так, как если бы они колебались по закону $x=d_i(t)$, где $d_1(t)$, $d_2(t)$ — гладкие функции. Упрощенной модели соответствует так называемое упрощенное отображение Улама A, которое строится совершенно аналогично точному. Отображение A является точным каноническим в координатах $I=v$, t (ср. [8]). После замены $v=\varepsilon^{-1}V$ отображение A: $(V, t)\to(V, t)$ станет точным каноническим и $O(\varepsilon)$-близким к тождественному. Простое вычисление показывает, что в качестве функции E в этом случае выступает $E=\pi^{-1}(d_2-d_1+D\ln V)=\pi^{-1}D\ln\varepsilon+\pi^{-1}G$, где $G=d_2-d_1+D\ln v$, $D=d_2^0-d_1^0$ – расстояние между стенками. Видно, что все рассуждения и оценки, относящиеся к точному отображению Улама, проходят без изменений. При этом в оценках (4.1), (4.2)

$$L=\exp(G/D)=v\exp((d_2-d_1)/D).$$

5. Периодические решения. Из наличия колмогоровского множества и геометрической теоремы Пуанкаре [36] вытекает

Теорема 3. 1°. Если n, m — взаимно простые числа, $m>0$, то для маятниковых систем существуют по крайней мере два различных $2\pi m$-периодических решения, удовлетворяющих условию $x(2\pi m)=x(0)+2\pi n$.

2°. Для уравнений типа Дюффинга необходимо дополнительно потребовать, чтобы выполнялось $n/m>C_{18}>0$. В этом случае существуют два $2\pi m$-периодических решения, удовлетворяющих условию $\varphi(2\pi m)=\varphi(0)+$ $+2\pi n$.

3°. Пусть A — отображение Улама (точное или упрощенное). Если взаимно простые n и m удовлетворяют условию $m/n>C_{18}>0$, то m-я итерация A^m имеет по крайней мере $2m$ неподвижных точек, таких, что $I\to I$, $t\to t+$ $+2\pi n$ (при больших I отображение A мало изменяет переменную t. Поэтому выражение $t\to t+2\pi n$ имеет точный смысл). Им будут соответствовать два $2\pi n$-периодических движения частицы.

Замечание. Колмогоровские торы лежат в замыкании множества периодических решений [18]. Поэтому согласно теоремам 1, 2 для рассматриваемых систем все фазовое пространство, кроме, может быть, множества конечной меры, всюду плотно заполнено периодическими траекториями.

6. Смешанная модель Улама. Можно объединить точную и упрощенную модели, предполагая, что стенки колеблются по закону $x=d_i^\circ(t)$, но при соударении воздействуют так, как если бы они колебались по закону $x=$ $=d_i(t)$. Приводимые далее рассуждения справедливы и в случае, если в качестве $d_i^\cdot(t)$ берутся 2π-периодические функции с ненулевыми средними. Ранее рассматривалась релятивистская смешанная модель Улама [28].

Теорема 4. Если k — отношение скоростей $v(t+2\pi)/v(t)$ частицы в моменты времени, различающиеся на 2π, то

$$|k|=\exp\left(-\oint\frac{d_2^\cdot-d_1^\cdot}{d_2^\circ-d_1^\circ}\,dt\right)+O\left(\frac{1}{v(t)}\right)$$

(под скоростью в момент удара можно подразумевать скорость непосредственно до либо после удара).

Доказательство. Можно показать, что соответствующее отображение A: $(V,\ t)\to(V,\ t)$ $O(\varepsilon^2)$-близко к отображению за время $2\varepsilon\sim|1/v(t)|$ вдоль траекторий автономной системы $v'=-(d_2^\cdot-d_1^\cdot)$, $t'=(d_2^\circ-d_1^\circ)/v$, где штрих означает дифференцирование по новой независимой переменной. Эта система сводится к тривиально интегрируемому уравнению

$$d\ln v/dt=-(d_2^\cdot-d_1^\cdot)/(d_2^\circ-d_1^\circ)$$

откуда следует искомый результат.

