Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 2, 1992

УДК 62-50

© 1992 г. Ф. Л. Черноусько

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Рассматривается нелинейная управляемая динамическая система общего вида, описываемая уравнениями Лагранжа. На управляющие обобщенные силы наложены геометрические ограничения. Ставится задача построения управляющих сил, формируемых по принципу обратной связи и приводящих систему из произвольного начального состояния в заданное терминальное состояние за конечное время. При достаточно общих допущениях дано решение поставленной задачи в явном виде. При построении управления применяется декомпозиция системы на ряд более простых подсистем с одной степенью свободы каждая. Показано, в частности, что если на систему действуют только управляющие силы, то она может быть приведена за конечное время в любое заданное состояние, как бы малы ни были эти силы. Получены оценки сверху для времени процесса управления.

1. Постановка задачи. Рассматривается нелинейная динамическая система, описываемая уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i+F_i \tag{1.1}$$

Здесь и далее точкой обозначены производные по времени t, $q=(q_1, \ldots, q_n)$ — вектор обобщенных координат, T — кинетическая энергия системы, Q_i — неуправляемые обобщенные силы, F_i — управляющие обобщенные силы. Будем предполагать, что все рассматриваемые движения системы (1.1) происходят в некоторой области D в n-мерном пространстве R^n, так что всегда $q\in D$. Область D, в частности, может и совпадать с R^n. Выше и всюду далее индексы i, j, k принимают значения 1, 2, ..., n.

Сформулируем исходные допущения относительно кинетической энергии системы

$$T=\frac{1}{2}(A(q)q^{\cdot}, q^{\cdot})=\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(q)q_i^{\cdot}q_j^{\cdot} \tag{1.2}$$

и обобщенных сил. Здесь $A(q)$ — симметрическая положительно-определенная $(n\times n)$-матрица с элементами $a_{ij}(q)$, являющимися непрерывно дифференцируемыми функциями q при $q\in D$. Суммирование в (1.2) и всюду ниже проводится по индексам i, j, пробегающим значения от 1 до n. Предполагаем, что при любом $q\in D$ все собственные числа матрицы $A(q)$ лежат на отрезке $[m, M]$, где $M>m>0$. Таким образом, для любого n-мерного вектора z

$$m(z, z)\leqslant(A(q)z, z)\leqslant M(z, z),\quad 0<m<M,\quad \forall q\in D \tag{1.3}$$

Кроме того, полагаем, что

$$|\partial a_{ij}(q)/\partial q_k| \leqslant C, \quad \forall q \in D, \quad C = \text{const} > 0 \tag{1.4}$$

и, что неуправляемые обобщенные силы Q_i в (1.1) состоят из трех слагаемых, на которые наложены различные ограничения

$$Q_i = P_i + R_i + S_i \tag{1.5}$$

Здесь $P_i(q, q^{\cdot}, t)$ — силы, заданные в виде известных функций обобщенных координат и времени.

Через $R_i(q, q^{\cdot}, t)$ в (1.5) обозначены диссипативные силы. Точный вид функций $R_i(q, q^{\cdot}, t)$ может быть неизвестен. Требуется лишь, чтобы эти силы обладали свойством диссипативности, и чтобы они были достаточно малы при малых скоростях. Первое свойство означает, что мощность диссипативных сил неположительна, т. е.

$$\sum_i R_i q_i^{\cdot} \leqslant 0 \tag{1.6}$$

для всех $q \in D$, всех $q^{\cdot}$ и всех $t \geqslant t_0$, где t_0 — начальный момент времени. Второе свойство сформулируем следующим образом: существует такое достаточно малое число $\nu_0 > 0$, что если $|q_i^{\cdot}| \leqslant \nu \leqslant \nu_0$ для всех i, то

$$|R_i| \leqslant R_i^0(\nu) \tag{1.7}$$

Здесь $R_i^0(\nu)$ — некоторые монотонно возрастающие непрерывные функции, определенные на отрезке $\nu \in [0, \nu_0]$ и такие, что $R_i^0(0) = 0$.

Через $S_i(q, q^{\cdot}, t)$ в (1.5) обозначены неопределенные внешние возмущения, вид которых неизвестен, предполагается лишь их ограниченность

$$|S_i| \leqslant S_i^0 \tag{1.8}$$

при всех $q \in D$, всех $q^{\cdot}$ и $t \geqslant t_0$. Здесь $S_i^0 > 0$ — заданные постоянные.

