Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 531.36

© 1992 г. С. А. Агафонов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Исследуется устойчивость равновесия механических систем, на которые действуют диссипативные, гироскопические, потенциальные и неконсервативные позиционные силы. Доказывается ряд общих теорем асимптотического характера, позволяющих судить об устойчивости исследуемой системы при достаточно больших значениях введенного параметра. В ряде случаев находятся оценки для значений параметра, гарантирующих асимптотическую устойчивость или неустойчивость равновесия. Приводится пример.

Влияние диссипативных, гироскопических и потенциальных сил на устойчивость движения механической системы определяется теоремами Кельвина – Четаева [1]. Наличие неконсервативных позиционных сил существенно усложняет объект исследования и исключает возможность прямого использования этих теорем. Отметим, что исследование влияния неконсервативных позиционных сил на устойчивость равновесия проводилось, например, в работах [2–12].

1. Уравнения движения механической системы, на которую действуют диссипативные, гироскопические, потенциальные и неконсервативные позиционные силы, можно привести к виду

$$x^{\cdot\cdot}+Bx^{\cdot}+hGx^{\cdot}+Kx+Fx=X(x,\ x^{\cdot}) \tag{1.1}$$

Здесь $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $B=B^T$, $G^T=-G$, $K=K^T$, $F^T=-F$ – постоянные матрицы, характеризующие соответственно диссипативные, гироскопические, потенциальные и неконсервативные позиционные силы; $X(x,\ x^{\cdot})$ – совокупность членов не ниже второго порядка относительно x, $x^{\cdot}$; $h>0$ – скалярный параметр.

Исследуется устойчивость равновесия

$$x=0,\quad x^{\cdot}=0 \tag{1.2}$$

Без уменьшения общности будем полагать, что $B=\operatorname{diag}(b_1,\ldots,b_n)$.

Теорема 1. Если потенциальная энергия x^TKx имеет в положении равновесия максимум, то при четном n оно неустойчиво при достаточно больших значениях коэффициентов диссипации b_i $(i=1,\ldots,n)$.

Доказательство основано на рассмотрении характеристического уравнения $\Delta(\lambda)=\det[E\lambda^2+(B+hG)\lambda+K+F]=0$ (E – единичная матрица). Вычислим коэффициент при λ в уравнении $\Delta(\lambda)=0$, который равен $\Delta'(0)$. Используя правило дифференцирования определителя, получим

$$\Delta'(0)=\sum_{i=1}^{n}\Delta_i,\quad \Delta_i=\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12}+f_{12} & \ldots & k_{1n}+f_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ kg_{i1} & hg_{i2} & \ldots & b_i\ldots hg_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1}+f_{n1} & k_{n2}+f_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

(k_{ij}, f_{ij}, g_{ij} — соответственно элементы матриц K, F, G). Раскроем каждый определитель Δ_i по i-й строке. Одно из слагаемых суммы будет равно $b_i \det(K_i+F_i)$, где матрицы K_i и F_i получаются из матриц K и F вычеркиванием i-й строки и i-го столбца. Матрицы K_i, F_i $(n-1)$-го, нечетного порядка, причем все собственные значения K_i отрицательны, а матрица F_i кососимметрическая. Определитель суммы этих матриц отрицателен $\det(K_i+F_i)<0$ $(i=1, \ldots, n)$ [6]. Поэтому при достаточно больших значениях b_i имеем $\Delta'(0)<0$, что указывает на существование корня характеристического уравнения с положительной действительной частью. Заметим, что величина $\Delta'(0)$ становится отрицательной и при хотя бы одном достаточно большом коэффициенте диссипации b_i, т. е. вывод теоремы 1 остается справедливым и при частичной диссипации.

Пусть $\det G\neq 0$, $\det F\neq 0$, а диссипация является полной.

