Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 62-50

© 1992 г. А. Н. Красовский

УПРАВЛЕНИЕ В СМЕШАННЫХ СТРАТЕГИЯХ НА МИНИМАКС ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Задача об оптимальном управлении по принципу обратной связи при условии минимакса интегрального критерия качества [1–7] решается в классе смешанных стратегий. Дается эффективная процедура вычисления цены игры и построения оптимальных стратегий, базирующаяся на идее стохастического программного синтеза [1, 7]. Существенным является сведение многомерных вспомогательных задач к задаче максимума или минимума функций, размерность аргументов которых не превосходит размерности управляемой системы.

1. Постановка задачи. Рассматривается объект, описываемый дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot}=A(t)x+f(t, u, v), \quad t_0\leqslant t\leqslant \vartheta$$
$$x\in R^n, \quad u\in W_u\subset R^r, \quad v\in W_v\subset R^s \tag{1.1}$$

где W_u и W_v — компакты, матрица-функция $A(t)$ и вектор-функция $f(t, u, v)$ кусочно-непрерывны по t. На отрезке $[t_0, \vartheta]$ заданы моменты $t_*^{[i]}$, полунормы $\mu_*^{[i]}(x)$ $(i=1, \ldots, N_*)$, $t^{[N_*]}=\vartheta$ и полунорма-функция $\mu_*(t, x)$, кусочно-непрерывная по t. (Полагаем такие функции непрерывными справа.) Пусть заданы набор целых чисел $\nu^{[i]}=\nu[t_*^{[i]}]\in[1, n]$ и постоянные $(\nu^{[i]}\times n)$-матрицы $D_*^{[i]}$. Полунорма $\mu_*^{[i]}(x[t_*^{[i]}])$ определяется как некоторая норма $\mu_*^{[i]}(D_*^{[i]}x[t_*^{[i]}])$, $(i=1, \ldots, N_*)$. Аналогично $\mu_*(t, x)$ определяется как некоторая норма-функция $\mu(t, D_*(t)x)$, кусочно-непрерывная по t, где $D_*(t)$ — кусочно-постоянная матрица-функция $(\nu[t]\times n)$, $\nu[t]\in[1, n]$, $t_0\leqslant t\leqslant\vartheta$.

Рассматривается задача об управлениях u и v, которые соответственно минимизируют и максимизируют критерий качества

$$\gamma = \int\limits_{t_*}^{\vartheta}\mu(t, D_*(t)\,x[t])\,dt + \sum_{i=g_*}^{N_*}\mu^{[i]}(D_*^{[i]}x[t_*^{[i]}]), \quad t_*\in[t_0, \vartheta) \tag{1.2}$$

где t_* — момент начала процесса управления, $t_*^{[g_*]}$ — наименьший из моментов $t_*^{[i]}\geqslant t_*$. Задача решается в классе смешанных позиционных стратегий [7]

$$S^u=\{U_y(\cdot),\ p_y(\cdot);\ U_y^*(\cdot),\ p_y^*(\cdot);\ V_y^*(\cdot),\ q_y^*(\cdot)\} \tag{1.3}$$

$$S^v=\{V_z(\cdot),\ q_z(\cdot);\ U_z^*(\cdot),\ p_z^*(\cdot);\ V_z^*(\cdot),\ q_z^*(\cdot)\} \tag{1.4}$$

$$U(\cdot)=\{U(\varepsilon)=\{u^{[r]}\in W_u,\ r=1, \ldots, L_\varepsilon\},\ \varepsilon>0\}$$

$$V(\cdot)=\{V(\varepsilon)=\{v^{[s]}\in W_v,\ s=1, \ldots, M_\varepsilon\},\ \varepsilon>0\}$$

$$p_y(\cdot)=\left\{p_r=p_r(t,x,y,\varepsilon)\geqslant 0,\quad \sum_{r=1}^{L_\varepsilon}p_r=1\right\}$$

$$q_z(\cdot)=\left\{q_s=q_s(t,x,z,\varepsilon)\geqslant 0,\quad \sum_{s=1}^{M_\varepsilon}q_s=1\right\}$$

($\varepsilon>0$ — параметр точности [1]). При этом схема управления такова, что наряду с x-объектом (1.1) рассматривается y — модель-поводырь, включенная в орган управления R_u и модель-поводырь — z, включенная в орган управления R_v. Базой для построения движений $x[\cdot]$-объекта и $y[\cdot]$-модели является некоторое вероятностное пространство $\{\Omega_*, F_*, P_*\}$, которое строится на основе функций $p_y(\cdot)$, $q_z(\cdot)$ из (1.3) и свойств случайной помехи

$$v[\cdot]=\{v[t,\omega]\in W_v,\ t_*\leqslant t\leqslant\vartheta,\ \omega\in\Omega_*\}\tag{1.5}$$

Для исходной позиции $\{t_*, x_*, y_*\}$, при выбранных значении $\varepsilon>0$, разбиении $\Delta\{t_i\}=\{t_1=t_*,\ t_i<t_{i+1},\ t_{k+1}=\vartheta\}$ и некоторой помехе $v[\cdot]$ (1.5) стратегия S^u (1.3) порождает движения $x[\cdot]$ и $y[\cdot]$ как решения пошаговых дифференциальных уравнений

$$x^{\cdot}[t,\omega]=A(t)x[t,\omega]+f(t,u[t_i,\omega],v[t,\omega])$$

$$t_i<t<t_{i+1},\quad i=1,\ldots,k,\quad x[t_1,\omega]=x_*\tag{1.6}$$

$$y^{\cdot}[t,\omega]=A(t)y[t,\omega]+\sum_{r,s=1}^{L_\varepsilon, M_\varepsilon}f(t,u^{[r]},v^{[s]})\,p_r{}^*(t_i,x[t_i,\omega],\ \ y[t_i,\omega],\varepsilon)\times$$
$$\times\, q_s{}^*(t_i,x[t_i,\omega],\ \ y[t_i,\omega],\varepsilon)\tag{1.7}$$

