

УДК 531.35

© 1992 г. А. Б. Найшуль

## О ПРОСТРАНСТВЕННОМ ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Показывается, что плоское движение материальной точки на активном участке траектории естественным образом обобщается на пространственное. Традиционной плоскости полета с расположенной на ней траекторией в пространственном случае соответствуют полученные ее изгибаниями множество поверхностей полета. Трехмерная система дифференциальных уравнений движения материальной точки расщепляется на двумерную систему, описывающую ее движение по поверхности полета, и систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую изгибание этой поверхности. Решение этой системы уравнений позволяет получить в аналитическом виде зависимость векторов скорости и координат на активном участке траектории от ее пространственного искривления. Полученные в работе результаты могут быть применены для аналитического исследования пространственного движения материальной точки, выбора пространственных траекторий и управления на активных участках пространственным движением центра масс. В некоторых случаях удастся получить в аналитическом виде решения связанных с пространственным движением материальной точки краевых и экстремальных задач.

**1. Базисный трехгранник и дифференциальные уравнения его вращения.** Рассмотрим пространственное движение материальной точки на активном участке траектории вокруг одного притягивающего центра. Физическим примером такого движения является выведение космического аппарата на орбиту искусственного спутника Земли и его маневры в околоземном пространстве при переходе на некомпланарные орбиты. Это пространственное движение описывается системой уравнений

$$dv/dt = -\mu r r^{-3} + u(t, v, r), \quad dr/dt = v \quad (1.1)$$

Здесь  $v$  — вектор скорости,  $r$  — координат,  $t$  — время,  $\mu$  — гравитационный коэффициент,  $u(t, r, v)$  — вектор нецентрального ускорения, зависящий в общем случае от реактивных, аэродинамических сил, нецентральности гравитационного поля и других влияющих на движение факторов.

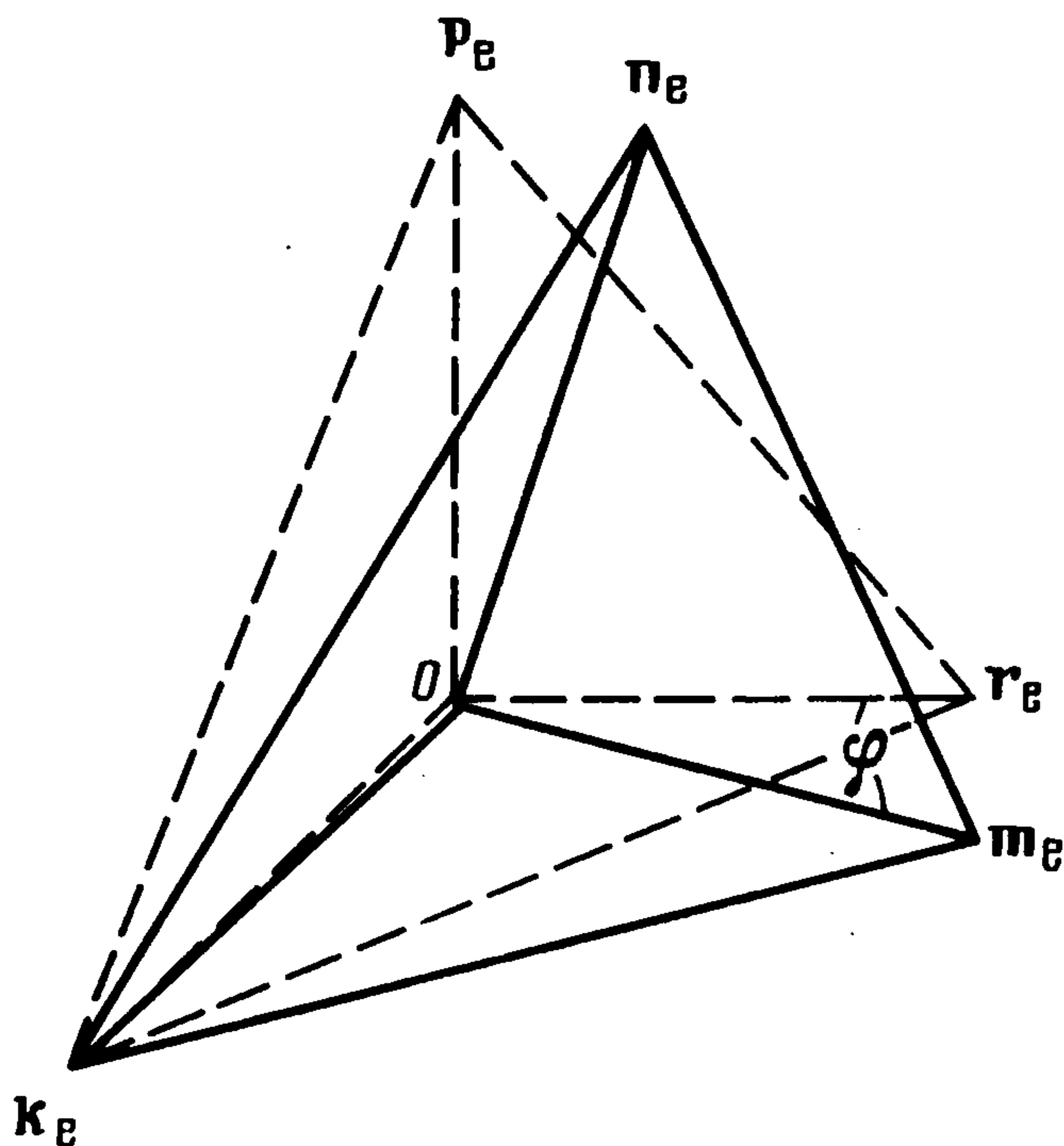
Будем полагать, что в начальный момент  $t_0$  имеем  $v(t_0) = v_0$ ,  $r(t_0) = r_0$ . Движение материальной точки будет происходить в неподвижной плоскости полета, проходящей через эти векторы, если вектор нецентрального ускорения лежит в ней. Зададим в плоскости полета из центра масс произвольно направленную пару единичных векторов  $m_e$  и  $n_e$ . Третий единичный вектор  $k_e$  из центра масс направим ортогонально плоскости полета по направлению вектора кинетического момента. Трехгранник векторов  $m_e$ ,  $n_e$ ,  $k_e$  будем в дальнейшем называть базисным. При плоском движении материальной точки положение базисного трехгранника, а следовательно векторов  $m_e$ ,  $n_e$ ,  $k_e$ , неизменно.