Относительно управляющих сил F_i в (1.1) предположим, что они могут полностью компенсировать заданные внешние силы P_i, и, кроме того, остаются еще возможности выбирать управление в некоторой области. Таким образом, силы F_i представляются в виде

$$F_i = -P_i(q, q^{\cdot}, t) + G_i \tag{1.9}$$

Вектор $G = (G_1, \ldots, G_n)$ может выбираться из некоторого множества W, зависящего, вообще говоря, от $q, q^{\cdot}, t$, т. е.

$$G \in W(q, q^{\cdot}, t) \subset R^n \tag{1.10}$$

Предполагаем, что множество W при всех $q \in D$, всех $q^{\cdot}$ и всех $t \geqslant t_0$ содержит некоторую окрестность W_0 начала координат

$$W(q, q^{\cdot}, t) \supset W_0, \quad 0 \in W_0 \tag{1.11}$$

Множество W_0 будем задавать в виде шара радиуса $r > 0$:

$$W_0 = \{G : |G| \leqslant r\} \tag{1.12}$$

или в виде прямоугольного параллелепипеда, отвечающего независимым ограничениям на силы G_i:

$$W_0=\{G:|G_i|\leqslant G_i^0\} \tag{1.13}$$

В случае ограничений (1.13) полагаем

$$r=\min_i G_i^0 \tag{1.14}$$

Подставляя равенства (1.5), (1.9) в систему (1.1), получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=R_i+S_i+G_i \tag{1.15}$$

Пусть заданы начальные условия

$$q(t_0)=q^0, \quad q^{\cdot}(t_0)=(q^{\cdot})^0 \tag{1.16}$$

и терминальные условия, отвечающие состоянию покоя

$$q(t_*)=q^*, \quad q^{\cdot}(t_*)=0 \tag{1.17}$$

причем $q^0\in D$, $q^*\in D$, $t_*>t_0$. Сформулируем задачу управления.

Задача 1. Найти управление $G(q, q^{\cdot})$, формируемое по принципу обратной связи, удовлетворяющее ограничению

$$G\in W_0 \tag{1.18}$$

и переводящее систему (1.15) из любого начального состояния (1.16) в заданное терминальное состояние (1.17) за конечное (нефиксированное) время. Здесь множество W_0 задано в виде (1.12) или (1.13) и в обоих случаях, в силу (1.14), содержит шар $|G|\leqslant r$. Кинетическая энергия системы (1.15) определена соотношением (1.2) и удовлетворяет условиям (1.3) и (1.4), а силы R_i и S_i в (1.15) удовлетворяют ограничениям (1.6)—(1.8).

Отметим, что если построенное управление G удовлетворяет ограничению (1.18), то в силу включения (1.11) оно удовлетворяет также исходному ограничению (1.10).

Решение поставленной задачи 1 сначала построим в частном случае отсутствия диссипативных сил и возмущений в системе (1.15), т. е. при $R_i=S_i=0$. Затем будет рассмотрен общий случай.

2. Управление при отсутствии внешних сил. Система (1.15) при $R_i=$ $=S_i=0$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=G_i \tag{2.1}$$

Зададимся некоторым положительным числом $\varepsilon>0$ и обозначим через Ω_1 множество всех точек $2n$-мерного фазового пространства $(q, q^{\cdot})$, в которых $q\in D$ и $|q_i^{\cdot}|>\varepsilon$ хотя бы для одного i. Через Ω_2 обозначим множество таких точек $(q, q^{\cdot})$, в которых $q\in D$ и $|q_i^{\cdot}|\leqslant\varepsilon$ для всех i. Таким образом

$$\begin{gathered}\Omega_1=\{(q, q^{\cdot}):\ q\in D;\quad \exists i,\ |q_i^{\cdot}|>\varepsilon\}\\ \Omega_2=\{(q, q^{\cdot}):\ q\in D;\quad \forall i,\ |q_i^{\cdot}|\leqslant\varepsilon\}\end{gathered} \tag{2.2}$$