В (1.6) $u[t_i,\omega]$ — реализация случайной величины $u[t_i,\cdot]$, удовлетворяющей условию

$$P(u[t_i,\omega]=u^{[r]}|x[t_i,\omega],y[t_i,\omega])=$$
$$=p_r(t_i,x[t_i,\omega],y[t_i,\omega],\varepsilon),\quad u^{[r]}\in U(\varepsilon)$$

где $P(\cdots|\cdots)$ — условная вероятность. Предполагается, что помеха стохастически независима от управления на каждом шаге, т. е.

$$P(v[t,\omega]\in C|x[t_i,\omega],\ y[t_i,\omega],u[t_i,\omega])=$$
$$=\mathrm{Idem}(u[t_i,\omega])\to))$$

Здесь и далее Idem в правой части равенства означает выражение, совпадающее с левой частью этого равенства при указанной в скобках замене символов.

Гарантированным результатом называется величина

$$\rho(S^u,t_*,x_*)=\lim_{\beta\to1}\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}\lim_{\xi\to0}\sup_{|x_*-y_*|\leqslant\xi}\lim_{\delta\to0}\sup_{\Delta_\delta}\sup_{v[\cdot]}(\min\alpha)\tag{1.8}$$

где значения α удовлетворяют условию

$$P(\gamma(x[\cdot])\leqslant\alpha)\geqslant\beta$$

Стратегия S_0^u — оптимальная, если

$$\rho(S^u, t_*, x_*) = \min_{S^u} \rho(S^u, t_*, x_*) = \rho_u^0(t_*, x_*) \tag{1.9}$$

для любой позиции $\{t_*, x_*\}$. Величина $\rho_u^\circ(\cdot)$ — оптимальный гарантированный результат. Аналогично определяется величина $\rho(S^v, t_*, x_*)$ и оптимальные S_0^v и $\rho_v^\circ(t_*, x_*)$:

$$\rho(S_0^v, t_*, x_*) = \max_{S^v} \rho(S^v, t_*, x_*) = \rho_v^\circ(t_*, x_*)$$

Критерий качества γ (1.2) — позиционный, справедливо утверждение. дифференциальная игра для объекта (1.1) при показателе качества (1.2) имеет цену $\rho^\circ(\cdot)=\rho_u^\circ(\cdot)=\rho_v^\circ(\cdot)$ и седловую точку $\{S_0^u, S_0^v\}$.

Оптимальные стратегии S_0^u (1.3), (1.9) и S_0^v (1.4), (1.10) строятся конструктивно по известной функции цены игры $\rho^\circ(t, x)$ методом экстремального сдвига на сопутствующие точки [6]. Содержанием работы является эффективная конструкция для цены игры и оптимальных стратегий, базирующаяся на идее стохастического программного синтеза [1, 7].

2. Стохастический программный максимин. Назначим разбиение $\Delta\{\tau_*^{[h]}\}$ отрезка $[t_0, \vartheta]$: $\tau_*^{[1]}=t_0$, $\tau_*^{[h+1]}>\tau_*^{[h]}$, $\tau_*^{[M]}=\vartheta$, включив в это разбиение и все точки t_j°, разделяющие интервалы постоянства матрицы $D_*(t)$ из (1.2). Положим

$$\mu(\tau_*^{[h]}, D(\tau^{[h-1]})x) = \int_{\tau_*^{[h-1]}}^{\tau_*^{[h]}} \mu(\tau, D_*(\tau)x)\,d\tau$$

Оставим только те значения $\tau_*^{[h]}$, для которых $\mu(\tau_*^{[h]}, D(\tau_*^{[h-1]})x)\neq 0$. Объединим моменты $t_*^{[i]}$, $\tau_*^{[h]}$ и перенумеруем заново в порядке возрастания, обозначив $t^{[i]}$, $i=1, \ldots, N$. Полагаем

$$\mu^{[i]}(D^{[i]}x) = \begin{cases} \mu(\tau_*^{[h]}, & D(\tau_*^{[h-1]})x), \quad t^{[i]} = \tau_*^{[h]} \\ \mu^{[j]}(D_*^{[j]}x), & t^{[i]} = t_*^{[j]} \end{cases}$$

При этом полагаем для упрощения записи, что объединяемые моменты различны. Иначе в следующих ниже конструкциях вносятся понятные изменения, связанные с двойным учетом μ в моменты $t^{[i]}=\tau_*^{[h]}=t_*^{[j]}$.

Рассмотрим w — модель, описываемую уравнением

$$w^\cdot = A(t)w + \sum_{r,\,s=1}^{L_\eta,\,M_\eta} f(t, u^{[r]}, v^{[s]})\,p_r q_s \tag{2.1}$$

где

$$p_r \geqslant 0, \sum_{r=1}^{L_\eta} p_r = 1, \quad q_s \geqslant 0, \sum_{s=1}^{M_\eta} q_s = 1 \tag{2.2}$$

$$u^{[r]}\in U_\eta=\{u^{[r]}\in W_u,\ r=1, \ldots, L_\eta\}$$

$$v^{[s]}\in V_\eta=\{v^{[s]}\in W_v,\ s=1, \ldots, M_\eta\}$$

Набор U_η таков, что для любого $u\in W_u$ найдется $u^{[r]}\in U_\eta$, $|u^{[r]}-u|\leqslant\eta$. Аналогично V_η такой набор, что для любого $v\in W_v$ существует $v^{[s]}\in V_\eta$, $|v^{[s]}-v|\leqslant\eta$. Пусть $\{\tau_*, w_*\}$ — исходная позиция для стохастической модели (2.1).