Положение материальной точки на траектории зададим угловой дальностью  $\varphi$ , отсчитываемой в плоскости полета от вектора  $m_e$  против часо-

вой стрелки (фигура). Тогда единичный вектор координат  $\mathbf{r}_e$  и единичный вектор, направленный по трансверсали  $\mathbf{p}_e$  таковы:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{m}_e \cos \varphi + \mathbf{n}_e \sin \varphi, \quad \mathbf{p}_e = -\mathbf{m}_e \sin \varphi + \mathbf{n}_e \cos \varphi \quad (1.2)$$

Трехгранник векторов  $\mathbf{r}_e, \mathbf{p}_e, \mathbf{k}_e$  будем называть сопровождающим. Если проекция вектора нецентрального ускорения на единичный вектор кинетического момента  $u_k = (\mathbf{u}, \mathbf{k}_e)$  не равна тождественно нулю, то движение материальной точки будет не плоским, а пространственным. Мгновенная плоскость полета и базисный трехгранник  $\mathbf{m}_e, \mathbf{n}_e, \mathbf{k}_e$  будут вращаться. Сопровождающий трехгранник  $\mathbf{r}_e, \mathbf{p}_e, \mathbf{k}_e$  также будет вращаться относительно не неподвижной, а подвижной оси. При этом пространственном движении базисного и сопровождающего трехгранников положение единичного радиус-вектора  $\mathbf{r}_e$  и вектора трансверсали  $\mathbf{p}_e$  будем задавать теми же формулами (1.2). Угол  $\varphi$ , который назовем пространственной угловой дальностью, так же как и при плоском движении, определим как интеграл от мгновенной угловой скорости вращения материальной точки по орбите



$$\varphi' = kr^{-2}, \quad \varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t_k} \varphi'(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