Теорема 2. Если матрицы $P=Q+KG-GK$ $(Q=G^TF+F^TG)$ и $A=G^TGB+$ $+BG^TG$ положительно определены, то при достаточно большом h равновесие (1.2) системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Для доказательства рассмотрим положительно определенную при достаточно большом h функцию

$$V=x^{\cdot T}(G^TG+h^{-2}K)x^{\cdot}+x^T({}^1/{}_2G^TG+h^{-2}K^2)x-$$
$$-2h^{-1}x^TCx^{\cdot},\quad C=FG-KG+{}^1/{}_2G \tag{1.3}$$

Производная по времени от функции (1.3) в силу (1.1) имеет вид

$$V^{\cdot}=-x^{\cdot T}[A+h^{-2}R-h^{-1}Q]x^{\cdot}-$$
$$-{}^1/{}_2h^{-1}x^TPx+2h^{-1}x^T(CB+h^{-1}FK)x^{\cdot}+ \tag{1.4}$$
$$+2x^{\cdot T}(G^TG+h^{-2}K)X-2h^{-1}x^TCX$$

$$R=KB+BK$$

и является при выполнении условий теоремы 2 определенно-отрицательной функцией. Действительно, квадратичная часть функции $V^{\cdot}$ имеет вид $-x^{\cdot T}(A+h^{-2}R-h^{-1}Q)_{x^{\cdot}}-{}^1/{}_2h^{-1}x^TPx+2h^{-1}x^TSx^{\cdot}$. Так как матрицы A и P положительно определены, то при достаточно большом h эта квадратичная форма отрицательно определена.

Следствие. При отсутствии потенциальных сил $(K=0)$ равновесие (1.2) асимптотически устойчиво при достаточно большом h и при условии, что матрицы Q и A положительно определены.

Для систем с двумя степенями свободы $(n=2)$ условие положительной определенности матрицы Q сводится к неравенству $gf>0$ (g, f — элементы матриц G и F). С другой стороны, коэффициент при λ в характеристическом уравнении равен $2gf$. Отсюда следует, что для систем с $n=2$ положительная определенность матрицы Q является необходимым условием асимптотической устойчивости.

Рассмотрим систему (1.1) при отсутствии потенциальных сил $(K=0)$ и имеющую множитель $b>0$ при матрице диссипативных сил

$$x^{\cdot\cdot}+bBx^{\cdot}+Gx^{\cdot}+Fx=X(x, x^{\cdot}) \tag{1.5}$$

Теорема 3. Если матрица $G^TB^{-1}F+F^TB^{-1}G$ положительно определена, то при достаточно большом b равновесие (1.2) системы (1.5) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим функцию

$$V=b^{-1}(x^{\cdot}+Gx)^TB^{-1}(x^{\cdot}+Gx)+b^{-1}x^{\cdot T}x^{\cdot}+2x^Tx^{\cdot}+bx^TBx \tag{1.6}$$

Производная $V^{\cdot}$, вычисленная в силу системы (1.5), имеет вид

$$V^{\cdot}=-2x^{\cdot T}Bx^{\cdot}-b^{-1}x^T(G^TB^{-1}F+F^TB^{-1}G)x+2b^{-1}x^T(F+FB^{-1})x^{\cdot}+$$
$$+2b^{-1}(x^{\cdot}+Gx)^TB^{-1}X+2b^{-1}x^{\cdot T}X+2x^TX \tag{1.7}$$

При выполнении условий теоремы 3 функция (1.7) определенно-отрицательна. Можно показать, что при достаточно большом b функция (1.6) является определенно-положительной.

Сделаем замену переменных $x, x^{\cdot}\to u,\ v$: $u=x^{\cdot}+Gx$, $v=x^{\cdot}+bx$. Функция (1.6) примет вид

$$V=b^{-1}[u^T(B+B^{-1}-E)u+v^TBv-2u^T(B-E)v+O(b^{-1})],\quad \lim_{b\to\infty}O(b^{-1})=0$$

Главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы $u^T(B+B^{-1}-E)u+$ $+v^TBv-2u^T(B-E)v$ таковы: $\Delta_1=a_1, \ldots, \Delta_n=a_1a_2\ldots a_n$, $\Delta_{n+1}=a_2\ldots a_nb_1$

$$\Delta_{n+2}=a_3\ldots a_nb_1b_2, \ldots \Delta_{2n}=b_1b_2\ldots b_n$$

$$B=\mathrm{diag}\,(b_1, \ldots, b_n),\quad a_i=b_i+b_{i-1}^{-1}-1$$

Отсюда и следует определенная положительность функции (1.6) при достаточно большом b.