Назначим еще разбиение

$$\Delta=\Delta\{\tau_j\}=\{\tau_1=\tau_*,\ \tau_j<\tau_{j+1},\ \tau_{k+1}=\vartheta\} \tag{2.3}$$

такое, что и все моменты $t^{[i]}\geqslant\tau_*$ войдут в это разбиение. Пусть $t^{[g]}$ — наименьший из моментов $t^{[i]}\geqslant\tau_*$. Модель (2.1) опирается на вероятностное пространство [8] $\{\Omega, B, P\}$, элементарные события которого $\omega=\{\xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_k\}$, где $\xi_j\in[0, 1]$ — равномерно распределенные независимые случайные величины, связанные с τ_j. Здесь $\Omega=\{\omega\}$ — единичный куб в k-мерном пространстве, B — борелевская σ-алгебра для этого куба, $P=P(B_*)$ — лебегова мера, $B_*\in B$. Введем $\nu^{[i]}$-мерные векторные случайные величины $l^{(i)}(t^{[i]}, \omega)$, определенные на $\{\Omega, B, P\}$, где $\nu^{[i]}\in[1, n]$ определяется размерностью матрицы $D^{[i]}$, отвечающей моменту $t^{[i]}$ так, что $\nu^{[i]}$ есть число строк матрицы $D^{[i]}$. Объединение всех случайных величин $l^{(i)}(\cdot)$ составляет многомерную случайную величину $l(\cdot)$. Положим

$$\|l(\cdot)\| = \max_i \operatorname{vrai}\max_\omega \mu^{[i]*}(l^{(i)}(t^{[i]}, \omega))$$

где $\mu^{[i]*}(l)$ — норма, сопряженная с $\mu^{[i]}(l)$. Обозначим через $X(t, \tau)$ фундаментальную матрицу для $dx/dt=A(t)x$, $M\{\cdots\}$ и $M\{\cdots|\cdots\}$ — математическое и условное математическое ожидания, $\langle a\cdot b\rangle=a^\tau b$ — скалярное произведение векторов a и b. Здесь и далее вектор, обозначенный латинской буквой, будет означать вектор-столбец, верхний индекс τ — транспонирование, поэтому a^τ — вектор-строка.

Основной результат — следующая процедура и ее обоснование. Можно проверить, что

$$\rho^\circ(\tau_*, w_*) = \lim_{\eta\to 0,\ \delta\to 0} e(\tau_*, w_*, \Delta, \eta) \tag{2.4}$$

$$\delta = \max_{j,\ h}\,[(\tau_{j+1}-\tau_j),\quad (\tau_*^{[h+1]}-\tau_*^{[h]})]$$

Здесь η — число, определяющее наборы U_η и V_η векторов $u^{[r]}$ и $v^{[s]}$, достаточно плотно рассеянных в компактах W_u и W_v, $\rho^\circ(\cdot)$ — цена игры (1.9), (1.10). Величина $e(\cdot)$ определена равенством

$$\begin{aligned} e(\tau_*, w_*, \Delta, \eta) = \max_{\|l(\cdot)\|\leqslant 1}\Bigg[\sum_{i=g}^{N} M\,\{l^{(i)\,\tau}(t^{[i]}, \omega)\}\,D^{[i]}X\,(t^{[i]}, \tau_*)\,w_* +{} \\ + M\Bigg\{\sum_{j=1}^{k}\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \min_{u\in W_u}\max_{v\in W_v}\Bigg[M\Bigg\{\sum_{i=d(j)}^{N} l^{(i)\tau}(t^{[i]}, \omega)\,D^{[i]}X\,(t^{[i]}, \tau)\times \\ \times\sum_{r,\ s=1}^{L_\eta,\ M_\eta} f(\tau, u^{[r]}, v^{[s]})\,p_r q_s\,|\,\xi_1, \ldots, \xi_j\Bigg\}\Bigg]\,d\tau\Bigg\}\Bigg] \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $d(j)=\min(i)$ при условии $t^{[i]}\geqslant\tau_{j+1}$; $h=g$, если $\tau_*<t^{[g]}$, иначе $h=g+1$.

Обозначая

$$w^* = X(\vartheta, \tau_*) w_*, \quad f^*(\tau, u, v) = X(\vartheta, \tau) f(\tau, u, v)$$

$$m^{(i)} = X^{\tau}(t^{[i]}, \vartheta) M\{D^{[i]\tau} l^{(i)}\}, \quad \mu^{[i]*}(l^{(i)}) \leqslant 1$$

$$m_j^{(i)\tau} = M\{l^{(i)\tau}(t^{[i]}, \omega) D^{[i]} X(t^{[i]}, \vartheta) \mid \xi_1, \ldots, \xi_j\}$$

получаем

$$e(\tau_*, w_*, \Delta, \eta) = \max_{m^*} [m^{*T} w_* + \varkappa(\tau_*, m_*, \Delta, \eta)] \tag{2.6}$$

$$\varkappa(\tau_*, m_*, \Delta, \eta) = \max_{\|l(\cdot)\| \leqslant 1} M \left\{ \sum_{j=\iota}^{k} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \min_p \max_q \left(\sum_{i=d(j)}^{N} m^{(i)T} \right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{r,s=1}^{L_\eta, M_\eta} f^*(\tau, u^{[r]}, v^{[s]}) p_r q_s \right) d\tau \right\}, \quad m_* = \sum_{i=\iota}^{N} m^{(i)} \tag{2.7}$$

Здесь m_* — составляющая m^*; минимакс берется при условиях (2.2).