где  $k$  — модуль кинетического момента, а  $r$  — модуль вектора координат. Пространственную угловую дальность  $\varphi$  будем отсчитывать в мгновенной плоскости полета от вектора  $\mathbf{m}_e$  против часовой стрелки. При таких предположениях пространственное вращение базисного трехгранника  $\mathbf{m}_e, \mathbf{n}_e, \mathbf{k}_e$  описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\mathbf{m}_e/dt &= \psi' \mathbf{r}_e \times \mathbf{m}_e, & d\mathbf{n}_e/dt &= \psi' \mathbf{r}_e \times \mathbf{n}_e \\ d\mathbf{k}_e/dt &= \psi' \mathbf{r}_e \times \mathbf{k}_e \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\psi' = u_k r k^{-1} = u_q \operatorname{tg} \gamma r k^{-1} \quad (1.5)$$

где  $u_q$  проекция нецентрального ускорения на мгновенную плоскость полета, а  $\gamma$  — угол его наклона к этой плоскости. Начальные условия для интегрирования системы уравнений (1.4) при пространственном движении остаются теми же, что и при плоском.

Докажем, что трехгранник базисных векторов  $\mathbf{m}_e, \mathbf{n}_e, \mathbf{k}_e$  действительно вращается в соответствии с уравнениями (1.4). Из кинематического уравнения  $d(r\mathbf{r}_e)/dt = \mathbf{v}$ , уравнения кинетического момента  $d(k\mathbf{k}_e)/dt = r\mathbf{r}_e \times \mathbf{u}$  и соотношения ортогональности  $\mathbf{k}_e \times \mathbf{r}_e = \mathbf{p}_e$  определим систему дифференциальных уравнений вращения сопровождающего трехгранника

$$\begin{aligned} dr_e/dt &= \varphi' p_e, & dp_e/dt &= -\varphi' r_e + \psi' k_e \\ dk_e/dt &= -\psi' p_e \end{aligned} \quad (1.6)$$

Дифференцируя равенства (1.2) и используя соотношения (1.5), (1.6), (1.3), получим уравнения вращения базисного трехгранника (1.4), из которых следует, что базисный трехгранник  $m_e, n_e, k_e$  в течение полета вращается как твердое тело вокруг вектора  $r_e$  с мгновенной угловой скоростью  $\psi'$ . Так же как твердое тело, вращается сопровождающий трехгранник  $r_e, p_e, k_e$  с мгновенной угловой скоростью

$$\chi' = \varphi' k_e + \psi' r_e \quad (1.7)$$

Полученные результаты справедливы, если в начале, в конце и во время движения материальной точки вектор кинетического момента не обращается в нуль. Если он обращается в нуль, то в этих точках невозможно определить единичный вектор кинетического момента  $k_e$ , а угловая скорость вращения базисного трехгранника  $\psi'$ , как следует из формулы (1.5), стремится к бесконечности. Этого можно избежать, если рассматривать траектории, на которых вектор кинетического момента  $k$  не обращается в нуль. Однако тогда пришлось бы отказаться от использования результатов работы для такого важного случая, как старт космического аппарата с поверхности планеты. Поэтому предлагается подход, позволяющий устранить указанную особенность. Он основан на использовании дифференцируемости единичного вектора кинетического момента  $k_e$  и ограниченности угловой скорости вращения базисного трехгранника  $\psi'$  в окрестности точки, где  $k=0$ .

Рассмотрим три случая старта космического аппарата с поверхности планеты. В первом из них движение аппарата происходит вертикально по радиус-вектору  $v \parallel r_e, u \parallel r_e$ . Во втором случае в течение времени  $t$  космический аппарат поднимается вертикально, а затем следует мгновенный разворот по тангажу вектора реактивного ускорения. Поэтому в момент  $t=0$  имеем  $v \parallel r_e, u \parallel r_e, t+0 v \parallel r_e, u \parallel r_e$ . В третьем случае в момент  $t+0 v \parallel r_e, u \parallel r_e$ , а вектор угловой скорости вращения реактивного ускорения изменяется скачком от нуля до  $\omega \parallel r_e$ .