Если матрица Q не является положительно определенной, то равновесие (1.2) системы (1.5) может быть неустойчивым.

Теорема 4. Если матрица $Q+bBF-bFB$ отрицательно определена, то равновесие (1.2) системы (1.5) неустойчиво.

Для доказательства рассмотрим знакопеременную функцию

$$V=x^T(bB-G)x^{\cdot}+{}^1/_2x^T[b^2B^2-G^2-b(GB-BG)]x \tag{1.8}$$

Производная $V^{\cdot}$, вычисленная в силу системы (1.5), равна

$$V^{\cdot}=bx^{\cdot T}Bx^{\cdot}-{}^1/_2x^T(Q+bBF-bFB)x+x^T(bB-G)X$$

При выполнении условий теоремы 4 функция (1.8) удовлетворяет теореме Ляпунова о неустойчивости.

Рассмотрим теперь систему, имеющую скалярный множитель $f>0$ при матрице F

$$x^{\cdot\cdot}+Bx^{\cdot}+Gx^{\cdot}+Kx+fFx=X(x,\ x^{\cdot}) \tag{1.9}$$

Теорема 5. Если $\det F\neq 0$, то при достаточно большом f равновесие (1.2) системы (1.9) неустойчиво независимо от диссипативных, гироскопических и потенциальных сил.

Рассмотрим знакопеременную функцию

$$V=x^T(E+F)x^{\cdot}+{}^1/_2x^TBx$$

Производная $V^{\cdot}$, вычисленная в силу системы (1.9), имеет вид

$$V^{\cdot}=x^{\cdot T}x^{\cdot}+fx^TF^TFx-x^T(G+FB+FG)x^{\cdot}-x^T(K+FK)x+x^T(E+F)X \quad (1.10)$$

и является при выполнении условий теоремы 5 определенно-положительной функцией.

Пусть на механическую систему действуют только потенциальные и неконсервативные позиционные силы. Уравнения возмущенного движения в первом приближении в нормальных координатах имеют вид

$$x^{\cdot\cdot}+Kx+Fx=0, \quad K=\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad (1.11)$$

Предположим, что $\lambda_i>0$ $(i=1, \ldots, n)$ и среди них нет равных. Без уменьшения общности, пусть $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_n$. Было получено [10] условие устойчивости равновесия (1.2) системы (1.11), имеющее вид

$$\|F\|<{}^1/_2[(\lambda_1+\lambda_n)^2+2\lambda_n s]^{1/2}-{}^1/_2(\lambda_1+\lambda_n) \quad (1.12)$$

$$\|F\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|f_{ij}|, \quad s=\min_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|$$

Теорема 6. Равновесие системы (1.11) при достаточно большой величине s устойчиво.

Утверждение теоремы 6 следует из неравенства (1.12).

Пусть $\lambda_n=0$, а $\lambda_1>\lambda_2>\ldots>\lambda_{n-1}>0$. Предположим, что норма матрицы F определяется последней строкой: $\|F\|=|f_{n1}|+\ldots+|f_{nn-1}|$.

Теорема 7. Равновесие системы (1.11) устойчиво при достаточно малой величине $\|F\|$.

Утверждение теоремы 7 следует из условия устойчивости равновесия системы (1.11) в случае $\lambda_n=0$ (неравенство (2.10) работы [10]). Из этого же неравенства можно получить оценку сверху для $\|F\|$, меньше которой равновесие (1.2) устойчиво.