Для вычисления величины $\varkappa(\cdot)$ можно развить и обосновать процедуру [7] построения по индукции по j выпуклых сверху оболочек $\varphi_j^{(i)}(m)$ для некоторых функций $\psi_j(m)$ от подходящих условных математических ожиданий m. Полагаем

$$\varphi_{k+1}^{(N)}(m) = 0, \quad \Delta\psi_k(m) = I(\tau_k, \tau_{k+1}, m) =$$
$$= \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \min_p \max_q \left[m^T \sum_{r,s=1}^{L_\eta, M_\eta} f^*(\tau, u^{[r]}, v^{[s]}) p_r q_s \right] d\tau$$

$$\psi_k(m) = \Delta\psi_k(m)$$

Если полагать $m_N = D^{[N]\tau} l^{(N)}(t^{[N]}, \omega)$, то по формуле полного математического ожидания по условным математическим ожиданиям получается, что для каждого условного математического ожидания

$$m_k = M\{D^{[N]\tau} l^{(N)}(t^{[N]}, \omega) \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}\}$$

надлежит максимизировать величину $M\{\Delta\psi_k(m_N) \mid \xi_1, \ldots, \xi_{k-1}\}$. Эта максимальная величина определяется как значение выпуклой сверху оболочки $\varphi_k(m_k)$ функции $\psi_k(\cdot)$ в точке m_k для области $\mu^{[N]*}(m_k) \leqslant 1$. Поэтому полагаем $\varphi_k^{(N)}(m) = \psi_k^\circ(\cdot)$ при $m \in G_k$, где символ ψ° обозначает выпуклую сверху оболочку функции ψ в соответствующей области. Область

$$G_k = \{m : \mu^{[N]*}(m) \leqslant 1\}.$$

Пусть $\varphi_{j+1}^{(i+1)}(m)$ и G_{j+1} уже построены. При этом $i+1 > g$, $\tau_{j+1} < t^{[i+1]}$. Рассмотрим сначала случай $\tau_{j+1} > t^{[i]}$. Тогда полагаем $G_j = G_{j+1}$.

$$\Delta\psi_j(m) = I(\tau_j, \tau_{j+1}, m), \quad \psi_j(m) = \Delta\psi_j(m) +$$
$$+ \varphi_{j+1}^{(i+1)}(m), \quad \varphi_j^{(i+1)}(m) = \psi_j^\circ(\cdot), \quad m \in G_j$$

Рассмотрим случай $\tau_{j+1} = t^{[i]}$. Тогда $\psi_j(m^*) = \max_{m_*} [\Delta\psi_j(m^*) + \varphi_{j+1}^{(i+1)}(m_*)]$ при $m^* = m_* + m$, $m_* \in G_{j+1}$, $m = X^\tau(t^{[i]}, \vartheta) D^{[i]\tau} l$, $\mu^{[i]*}(l) \leqslant 1$.

Область G_j есть совокупность всех векторов такого вида. Тогда

$\varphi_j^{(i)}(m)=\psi_j^{\circ}(\cdot)$ при $m\in G_j$. Обоснование этого шага индукции аналогично случаю $j=k$ опирается на максимизацию соответствующего условного математического ожидания функции $\psi_j(\cdot)$. Данное построение продолжается до момента $\tau_i=\tau_*$. При этом возможны два случая.

В первом случае $\tau_*=t^{[g]}$. Тогда получаем область $G_1^{(g)}$ и функцию $\varphi_1^{(g)}(m)$ при $m\in G^{(g)}$, которая определяет величину $\varkappa(\cdot)$ (2.7) так, что

$$\varkappa(\tau_*,\ w_*,\ \Delta,\ \eta)=\varphi_1^{(g)}(m),\quad m\in G^{(g)} \tag{2.8}$$

Во втором случае $\tau_*=t^{[g]}$. Тогда получаем область $G_1^{(g+1)}$ и функцию $\varphi_1^{(g+1)}(m)$, такую, что

$$\varkappa(\tau_*,\ w_*,\ \Delta,\ \eta)=\varphi_1^{(g+1)}(m),\quad m\in G^{(g+1)} \tag{2.9}$$

В первом случае в (2.6) имеем $m^*=m_*\in G_1^{(g)}$. Во втором случае $m^*=$ $=m_*+m$, где $m_*\in G_1^{(g+1)}$, $m=X^{\tau}(\tau_*,\vartheta)D^{[g]\tau}l$, $\mu^{[g]*}(l)\leqslant 1$.