Ниже построен синтез управления $G(q, q^{\cdot})$ отдельно для областей Ω_1 и Ω_2, а также указано число ε. Согласно теореме об изменении кинетической энергии для системы (2.1) имеем

$$dT/dt = \sum_i G_i q_i^{\cdot} = (G, q^{\cdot}) \qquad (2.3)$$

Выберем управление G в области Ω_1 так, чтобы удовлетворить ограничениям (1.18) и обеспечить отрицательность производной (2.3). Для этого полагаем

$$G=-rq^{\cdot}|q^{\cdot}|^{-1}, \qquad G_i=-G_i^0 \operatorname{sign} q_i^{\cdot} \qquad (2.4)$$

для случаев (1.12) и (1.13), соответственно. Подставляя формулы (2.4) в (2.3), получим соответственно

$$dT/dt = -r|q^{\cdot}|, \quad dT/dt = -\sum_i G_i^0 |q_i^{\cdot}| \qquad (2.5)$$

Учитывая обозначения (1.14), получим для обоих случаев (1.12), (1.13)

$$dT/dt \equiv 2T^{1/2} dT^{1/2}/dt \leqslant -r|q^{\cdot}| \qquad (2.6)$$

Из верхней оценки (1.3) для кинетической энергии (1.2) имеем

$$|q^{\cdot}| \geqslant (2T/M)^{1/2} \qquad (2.7)$$

Подставим (2.7) в правую часть неравенства (2.6) и учтем, что $T>0$ в области Ω_1, см. (2.2), получим

$$dT^{1/2}/dt \leqslant -r(2M)^{-1/2} \qquad (2.8)$$

Интегрируя неравенство (2.8), будем иметь

$$T^{1/2}-T_0^{1/2} \leqslant -r(2M)^{-1/2}(t-t_0) \qquad (2.9)$$

где T_0 — значение кинетической энергии в начальный момент времени t_0. Из (2.9) следует, что за конечное время кинетическая энергия станет сколь угодно малой. Следовательно, в некоторый момент времени t_1 система выйдет на границу областей Ω_1 и Ω_2.

Получим нужные для дальнейшего оценки для времени t_1 и обобщенных координат $q(t_1)$. Согласно (1.3) и (2.2), имеем для кинетической энергии T_1 в момент t_1 оценку снизу

$$T_1 \geqslant m(q^{\cdot}, q^{\cdot})/2 \geqslant m\varepsilon^2/2 \qquad (2.10)$$

Из неравенств (2.9) и (2.10) находим искомую оценку для t_1

$$t_1-t_0 \leqslant \tau_1, \qquad \tau_1=(2M)^{1/2}r^{-1}[T_0^{1/2}-(m/2)^{1/2}\varepsilon] \qquad (2.11)$$

Чтобы оценить $q(t_1)$, запишем очевидные неравенства

$$|q_i(t_1)-q_i^0| \leqslant \int_{t_0}^{t_1} |q_i^{\cdot}|\,dt \leqslant \int_{t_0}^{t_1} |q^{\cdot}|\,dt \qquad (2.12)$$

Воспользуемся неравенствами, вытекающими из (1.3) и (2.9)

$$|q^{\cdot}| \leqslant (2T/m)^{1/2} \leqslant (2/m)^{1/2}[T_0^{1/2}-r(2M)^{-1/2}(t-t_0)] \qquad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.12), получим после интегрирования

$$|q_i(t_1)-q_i^0|\leqslant\varphi(t_1-t_0),$$
$$\varphi(\tau)=(2T_0/m)^{1/2}\tau-r(Mm)^{-1/2}\tau^2/2 \tag{2.14}$$

Функция $\varphi(\tau)$, как можно проверить непосредственно, строго возрастает на интервале $[0, \tau_1]$, где τ_1 определено в (2.11). Так как $t_1-t_0\leqslant\tau_1$, согласно (2.11), то $\varphi(t_1-t_0)\leqslant\varphi(\tau_1)$, поэтому из неравенства (2.14) при учете (2.11) получаем

$$|q_i(t_1)-q_i^0|\leqslant\varphi(\tau_1)=(M/m)^{1/2}r^{-1}(T_0-m\varepsilon^2/2) \tag{2.15}$$

Итак, в момент t_1 система окажется на границе областей Ω_1 и Ω_2. Построим управление в Ω_2 так, чтобы система, попав в область Ω_2, уже не выходила из нее и попадала за конечное время в терминальное состояние (1.17).