Во всех трех случаях вектор  $m_e$  базисного трехгранника направим по единичному радиус-вектору  $r_e$ . В первом случае направление вектора  $k_e$  можно выбрать произвольным в плоскости, ортогональной вектору  $r_e$ , а угловую скорость вращения базисного трехгранника следует положить тождественно равной нулю. Можно показать, что во втором и третьем случаях в момент  $t+0$

$$\begin{aligned} k_e &= (r_e \times u_e) (1 - (r_e, u_e)^2)^{-1/2} \\ k_e &= (r_e \times (\omega \times r_e)) ((\omega, \omega) - (\omega, r_e)^2)^{-1/2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Наклон вектора реактивного ускорения к мгновенной плоскости полета будем выбирать в соответствии с формулой (1.5). Так как скорость вращения базисного трехгранника  $\psi'$  ограничена, то в момент  $t+0$  угол  $\gamma=0$  и, следовательно, вектор реактивного ускорения лежит в мгновенной плоскости полета. Если вектор кинетического момента  $k$  обращается

в нуль во внутренней точке траектории, то, применяя те же формулы (1.8), определим в момент  $t+0$  единичный вектор кинетического момента  $k$ .

**2. Пространственное движение материальной точки по поверхности полета.** Порождающие и порождаемые траектории. Движение материальной точки в центральном поле при отсутствии возмущений может быть представлено скоростями и координатами в неподвижной плоскости полета и вектором  $k_e$ , характеризующим положение этой плоскости. Таким же образом расслаивается движение в случае, когда имеется нецентрального ускорения, но оно лежит в плоскости полета. Покажем, что такое расщепление имеет место и при пространственной ориентации нецентрального ускорения.

Представим векторы скорости, координат и нецентрального ускорения в виде разложений по базисным векторам  $m_e, n_e, k_e$

$$v = v_m m_e + v_n n_e, \quad r = r_m m_e + r_n n_e \quad (2.1)$$

$$u = u_m m_e + u_n n_e + u_k k_e \quad (2.2)$$

Любое пространственное движение материальной точки вокруг одного притягивающего центра описывается двумерной системой уравнений

$$\begin{aligned} dv_m/dt &= -\mu r_m (r_m^2 + r_n^2)^{-3/2} + u_m \\ dv_n/dt &= -\mu r_n (r_m^2 + r_n^2)^{-3/2} + u_n \\ dr_m/dt &= v_m, \quad dr_n/dt = v_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$v_{m0} = (v_0, m_{e0}), \quad v_{n0} = (v_0, n_{e0})$$

$$r_{m0} = (r_0, m_{e0}), \quad r_{n0} = (r_0, n_{e0})$$

уравнениями вращения базисного трехгранника (1.4) и соотношениями (2.1). Доказательство получим, подставив соотношения (2.1) в (1.1) при использовании уравнений вращения базисного трехгранника (1.4).

В общем случае, когда кинетическая проекция нецентрального ускорения  $u_k(t) \neq 0$ , уравнения (2.3) описывают движение материальной точки по некоторой поверхности полета.

Введем понятия о порождающих и порождаемых траекториях. Предположим, что движение материальной точки в центральном поле происходит под действием реактивного ускорения, заданного функциями времени полета

$$u_m = w_m^{\cdot}(t), \quad u_n = w_n^{\cdot}(t), \quad u_k = w_k^{\cdot}(t)$$

Траекторию, которую получим, интегрируя уравнения движения материальной точки (1.1) в предположении равенства кинетической проекции реактивного ускорения  $w_k^{\cdot}(t) \equiv 0$ , назовем порождающей. Траекторию, которую получим, интегрируя ту же систему дифференциальных уравнений при тех же начальных условиях в предположении, что кинетическая проекция реактивного ускорения  $w_k^{\cdot}(t) \neq 0$ , назовем порождаемой. Например, плоская траектория выведения на орбиту искусственного спутника Земли при азимуте прицеливания в точке старта  $90^\circ$  — порождающая. Прост-

ранственные траектории выведения искусственных спутников Земли на орбиты с другими наклонениями при том же старте и азимуте прицеливания — порождаемые. Очевидно, что на порождающей траектории базисный трехгранник неподвижен, а на порождаемой вращается в соответствии с уравнениями (1.4).