2. Утверждения теорем 2, 3, 5, а также следствия из теоремы 2 носят асимптотический характер. Представляет интерес нахождение оценок снизу для скалярных параметров h, b, f, входящих в уравнения (1.1), (1.5), (1.9), больше которых равновесие (1.2) было асимптотически устойчивым или неустойчивым. Для решения поставленной задачи используем построенные функции V, с помощью которых доказаны эти теоремы. Ввиду единого подхода к решению этой задачи приведем лишь оценки для скалярных параметров h и f (теоремы 2 и 5).

Обратимся сначала к теореме 2 и найдем оценку снизу для h, больше которой равновесие (1.2) системы (1.1) асимптотически устойчиво. Обозначим через g_0, k_1, k_0 соответственно наименьшие собственные значения матриц G^TG и K, а также наименьшее по модулю собственное значение K. Функция (1.3) удовлетворяет неравенствам

$$2V\geqslant 2x^{\cdot T}(G^TG+h^{-2}K)x^{\cdot}+ax^Tx-4h^{-1}x^TCx^{\cdot}=2x^{\cdot T}[G^TG+h^{-2}(K-2a^{-1}C^TC)]x^{\cdot}+$$
$$+y^Ty\geqslant 2[g_0+h^{-2}(k_1-2a^{-1}c_1)]x^{\cdot T}x^{\cdot}+y^Ty \quad (2.1)$$

В (2.1) введено обозначение

$$y=a^{1/2}x-2h^{-1}a^{-1/2}Cx^{\cdot}, \quad a=g_0+2h^{-2}k_0^2$$

а через c_1 обозначено наибольшее собственное значение матрицы C^TC. Функция V будет определенно-положительной при выполнении неравенства

$$\varphi_1(h)=g_0^2h^4+(2k_0^2g_0+g_0k_1-2c_1)h^2+2k_1k_0^2>0 \tag{2.2}$$

Если неравенство (2.2) выполняется при любом $h>0$, то функция (1.3) определенно-положительна. В противном случае, она определенно-положительна при $h>h_1$, где h_1 — наибольший положительный корень уравнения $\varphi_1(h)=0$. Квадратичная часть $V^\cdot$, имеющая вид (1.4), удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}
-V_2^\cdot \geqslant {}^1/_2h^{-1}\mu_0x^Tx-h^{-1}x^TC_0x^\cdot+x^{\cdot T}(A-h^{-1}Q+h^{-2}R)x^\cdot= \\
={}^1/_2h^{-1}(\mu_0^{1/2}x-\mu_0^{-1/2}C_0x^\cdot)^T(\mu_0^{1/2}x-\mu_0^{-1/2}C_0x^\cdot)+x^{\cdot T}[A-h^{-1}Q+h^{-2}R- \\
-{}^1/_2\mu_0^{-1}h^{-1}C_1^TC_1-\mu_0^{-1}h^{-2}(C_1^TFK-KFC_1)-2\mu_0^{-1}h^{-3}KF^TFK]x^\cdot \geqslant \\
\geqslant {}^1/_2h^{-1}(\mu_0^{1/2}x-\mu_0^{-1/2}C_0x^\cdot)^T(\mu_0^{1/2}x-\mu_0^{-1/2}C_0x^\cdot)+ \\
+[b_0-h^{-1}(\mu_1+{}^1/_2\mu_0^{-1}c_2)+h^{-2}k_2-2\mu_0^{-1}h^{-3}f_1]x^{\cdot T}x^\cdot,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$C_0=C_1+2h^{-1}FK,\quad C_1=GB+2FGB-2KGB$$

Здесь μ_0, b_0, k_2 — соответственно наименьшие собственные значения матриц P, A, $R+\mu_0^{-1}(KFC_1-C_1^TFK)$; μ_1, c_2, f_1 — соответственно наибольшие собственные значения матриц Q, $C_1^TC_1$, KF^TFK.