Запишем уравнения Лагранжа (2.1) в развернутом виде, подставляя в них T из (1.2)

$$\sum_j a_{ij}q_j^{\cdot\cdot}+\sum_{j,k}\gamma_{ijk}q_j^{\cdot}q_k^{\cdot}=G_i \tag{2.16}$$

Здесь

$$\gamma_{ijk}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}-\frac{1}{2}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} \tag{2.17}$$

причем γ_{ijk} можно рассматривать как компоненты n-мерных векторов

$$\Gamma_{jk}=(\gamma_{1jk},\ldots,\gamma_{njk}) \tag{2.18}$$

Перепишем уравнение (2.16) в векторной форме и разрешим его относительно $q^{\cdot\cdot}$. Получим

$$q^{\cdot\cdot}=U+V \tag{2.19}$$

Здесь

$$U=A^{-1}G,\quad V=-\sum_{j,k}A^{-1}\Gamma_{jk}q_j^{\cdot}q_k^{\cdot} \tag{2.20}$$

Из условия (1.3) вытекает, что собственные числа обратной матрицы A^{-1} лежат на отрезке $[M^{-1}, m^{-1}]$. Следовательно, для любого n-мерного вектора z имеем

$$|Az|\leqslant M|z|,\quad |A^{-1}z|\leqslant m^{-1}|z| \tag{2.21}$$

Наложим на компоненты U_i вектора U ограничения

$$|U_i|\leqslant U^0,\quad U^0=rM^{-1}n^{-1/2} \tag{2.22}$$

Выполнение ограничений (2.22) влечет за собой выполнение неравенства $|U|\leqslant rM^{-1}$, из которого в силу (2.20), (2.21) следует $|G|=|AU|\leqslant \leqslant M|U|\leqslant r$. Следовательно, вектор G удовлетворяет наложенному ограничению (1.18) в обоих случаях множества W_0, задаваемого в виде (1.12) или (1.13). Поэтому ограничение (2.22) обеспечивает выполнение условия (1.18).

Оценим вектор V из (2.20), пользуясь вторым неравенством (2.21)

$$|V| \leqslant m^{-1} \sum_{j,k} |\Gamma_{jk}| |q_j^{\cdot}| |q_k^{\cdot}| \tag{2.23}$$

Из неравенств (1.4) следуют оценки для величин γ_{ijk}, введенных в (2.17): $|\gamma_{ijk}| \leqslant {}^3/_2 C$. Отсюда и из (2.18) имеем

$$|\Gamma_{jk}| = \Big(\sum_i \gamma_{ijk}^2\Big)^{1/2} \leqslant \frac{3}{2} C n^{1/2}$$

Полученные оценки для Γ_{jk}, а также неравенства $|q_i^{\cdot}| \leqslant \varepsilon$, имеющие место в области Ω_2 в силу (2.2), подставим в неравенство (2.23). В результате получим $|V| \leqslant {}^3/_2 C n^{5/2} m^{-1} \varepsilon^2$. Следовательно, для компонент V_i вектора V имеем оценки

$$|V_i| \leqslant V^0, \quad V^0 = {}^3/_2 C n^{5/2} m^{-1} \varepsilon^2 \tag{2.24}$$

Уравнения (2.19) и ограничения (2.22), (2.24) перепишем в виде

$$q_i^{\cdot\cdot} = U_i + V_i, \quad |U_i| \leqslant U^0, \quad |V_i| \leqslant V^0 \tag{2.25}$$

причем U^0, V^0 определены в (2.22), (2.24).

Потребуем, чтобы имело место неравенство

$$\rho = V^0/U^0 < 1 \tag{2.26}$$

и построим управление U_i отдельно для каждой степени свободы системы (2.25).

При этом будем исходить из того, что V_i могут быть произвольными функциями, удовлетворяющими наложенным в (2.25) ограничениям. Таким образом, используем минимаксный (гарантированный) подход, характерный для теории дифференциальных игр [1].