Порождающую траекторию  $v_m(t)$ ,  $v_n(t)$ ,  $r_m(t)$ ,  $r_n(t)$  получим, интегрируя двумерную систему уравнений движения (2.3), не зависящую от кинетической проекции нецентрального ускорения. Знание кинетической проекции нецентрального ускорения  $w_k(t)$ , скоростей и координат на порождающей траектории  $v_m$ ,  $v_n$ ,  $r_m$ ,  $r_n$  позволяет, интегрируя уравнения базисного трехгранника (1.4), определить текущее положение векторов  $m_e(t)$ ,  $n_e(t)$ ,  $k_e(t)$ , а затем по формулам (2.1) — текущее значение векторов скорости и координат для любой порождаемой траектории.

Класс порождаемых траекторий, принадлежащих данной порождающей траектории, обладает весьма важными свойствами: в любой момент времени материальные точки, двигающиеся по всем порождаемым траекториям (разумеется, и по порождающей), находятся на одинаковом расстоянии от центра масс, одинаковы модуль и наклон к вертикали их векторов скорости. Утверждение это легко доказывается, если при помощи формул (2.1) сконструировать скалярные произведения векторов  $(v, v)$ ,  $(v, r)$ ,  $(r, r)$ . Из уравнений (1.3) следует, что для заданного момента времени пространственные угловые дальности  $\varphi$  для порождающей и всех порождаемых траекторий одинаковы.

Если известны на порождаемой траектории векторы скорости, координат  $v$ ,  $r$  и базисные векторы  $m_e$ ,  $n_e$ ,  $k_e$ , то из соотношений (2.1) можно определить, не интегрируя векторы скорости, координаты на порождающей траектории. Если известны базисные векторы  $m_e$  и  $n_e$  на двух порождаемых траекториях, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} v_2 &= m_{e2}(m_{e1}, v_1) + n_{e2}(n_{e1}, v_1) \\ r_2 &= m_{e2}(m_{e1}, r_1) + n_{e2}(n_{e1}, r_1) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Плоскость полета, в которой расположена порождающая траектория, назовем порождающей. Поверхность полета, в которой расположена порождаемая траектория, назовем порождаемой. Она является огибающей мгновенных плоскостей полета  $(k_e(t), r) = 0$ , является линейчатой при направляющей пространственной кривой  $r_e(t)$ :

$$r(t, r) = r r_e(t) \quad (2.5)$$

Так как касательные плоскости не изменяются при изменении  $r$ , то эта поверхность полета является развертывающейся, конической и она может быть развернута. Порождающая плоскость и является развернутой поверхностью полета, а двумерные уравнения (2.3) описывают движение материальной точки по этой развернутой поверхности. Пространственной угловой дальности на порождаемой траектории соответствует обычная угловая дальность на развернутой поверхности полета. Нанесем на листе бумаги координаты порождающей траектории и в определенном масшта-

бе векторы скорости. Сгибая эту бумагу по радиусам, получим все возможные порождаемые траектории и порождаемые поверхности полета.

Результаты, полученные для случая, когда движение материальной точки в центральном поле происходит под действием только реактивного ускорения, могут быть распространены на движение в нецентральной поле при наличии атмосферы и других возмущающих факторов. Однако, чтобы порождаемая траектория не зависела от них, потребуем такого регулирования вектора нецентрального ускорения, чтобы компоненты вектора нецентрального ускорения  $u_m(t)$ ,  $u_n(t)$  были заданными функциями времени полета.

Рассмотрим применение полученных результатов для выбора траекторий космических аппаратов на отличающиеся по наклонению орбиты искусственных спутников Земли. Обычно для каждого наклонения орбиты ИСЗ выбирается проходящая через точку старта плоскость прицеливания, а в ней программа разворота вектора реактивного ускорения по тангажу. Если воспользоваться результатами разд. 1, 2, то для некоторого диапазона орбит ИСЗ следует выбрать единую порождающую траекторию  $v_m(t)$ ,  $v_n(t)$ ,  $r_m(t)$ ,  $r_n(t)$ . Ее зададим программой тангажа  $\vartheta$  и проекцией вектора реактивного ускорения на мгновенную плоскость полета  $w_q^*(t)$ . Угол наклона вектора реактивного ускорения к мгновенной плоскости полета  $\gamma$  должен выбираться в зависимости от требуемого наклонения орбиты ИСЗ.