3. Построение оптимальных стратегий. Для построения стратегии S_0^u (1.9) надлежит определить функции

$$U_v^{\circ}(\cdot),\ U_v^*(\cdot),\ V_v^*(\cdot),\ p_v^{\circ}(\cdot),\ p_v^{*\circ}(\cdot)$$

и $q_v^{*\circ}(\cdot)$ из (1.3). Наборы $U_v^{\circ}(\varepsilon)$, $V_v^{*\circ}(\varepsilon)$ и функции $p_v^{\circ}(t,\ x,\ y,\ \varepsilon)$, $q_v^{*\circ}(t,\ x,\ y,\ \varepsilon)$ определяются из соответствующих условий ([7], с. 188), обеспечивающих необходимую близость движений (1.6) объекта и (1.7) модели-поводыря. А именно, наборы чисел

$$p_r^{\circ}=p_r^{\circ}(\tau_*,\ x_*,\ y_*,\ \varepsilon)\ \text{и}\ q_s^{*\circ}=q_s^{*\circ}(\tau_*,\ x_*,\ y_*,\ \varepsilon)$$

выбираются удовлетворяющими равенствам

$$\max_q \sum_{r,\,s=1}^{L_\eta,\,M_\eta} \langle (x_*-y_*)\cdot f(\tau_*,u^{[r]},v^{[s]})\,p_r^{\circ}q_s\rangle=\min_p \mathrm{Idem}\,(p^{\circ}\to p) \tag{3.1}$$

$$\min_p \sum_{r,\,s=1}^{L_\eta,\,M_\eta} \langle (x_*-y_*)\,f(\tau_*,u^{[r]},v^{[s]})\,p_r q_s^{*\circ}\rangle=\max_q \mathrm{Idem}\,(q^{*\circ}\to q) \tag{3.2}$$

при условиях (2.2) где $\eta=\eta(\varepsilon)$.

Полагаем $U_v^{\circ}(\varepsilon)=U_v^{*\circ}(\varepsilon)=U_{\eta(\varepsilon)}$, $V_v^{*\circ}(\varepsilon)=V_{\eta(\varepsilon)}$, где $U_{\eta(\varepsilon)}$ и $V_{\eta(\varepsilon)}$ — наборы векторов $\{u^{[r]}\}$ и $\{v^{[s]}\}$ из (2.1), (3.1), (3.2).

Осталось определить функцию

$$p_v^{*\circ}(\cdot)=\Big\{p^{*\circ}(t,x,y,\varepsilon)=\Big\{p_r^{*\circ}\geqslant 0,\ \sum_{r-1}^{L_\eta} p_r^{*\circ}=1\Big\}\Big\} \tag{3.3}$$

Опираясь на выражения (2.4)—(2.9), сконструируем функцию

$$\begin{gathered}\rho^{\varepsilon}(\tau_*,y_*)=\langle m^{*\circ}(\tau_*,y_*,\varepsilon)\,X(\vartheta,\tau_*)\,y_*\rangle+\\ +\varkappa(\tau_*,m_*^{\circ},\Delta,\eta(\varepsilon))-\beta(\varepsilon,\tau_*)\,(1+|X^T(\vartheta,\tau_*)\,m^{*\circ}(\tau_*,y_*,\varepsilon)|^2)^{1/2}=\\ =\max_{m^*}\mathrm{Idem}\,(m^{*\circ}(\tau_*,y_*,\varepsilon)\to m^*,m_*^{\circ}\to m_*)\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\beta^2(\varepsilon,\ \tau_*)=(\varepsilon+\varepsilon(\tau_*-t_0))\exp\{2\lambda(\tau_*-t_0)\}$$

$$\lambda=\max_{t_*\leqslant t\leqslant\vartheta}|A(t)|,\quad |A(t)|=\max_{|x|\leqslant 1}|A(t)x|$$

Максимум в (3.4) берется по векторам m^* из области G, определенной в конце разд. 2. Используя выпуклость функции $\varkappa(\tau_*, m, \Delta, \eta)$ по m, можно показать, что вектор $m^{*\circ}(\tau_*, y_*, \varepsilon)$ (3.4) – единственный.

Оптимальный набор $p_r^{*\circ}$ (3.3) определяется равенством

$$\max_q\left\langle X^T(\vartheta,\tau_*)m^{*\circ}(\tau_*,y_*,\varepsilon)\sum_{r,s=1}^{L_\eta, M_\eta}f(\tau_*,u^{[r]},v^{[s]})p_r^{*\circ}q_s\right\rangle=$$
$$=\min_p \operatorname{Idem}(p^{*\circ}\to p)\tag{3.5}$$

Это завершает построение стратегии S_0^u.

Оптимальная стратегия S_0^v (1.4), (1.10) строится аналогично при замене в (3.1), (3.2) y на z, взаимной замене p и q и замене в (3.4) знака минус на плюс. Оптимальный набор $q_s^{*\circ}=q_s^{*\circ}(\tau_*, x_*, z_*, \varepsilon)$ определяется равенством

$$\min_p\left\langle X^T(\vartheta,\tau_*)m_v^{*\circ}\sum_{r,s=1}^{L_\eta, M_\eta}f(\tau_*,u^{[r]},v^{[s]})p_rq_s^{*\circ}\right\rangle=\max_q \operatorname{Idem}(q^{*\circ}\to q)\tag{3.6}$$

где $m_v^{*\circ}$ – соответствующий максимизирующий вектор. В отличие от (3.4) функция $\rho_v^\circ(\tau_*, z_*)$ может оказаться невыпуклой, а вектор $m_v^{*\circ}$ – неединственным. Поэтому следует взять один из максимизирующих векторов $m_v^{*\circ}$.

4. Пример. Проиллюстрируем вычисления цены игры $\rho^\circ(t_*, x_*)$ (2.4) на примере, когда уравнение движения объекта (1.1) имеет вид

$$d^2h/dt^2=a(t)u+b(t)(u+v)^2+c(t)v=F(t,u,v)\tag{4.1}$$

где h – скаляр, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – кусочно-непрерывные функции, $u\in W_u=\{u: u^{[1]}=-1, u^{[2]}=1\}$, $v\in W_v=\{v: v^{[1]}=-1, v^{[2]}=1\}$.