Замечание. Если функции f, f_1, l в примерах 1°, 4°, 5° или функции d_i, введенные при рассмотрении точной и упрощенной моделей Улама, имеют достаточно высокую, но конечную гладкость, то все результаты останутся в силе, но экспоненциально малые оценки заменятся на степенные. Теорема 4 справедлива в предположении непрерывности вторых производных d_i°, d_i по времени, а при условии непрерывности лишь первых производных вместо $O(1/v(t))$ будет стоять некоторая величина, равномерно по t стремящаяся к нулю при $v(t)\to\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев Н. Н.* Асимптотика быстрых вращений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 1. С. 145–158.
2. *Нейштадт А. И.* О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 197–204.
3. *Довбыш С. А.* Колмогоровские торы в некоторых неинтегрируемых системах, не содержащих малого параметра // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1988. № 2. С. 36–39.
4. *Ферми Э.* О происхождении космического излучения // Науч. труды. М.: Наука, 1972. Т. 2. С. 439–450.
5. *Заславский Г. М., Чириков Б. В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Успехи физ. наук. 1971. Т. 105. № 1. С. 3–39.
6. *Заславский Г. М.* Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. 143 с.
7. *Улам С. М.* О некоторых статистических свойствах динамических систем // Математика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1963. Т. 7. Вып. 5. С. 137–142.
8. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
9. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 271 с.
10. *Хайнбокел Дж., Страбл Р. А.* Периодические решения систем дифференциальных уравнений, обладающих симметрией // Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1966. № 1. С. 3–17.
11. *Heinbockel J., Struble R. A.* The existence of periodic solutions of nonlinear oscillators // SIAM Journal. 1965. V. 13. N 1. P. 6–36.
12. *Morris G. R.* A differential equation for undamped forced non-linear oscillations. I, II, III // Proc. Cambr. Phil. Soc. Pt. I. 1955. V. 51. P. 297–312; Pt. II. 1958. V. 54. P. 426–438; Pt. III. 1965. V. 61. P. 133–155.
13. *Harvey C. A.* Periodic solutions of differential equation $x^{\cdot\cdot}+g(x)=p(t)$ // Contribut. different. equations. 1963. V. 1. N 4. P. 425–451.
14. *Mawhin J.* On a differential equation for the periodic motions of a satellite around its center of mass // Асимптотические методы математической физики. Киев: Наук. думка, 1988. С. 150–157.
15. *Пустыльников Л. Д.* Об одной задаче Улама // Теорет. и мат. физика. 1983. Т. 57. № 1. С. 128–132.
16. *Пустыльников Л. Д.* О модели Ферми – Улама // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 3. С. 549–553.
17. *Morris G. R.* A case of boundedness in Littlewood's problem on oscillatory differential equations // Bull. Austral. Math. Soc. 1976. V. 14. N 1. P. 71–93.
18. *Dieckerhoff R., Zehnder E.* Boundedness of solutions via the twist-theorem // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1987. V. 14. N 1. P. 79–95.
19. *You J.* Invariant tori and Lagrange stability of pendulumtype equations // J. different. equations. 1990. V. 85. N 1. P. 54–65.
20. *Levi M.* KAM theory for particles in periodic potentials // Ergodic theory and dynamical systems. 1990. V. 10. N 4. P. 777–785.
21. *Биркгоф Дж.* Обобщение последней геометрической теоремы Пуанкаре // Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. С. 241–253.
22. *Jacobowitz H.* Periodic solutions of $x''+f(x, t)=0$ via the Poincare – Birkhoff theorem // J. different. equations. 1976. V. 20. N 1. P. 37–52; Corregendum. The existence of the second fixed point: A correction to «Periodic solutions...» // Ibid. 1977. V. 25. N 1. P. 148–149.
23. *Ding T.* Boundedness of solutions of Duffing's equation // J. different. equations. 1986. V. 61. N 2. P. 178–207.
24. *Пустыльников Л. Д.* Устойчивые и осциллирующие движения в неавтономных динамических системах. II. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1977. Т. 34. С. 3–103.
25. *Пустыльников Л. Д.* Неограниченный рост переменной действия в некоторых физических моделях // Тр. Моск. мат. о-ва. 1983. Т. 46. С. 187–200.
26. *Пустыльников Л. Д.* Об асимптотическом поведении траекторий стандартного отображения // Мат. заметки. 1986. Т. 39. № 5. С. 719–726.
27. *Пустыльников Л. Д.* Об осциллирующих движениях в одной динамической системе // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51. № 5. С. 1010–1032.
28. *Пустыльников Л. Д.* Новый механизм ускорения частиц и числа вращения // Теорет. и мат. физика. 1990. Т. 82. № 2. С. 257–267.
29. *Нейштадт А. И.* О точности сохранения адиабатического инварианта // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 80–87.
30. *Мозер Ю.* О кривых инвариантных при отображениях кольца, сохраняющих площадь // Математика. Период. сб. перев. иностр. статей. 1963. Т. 6. № 5. С. 51–67.
31. *Лазуткин В. Ф.* К теореме Мозера об инвариантных кривых // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1974. Вып. 14. С. 109–120.

32. *Козлов В. В.* О колебаниях одномерных систем с периодическим потенциалом // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1980. № 6. С. 104–107.
33. *Буров А. А.* Неинтегрируемость уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1984. № 1. С. 71–73.
34. *Козлов В. В., Трещев Д. В.* Неинтегрируемость общей задачи о вращении динамически симметричного тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. II // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1986. № 1. С. 39–44.
35. *Довбыш С. А.* Структура колмогоровского множества вблизи сепаратрис плоского отображения // Мат. заметки. 1989. Т. 46. Вып. 4. С. 112–114.
36. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979. 431 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.VII.1990