Для порождаемых траекторий потребуется увеличение реактивного ускорения и затрачиваемой характеристической скорости в соответствии с соотношением

$$w_2^* = w_1^* / \cos \gamma, \quad w_2 = \int_{t_0}^{t_k} w_1^*(\tau) / \cos \gamma(\tau) d\tau$$

При малых углах  $\gamma$ , как следует из этих формул, затраты эти невелики.

**3. Расщепление общей задачи пространственного движения материальной точки на независимые задачи определения жесткой поверхности полета и движения материальной точки по ней.** Примем за переменную интегрирования пространственную угловую дальность  $\varphi$ . Двумерные уравнения движения материальной точки по порождающей траектории, уравнения вращения базисного и сопровождающего трехгранников в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} dv_m/d\varphi &= -\mu k^{-1} \cos \varphi + r^2 k^{-1} u_m, \\ dv_n/d\varphi &= -\mu k^{-1} \sin \varphi + r^2 k^{-1} u_n \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$dr/d\varphi = (v_m \cos \varphi + v_n \sin \varphi) r^2 k^{-1}, \quad dt/d\varphi = r^2 k^{-1}$$

$$\begin{aligned} dm_e/d\varphi &= \psi^* r_e \times m_e, \quad dn_e/d\varphi = \psi^* r_e \times n_e \\ dk_e/d\varphi &= \psi^* r_e \times k_e \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} dr_e/d\varphi &= p_e, \quad dp_e/d\varphi = -r_e + \psi^* k_e \\ dk_e/d\varphi &= -\psi^* p_e. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь

$$\psi' = \psi'/\varphi' = u_n r^3 k^{-2} = u_n \operatorname{tg} \gamma r^3 k^{-2} \quad (3.4)$$

— относительная угловая скорость вращения базисного трехгранника.

Решение уравнений (3.1)–(3.3) в виде функций пространственной угловой дальности  $\varphi$  будут обладать всеми свойствами, которые имели решения в виде функций времени. Таким же образом определяются порождающие и порождаемые траектории. Качественно новые свойства приобретают уравнения (3.2), (3.3), описывающие вращение базисного и сопровождающего трехгранников, если задается не кинетическая проекция нецентрального ускорения  $u_n$ , а относительная угловая скорость вращения базисного трехгранника в виде функции от пространственной угловой дальности  $\psi'(\varphi)$ . Кинетическая проекция нецентрального ускорения определяется из формулы (3.4) и поэтому

$$u_n = k^2 r^{-3} \psi'(\varphi) \quad (3.5)$$

Уравнения (3.2), (3.3), описывающие вращение базисного и сопровождающего трехгранников, в этом случае превращаются в линейные, зависящие только от относительной угловой скорости вращения базисного трехгранника  $\psi'(\varphi)$  и никак не зависящие от порождающей траектории. Их решение — единичные векторы базисного и сопровождающего трехгранников  $m_e$ ,  $n_e$ ,  $k_e$ ,  $r_e$ ,  $p_e$  зависят только от пространственной угловой дальности и относительной угловой скорости вращения базисного трехгранника  $\psi'(\varphi)$ .

Как было показано в разд. 2, в том случае, когда переменная интегрирования время  $t$ , разным порождающим траекториям соответствуют разные порождаемые поверхности полета. Если переменная интегрирования — пространственная угловая дальность и относительная скорость вращения базисного трехгранника только ее функция, то порождаемая коническая поверхность полета

$$r(r, \varphi) = r r_e(\varphi) \quad (3.6)$$

единая для всех порождаемых траекторий. Такую поверхность полета назовем жесткой.

Рассмотрим множество траекторий движения материальной точки: высоких, низких, имеющих большие или малые скорости полета, на которых действуют разные нецентральные ускорения. Если эти траектории в начальный момент находятся на одном и том же радиус-векторе, в одной и той же мгновенной плоскости и во время движения кинетическая проекция нецентрального ускорения выбирается из условия (3.5), то они все будут располагаться на одной и той же жесткой поверхности полета. Поэтому общая задача пространственного движения материальной точки под влиянием нецентрального ускорения распадается в этом случае на независимые задачи определения жесткой поверхности полета и определения движения материальной точки по ней.