Критерий качества γ (1.2) имеет вид

$$\gamma=|h[t^{[1]}]|+|h[\vartheta]|,\quad t^{[1]}\in[t_0,\vartheta)\tag{4.2}$$

Приведем уравнение (4.1) к нормальной системе

$$x^\cdot=Ax+f(t,u,v)\tag{4.3}$$

$$x=\begin{Vmatrix}x_1\\x_2\end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix}0&1\\0&0\end{Vmatrix}$$

$$f(t,u,v)=\begin{Vmatrix}0\\F(t,u,v)\end{Vmatrix}$$

Тогда в соответствии с (1.2) имеем

$$\gamma=|Dx[t^{[1]}]|+|Dx[t^{[2]}]|\tag{4.4}$$

$$D=\|1\ 0\|,\quad t^{[2]}=\vartheta.$$

Введем скалярные величины $l^{(i)}$, $i=1, 2$, $|l^{(i)}|\leqslant 1$, $p_r=P(u=u^{[r]})$, $r=1, 2$, $q_s=P(v=v^{[s]})$, $s=1, 2$; $P(\cdots)$ – вероятность. Введем векторы

$$m^{(i)}=X^T(\vartheta, t^{[i]})D^Tl^{(i)},\quad i=1, 2\tag{4.5}$$

где $X(t,\tau)=\begin{Vmatrix}1 & t-\tau\\ 0 & 1\end{Vmatrix}$ – фундаментальная матрица. Пусть $\{t_*, x_*\}$, $t_*<t^{[1]}$ – позиция объекта (4.3). Определим величину $\rho^\circ(t_*, x_*)$.
Полагаем

$$t_0=0,\quad \vartheta=4,\quad t^{[1]}=1,\quad b(t)\equiv{}^1/_2$$

$$a(t)=\begin{cases}4, & t_0\leqslant t<2\\ 0, & 2\leqslant t\leqslant\vartheta\end{cases},\quad c(t)=\begin{cases}0, & t_0\leqslant t<3\\ 2, & 3\leqslant t\leqslant\vartheta\end{cases}$$

Следуя построениям разд. 2, вычисляем функцию

$$\Delta\psi_k(m^{(2)})=I(\tau_k,\tau_{k+1},m^{(2)})=(\tau_{k+1}-\tau_k)\Big(\min_p\max_q m^{(2)\mathrm{T}}\times$$
$$\times\sum_{r,s=1}^{2}X(\vartheta,\tau_k)f(\tau_k,u^{[r]},v^{[s]})p_rq_s\Big)=(\tau_{k+1}-\tau_k)\,|l^{(2)}|\,\vartheta-\tau_k)\,\mathrm{extr}(\tau_k)\tag{4.6}$$

$$\mathrm{extr}(\tau_k)=\min_p\max_q\sum_{r,s=1}^{2}F(\tau_k,u^{[r]},v^{[s]})p_rq_s=2$$

при $p_1^\circ=1$, $p_2^\circ=0$, $q_1^\circ=0$, $q_2^\circ=1$. Тогда $\varphi_k(m^{(2)})=2(\tau_{k+1}-\tau_k)(\vartheta-\tau_k)$. Далее при $\tau_j\in[3,4]$ имеем $\mathrm{extr}(\tau_j)=2$, $p_1^\circ=1$, $p_2^\circ=0$, $q_1^\circ=0$, $q_2^\circ=1$. При $\tau_j\in[2,3)$ имеем $\mathrm{extr}(\tau_j)=1$, $p_1^\circ=p_2^\circ=q_1^\circ=q_2^\circ={}^1/_2$. Поэтому по индукции по j, двигаясь от $j=k$ к $j=d$, где τ_d – наименьший из моментов $\tau_j\geqslant2$, получаем

$$\varphi_d^{(2)}(m^{(2)})=\sum_{j=d}^{k}(\tau_{j+1}-\tau_j)(\vartheta-\tau_j)\,\mathrm{extr}(\tau_j)\tag{4.7}$$

При $\tau_j\in[1,2)$ имеем $\mathrm{extr}(\tau_j)=-2$, $p_1^\circ=1$, $p_2^\circ=0$, $q_1^\circ=1$, $q_2^\circ=0$. Поэтому, двигаясь по индукции по j от $j=d$ до $j=g$, где τ_g – наименьший из моментов $\tau_j\leqslant t^{[1]}=1$, получаем

$$\varphi_g^{(2)}(m^{(2)})=\varphi_d^{(2)}(m^{(2)})+\sum_{j=g}^{d-1}(\tau_{j+1}-\tau_j)\,|l^{(2)}|\,(\vartheta-\tau_j)(-2)\tag{4.8}$$

При $\tau_j<t^{[1]}$ имеем $\mathrm{extr}(\tau_j)=-2$, $p_1^\circ=q_1^\circ=1$, $p_2^\circ=q_2^\circ=0$. Двигаясь по индукции по j от $j=g$ до $j=1$, получаем, что величина $\varkappa(\cdot)$ из (2.6) определена равенством

$$\varkappa(t_*,m^{(1)}+m^{(2)})=\varphi_1(m^{(1)}+m^{(2)})=\sum_{j=1}^{g-1}(\tau_{j+1}-\tau_j)\,|l^{(1)}(t^{[1]}-\tau_j)+$$
$$+l^{(2)}(\vartheta-\tau_j)\,|\,\mathrm{extr}(\tau_j)+\varphi_g^{(2)}(m^{(2)})\tag{4.9}$$