Из неравенств (2.3) следует, что функция (1.4) будет определенно-отрицательной при выполнении неравенства

$$\varphi_2(h)=2b_0\mu_0h^3-(c_2+2\mu_0\mu_1)h^2+2\mu_0k_2h-4f_1>0$$

Введем $h_0=\max(h_1, h_2)$, h_2 — наибольший положительный корень уравнения, $\varphi_2(h)=0$. Тогда равновесие (1.2) системы (1.1) при $h>h_0$ асимптотически устойчиво.

Если $K=0$, то $h_1=(2c_1)^{1/2}g_0^{-1}$, $h_2=(c_2+2\mu_0\mu_1)/(2b_0\mu_0)$.

Производная $V^\cdot$, определяемая формулой (1.10), удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned}
V^\cdot=(x^\cdot-{}^1/_2C_2^Tx)^T(x^\cdot-{}^1/_2C_2x)+x^T[fF^TF-K-{}^1/_2FK+{}^1/_2KF-{}^1/_4C_2C_2^T]x+ \\
+x^T(E+F)X\geqslant(x^\cdot-{}^1/_2C_2^Tx)^T(x^\cdot-{}^1/_2C_2^Tx)+ \\
+(f_0f-d_1-{}^1/_4d_0)x^Tx+x^T(E+F)X,\quad C_2=G+FB+FG
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь f_0 — наименьшее собственное значение матрицы F^TF, d_0 и d_1 — соответственно наибольшие собственные значения матриц $C_2C_2^T$ и $K+{}^1/_2(FK-KF)$.

Из неравенства (2.4) следует, что при $f>(d_0+4d_1)/(4f_0)$ функция $V^\cdot$ определенно-положительна.

3. *Пример.* Рассмотрим задачу об устойчивости силового гироскопического горизонта. Описание этой механической системы приведено в работе [13], где изучались прецессионные уравнения движения системы установленной на подвижном основании. Рассмотрим полные уравнения возмущенного движения системы на неподвижном основании. Эти уравнения можно привести к виду

$$x^{\cdot\cdot}+Bx^\cdot+hGx^\cdot+Fx=X(x, x^\cdot) \tag{3.1}$$

$$x=(\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$$

Здесь α, β — углы отклонения платформы от плоскости горизонта; γ, δ — углы прецессии каждой пары гироскопов, связанных между собой антипараллелограммами; h – кинетический момент гироскопа; B– матрица диссипативных сил, возникающих при учете трения в осях подвеса платформы и гироскопов. Управление платформой и гироскопами осуществляется с помощью двигателей и приводит к появлению неконсервативных позиционных сил, причем управление такое, что матрица Q является положительно определенной. На основании следствия из теоремы 2 равновесие (1.2) системы (3.1) асимптотически устойчиво при достаточно большом h.

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
2. *Метелицын И. И.* К вопросу о гироскопической стабилизации // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 1. С. 31–34.
3. *Ziegler H.* Linear Elastic Stability // ZAMP. 1953. Bd 4. H. 2. S. 89–121.
4. *Walker J. A.* On the stability of Linear Discrete dynamic Systems // Trans. ASME. Ser. E. Appl. Mech. 1970. V. 37. N 2. P. 271–275.
5. *Frik M.* Zur Stabilität nichtkonservativer Lineare Systeme // ZAMM. 1972. Bd 52. H. 4. S. 47–49.
6. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М.: Наука, 1974. 344 с.
7. *Лахаданов В. М.* О влиянии структуры сил на устойчивость движения // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 246–253.
8. *Müller P. C.* Stabilität und Matrizen. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 220 с.
9. *Кошляков В. Н.* К теории устойчивости неконсервативных систем // Навигация и управление. Киев: Ин-т мат-ки АН УССР, 1982. С. 3–10.
10. *Агафонов С. А.* К вопросу устойчивости неконсервативных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 47–51.
11. *Карапетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем // Вест. МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1975. № 4. С. 109–113.
12. *Гончаренко В. И.* О стабилизации движения неустойчивой механической линейной системы // Прикладная механика. 1990. Т. 26. № 4. С. 79–85.
13. *Ройтенберг Я. Н.* Гироскопы. М.: Наука, 1966. 399 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1991