Рассмотрим единичную сферу вокруг центра масс пересекающую жесткую коническую поверхность полета. Все материальные точки, траектории которых удовлетворяют указанным выше условиям, движутся по

одной и той же трассе, образуемой пересечением конической поверхности полета с этой сферой. Так же по одной и той же трассе будут перемещаться единичные векторы трансверсали и кинетического момента.

В разд. 1, 3 было показано, какие результаты можно получить, используя базисные и сопровождающие трехгранники. Но для их определения требовалось интегрирование дифференциальных уравнений их вращения. Однако эти трехгранники можно получить, используя результаты интегрирования обычной трехмерной системы уравнений движения материальной точки (1.1) и дифференциального уравнения пространственной угловой дальности (1.3). Предположим, что в результате интегрирования этих уравнений определены векторы скорости, координат  $v$ ,  $r$  и пространственная угловая дальность  $\varphi$ . Зная эти величины, определим векторы сопровождающего трехгранника  $e$ ,  $p_e$ ,  $k_e$ , а затем из формул (2.1) векторы базисного трехгранника  $m_e$  и  $n_e$ . Определенные таким способом базисные и сопровождающие трехгранники могут быть использованы для выбора пространственных траекторий и построения системы управления движением центра масс.

Приведем пример такого построения. Будем полагать, что задана относительная угловая скорость вращения базисного трехгранника  $\psi'(\varphi)$ . Интегрируя уравнения (1.1), (1.3), определим для каждого момента времени  $v(t)$ ,  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$ . Знание величины  $\varphi$  позволяет для этого же момента определить  $\psi'(\varphi)$ . Используя формулы (3.4), определим угол  $\chi$  и тем самым необходимое для заданной пространственной перероентации траектории направление вектора нецентрального ускорения.

4. Аналитическое определение пространственной траектории. Аналитическое решение краевой и экстремальной задач. В случае, когда относительная скорость вращения базисного трехгранника  $\psi'(\varphi) = \text{const}$ , система дифференциальных уравнений (3.3), описывающая вращение сопровождающего трехгранника, превращается в линейную с постоянными коэффициентами и поэтому имеет аналитическое решение. Введем прямоугольную систему координат  $X, Y, Z$ , в начальный момент совпадающую с векторами  $e$ ,  $p_e$ ,  $k_e$ . В этой системе координат решение системы дифференциальных уравнений (3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 + \cos 2\alpha \\ 0 \\ \sin 2\alpha \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 - \cos 2\alpha \\ 0 \\ -\sin 2\alpha \end{vmatrix} \cos \chi + \begin{vmatrix} 0 \\ \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \sin \chi \\ p_e &= \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{vmatrix} \sin \chi + \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cos \chi \\ k_e &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sin 2\alpha \\ 0 \\ 1 - \cos 2\alpha \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\sin 2\alpha \\ 0 \\ 1 + \cos 2\alpha \end{vmatrix} \cos \chi + \begin{vmatrix} 0 \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} \sin \chi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь

$$\text{ctg } \alpha = \psi', \quad \varphi = \chi \sin \alpha \quad (4.2)$$

Из этих формул следует, что жесткая поверхность полета является круговым конусом с углом раствора  $\alpha$  и осью  $(\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$ , лежащей

в начальной плоскости  $\mathbf{r}_{e0}, \mathbf{k}_{e0}$ . Сопровождающий трехгранник вращается с постоянной скоростью вокруг этой оси.  $\chi$  — угол его поворота. Векторы  $\mathbf{r}_e, \mathbf{p}_e, \mathbf{k}_e$  сопровождающего трехгранника описывают круги на единичной сфере с углами  $\pi/2 - \alpha, 0, \alpha$  над плоскостью экватора.