а

$$\rho^\circ(t^*,x_*)=\max_{m^{(1)}+m^{(2)}}[(m^{(1)}+m^{(2)})^{\mathrm{T}}X(\vartheta,t_*)x_*+\varkappa(t_*,m^{(1)}+m^{(2)})],\quad (m^{(1)}+m^{(2)})\in G\tag{4.10}$$

$$G=\left\{m^{(1)}+m^{(2)}=\begin{Vmatrix}l^{(1)}\\ (t^{[1]}-\vartheta)l^{(1)}\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}l^{(2)}\\ 0\end{Vmatrix}:\ |l^{(i)}|\leqslant1,\ i=1,2\right\}$$

При $\{t_*, x_*\}$, $t_*>t^{[1]}$ имеем

$$\rho^\circ(t_*,x_*)=\max_{m^{(2)}}[m^{(2)\mathrm{T}}X(\vartheta,t_*)x_*+\varkappa(t_*,m^{(2)})]\tag{4.11}$$

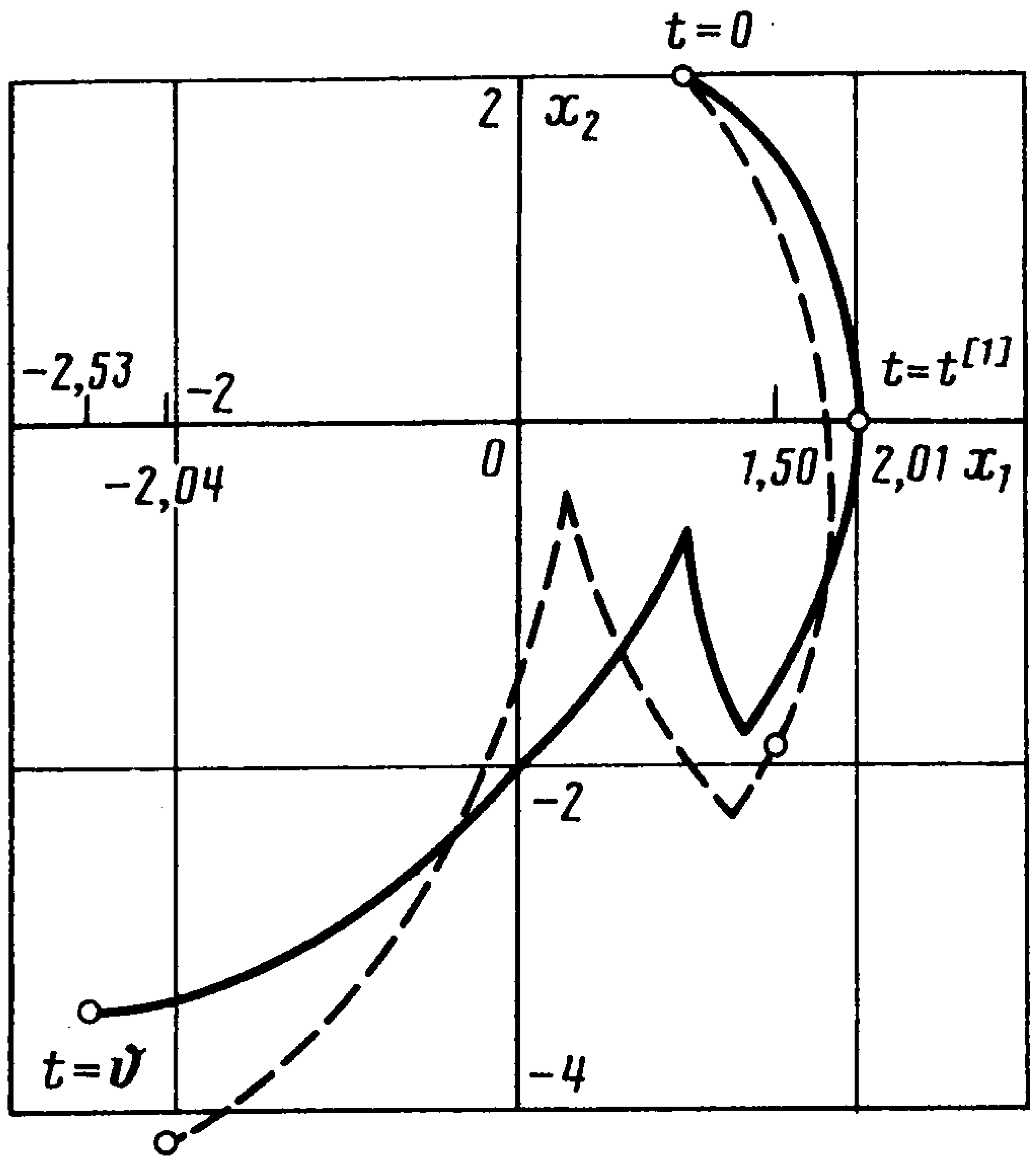
$$\varkappa(t_*, m^{(2)}) = \begin{cases} \varphi_g^{(2)}(m^{(2)}), & 1 < t_* < 2 \\ \varphi_d^{(2)}(m^{(2)}), & 2 \leqslant t_* < 3 \\ \sum\limits_{j=e}^{k} 2(\tau_{j+1} - \tau_j)(\vartheta - \tau_j), & 3 \leqslant t_* \leqslant 4 \end{cases}$$

где τ_e – наименьший из моментов $\tau_j \geqslant 3$.