Порождающая траектория как функция пространственной угловой дальности может быть задана не в прямоугольных координатах, а расстоянием до центра масс  $r(\varphi)$ , радиальными и тангенциальными компонентами вектора скорости  $v_r(\varphi), v_p(\varphi)$ , временем полета. В этом случае имеют место соотношения

$$\mathbf{r} = r(\varphi) \mathbf{r}_e(\varphi), \quad \mathbf{v} = v_r(\varphi) \mathbf{r}_e(\varphi) + v_p(\varphi) \mathbf{p}_e(\varphi) \quad (4.3)$$

аналогичные формулам (2.1). Подставляя в (4.3) значения векторов  $\mathbf{r}_e, \mathbf{p}_e$ , из формул (4.1) получим в аналитическом виде компоненты векторов скорости и координат

$$\mathbf{r} = \frac{r(\varphi)}{2} \begin{vmatrix} 1 + \cos 2\alpha + (1 - \cos 2\alpha) \cos \chi \\ 2 \sin \alpha \sin \chi \\ \sin 2\alpha - \sin 2\alpha \cos \chi \end{vmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} ((1 - \cos 2\alpha) \cos \chi + 1 + \cos 2\alpha) v_r - 2 \sin \alpha \sin \chi v_p \\ 2 \sin \alpha \sin \chi v_r + 2 \cos \chi v_p \\ (-\sin 2\alpha \cos \chi + \sin 2\alpha) v_r + 2 \cos \alpha \sin \chi v_p \end{vmatrix}$$

Покажем, что развитые методы позволяют в аналитическом виде получить решение пространственной краевой задачи. Предположим, что краевая задача заключается в повороте плоскости орбиты на заданный угол  $\beta$ . В этом случае должно выполняться условие

$$(\mathbf{k}_{e0}, \mathbf{k}_e) = \cos \beta$$

Подставляя вектор  $\mathbf{k}_e$  из (4.1) в эту формулу и проведя необходимые преобразования, получим уравнение

$$\cos \alpha \sin \chi/2 = \sin \beta/2$$

Задавая угол  $\alpha$  из формул (4.2), определим относительную угловую скорость вращения базисного трехгранника  $\dot{\psi}$  и значение угловой дальности  $\varphi$ , после которой величину  $\dot{\psi}$  следует принять равной нулю. Аналитическое решение краевой задачи никак не зависит от порождающей траектории. Поэтому при выбранных параметрах  $\dot{\psi}, \varphi$  на любой пространственной траектории мгновенная плоскость полета развернется на заданный угол  $\beta$ , если кинетическая проекция нецентрального ускорения  $u_{\perp}$  будет задаваться в соответствии с формулой (3.5).

Покажем, что развитые в работе методы позволяют в некоторых случаях в аналитическом виде получить решение экстремальной задачи. Будем предполагать активный участок достаточно коротким. Тогда, если за время полета на нем единичный вектор  $\mathbf{r}_e$  существенно не меняется, то, как следует из уравнений (1.4), угол поворота плоскости орбиты  $\beta$  приближенно равен углу поворота базисного трехгранника  $\psi$ . В экстремальной задаче потребуем минимума затрат характеристической скорости  $w$

при заданном развороте базисного трехгранника  $\psi$

$$w = \int_{t_0}^{t_k} ((w_q \dot{\phantom{q}})^2 + (w_k \dot{\phantom{k}})^2)^{1/2} d\tau$$

$$\psi = \int_{t_0}^{t_k} w_k \dot{\phantom{k}} r k^{-1} d\tau$$

Будем полагать заданной порождающую траекторию. Тогда, варьируя условный функционал  $w + \psi/\lambda$  по кинетической проекции реактивного ускорения  $w_k \dot{\phantom{k}}$ , после необходимых преобразований определим в аналитическом виде необходимый наклон реактивного ускорения к мгновенной плоскости полета

$$\operatorname{tg} \gamma = \lambda (v_p^2 - \lambda^2)^{-1/2} \quad (4.5)$$

Постоянная  $\lambda$  должна удовлетворять соотношению

$$\psi = \lambda \int_{t_0}^{t_k} v_p^{-1} (v_p^2 - \lambda^2)^{-1/2} w_q \dot{\phantom{q}} d\tau \quad (4.6)$$

В настоящее время при выведении ИСЗ изменение плоскости орбиты обычно проводится заданием на старте плоскости прицеливания, в которой при дальнейшем полете направление тяги реактивного двигателя разворачивается по тангажу. Простой квазиоптимальный метод задания направления тяги реактивного двигателя (4.5), (4.6) может несколько уменьшить затраты характеристической скорости при выведении ИСЗ на орбиту.

Москва

Поступила в редакцию  
24.IX.1990