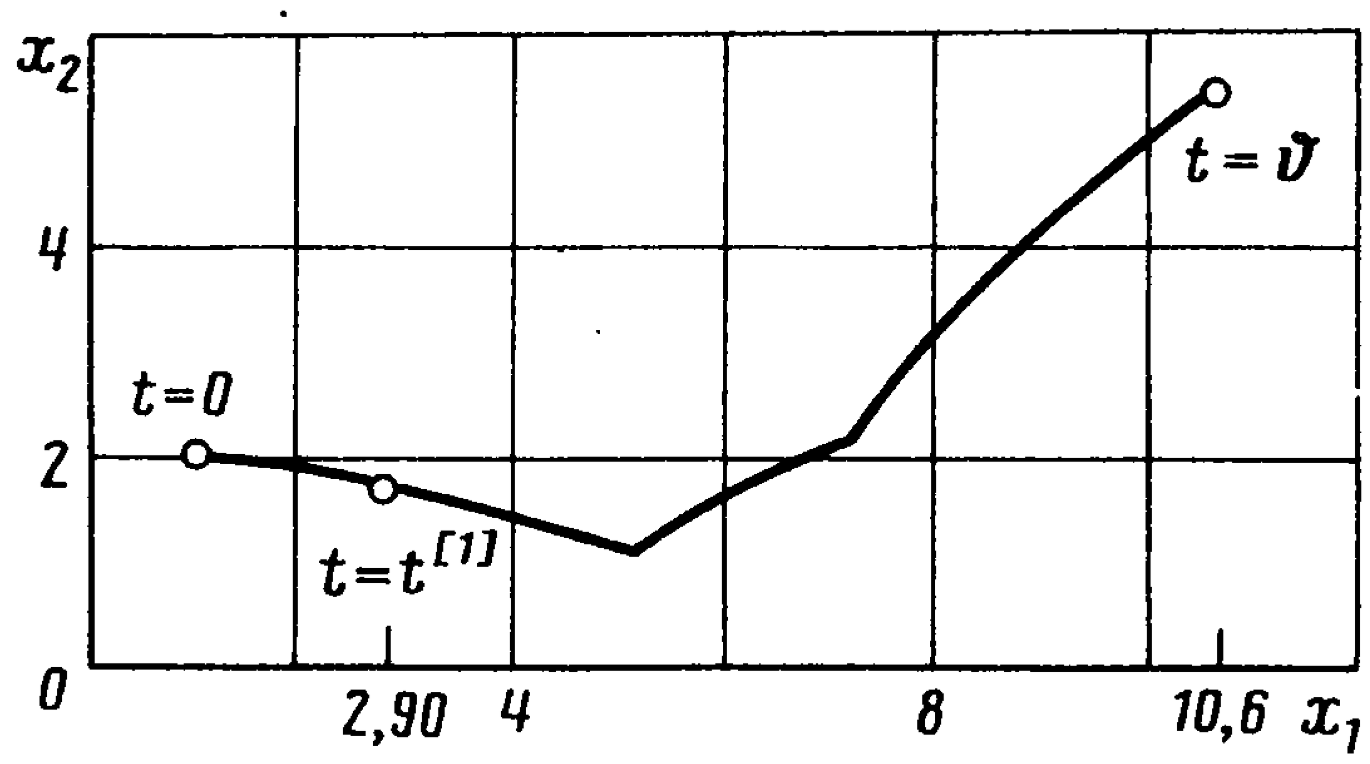
При $\{t_*, x_*\}$, $t_* = t^{[1]}$ имеем

$$\rho^\circ(t_*, x_*) = \max_{m^{(1)}+m^{(2)}} [(m^{(1)} + m^{(2)})^\tau X(\vartheta, t_*) x_* +$$
$$+ \varkappa(t_*, m^{(2)})], \quad \varkappa(t_*, m^{(2)}) = \varphi_g^{(2)}(m^{(2)}) \tag{4.12}$$

В данном примере в пределе при $\delta \to 0$ получаются явные выражения для величины $\varkappa(\cdot)$ в замкнутой форме в виде интегралов. Однако здесь приведены выраже-



Фиг. 1



Фиг. 2

ния в виде дискретных сумм, чтобы на простой конкретной модели наглядно проиллюстрировать общий метод.

По цене игры $\rho^\circ(t, x)$ (4.10)–(4.12) оптимальные стратегии $\{S_0^u, S_0^v\}$ конструируются описанным в разд. 3 способом.

Процесс управления для объекта (4.3) при показателе (4.4) был смоделирован на ЭВМ для исходных данных: $t_* = 0$, $x_* = \{1, 2\}$. На фиг. 1 сплошной линией изображено движение объекта (4.3) при $S_0^u = \{u^{[r]}, p_{yr}^\circ\}$, $S_0^v = \{v^{[s]}, q_{zs}^\circ\}$ (показатель качества γ (4.4) почти совпадает с ценой игры $\rho^\circ(t_*, x_*) = 4{,}5$), штриховой линией – движение объекта при S_0^u, $S^v = \{v^{[s]}, q_{zs} = {}^1/_2\} \neq S_0^v$ ($\gamma = 3{,}5 < \rho^\circ(t_*, x_*)$. На фиг. 2 показано движение объекта при $S^u = \{u^{[r]}, p_{y1} = 0{,}7, p_{y2} = 0{,}3\} \neq S_0^u$, $S_0^v (\gamma = 13{,}5 > \rho^\circ(t_*, x_*))$.

Автор благодарит Т. Н. Решетову за помощь в проведении численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 518 с.
2. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* О программном синтезе позиционного управления // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 6. С. 1309–1312.
3. *Куржанский А. Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

4. *Осипов Ю. С.* Позиционное управление в параболических системах // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 195–201.
5. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. *Красовский А. Н.* О позиционном минимаксном управлении // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 602–610.
7. *Красовский А. Н.* Построение смешанных стратегий на основе стохастических программ // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 2. С. 186–192.
8. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
8.VIII.1991