Рассматривая i-е уравнение (2.25), положим

$$q_i - q_i^* = x, \quad q_i^{\cdot} = x^{\cdot} = y, \quad U_i = u, \quad V_i = v \tag{2.27}$$

и перепишем соотношения (2.25), (2.26) в форме

$$x^{\cdot} = y, \quad y^{\cdot} = u + v, \quad |u| \leqslant U^0, \quad |v| \leqslant \rho U^0, \quad 0 < \rho < 1 \tag{2.28}$$

В момент t_1, по предположению, система находится на границе областей Ω_1 и Ω_2 из (2.2). С учетом (2.27) имеем следующие начальные условия для системы (2.28):

$$x(t_1) = x^1 = q_i(t_1) - q_i^*, \quad y(t_1) = y^1 = q_i^{\cdot}(t_1), \quad |y^1| \leqslant \varepsilon \tag{2.29}$$

Терминальные условия (1.17) примут вид

$$x(t_*) = 0, \quad y(t_*) = 0 \tag{2.30}$$

Чтобы система, попав в момент t_1 в область Ω_2, уже не выходила из этой области, потребуем

$$|y(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t > t_1 \tag{2.31}$$

Таким образом, в области Ω_2 имеет место декомпозиция задачи 1: вместо этой задачи для исходной системы с n степенями свободы получаем

n аналогичных задач для систем с одной степенью свободы каждая. Поэтому для решения задачи 1 в области Ω_2 достаточно решить следующую задачу.

Задача 2. Для системы (2.28) найти управление $u(x, y)$, удовлетворяющее ограничениям (2.28), (2.31) и переводящее эту систему из начального состояния (2.29) в терминальное состояние (2.30) за конечное время при любом допустимом v, удовлетворяющем ограничению (2.28).

Решение задачи 2 получим путем некоторой модификации решения известной дифференциальной игры для системы (2.28). В рассматриваемой игре игроки выбирают управления u и v, удовлетворяющие ограничениям (2.28), причем управление u стремится уменьшить, а управление v — увеличить время t_* достижения начала координат (2.30). Как известно [1], оптимальное управление u в этой игре совпадает с оптимальным по быстродействию управлением для системы

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=(1-\rho)u, \quad |u|\leqslant U^0 \tag{2.32}$$

Система (2.32) получена из (2.28) при $v=-\rho u$, что соответствует оптимальному (наихудшему для u) управлению второго игрока, выбирающего v. Синтез оптимального по быстродействию управления для системы (2.32) с терминальным условием (2.30) определяется соотношениями

$$\begin{gathered} u(x, y)=U^0\operatorname{sign}[\psi_0(x)-y] \quad \text{при} \quad y\neq\psi_0(x) \\ u(x, y)=U^0\operatorname{sign}x=-U^0\operatorname{sign}y \quad \text{при} \quad y=\psi_0(x) \end{gathered} \tag{2.33}$$

Здесь

$$\psi_0(x)=-[2U^0(1-\rho)|x|]^{1/2}\operatorname{sign}x \tag{2.34}$$

Кривая переключений $y=\psi_0(x)$ для управления (2.33) состоит из двух ветвей парабол, симметричных относительно начала координат. Эти ветви являются оптимальными траекториями, приходящими в начало координат.

Решение задачи 2 должно, в отличие от приведенного выше решения (2.33), (2.34), учитывать фазовое ограничение (2.31). Однако при его построении можно отказаться от требования оптимальности.

Выберем некоторое число $\delta\in(0, \varepsilon)$ и определим функцию $\psi(x)$ равенствами

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_0(x), & |x|\leqslant x^* \\ -\delta\operatorname{sign}x, & |x|>x^*\end{cases} \tag{2.35}$$

Число x^* в (2.35) определим из требования непрерывности функции $\psi(x)$, т. е. из условия $\psi_0(x^*)=-\delta$. Согласно (2.34) получим

$$x^*=\delta^2[2U^0(1-\rho)]^{-1} \tag{2.36}$$

Искомое управление $u(x, y)$, решающее задачу 2, зададим в форме (2.33), заменив $\psi_0(x)$ на $\psi(x)$ из (2.35). Имеем

$$u(x, y)=\begin{cases}U^0\operatorname{sign}[\psi(x)-y], & y\neq\psi(x) \\ U^0\operatorname{sign}x=-U^0\operatorname{sign}y, & y=\psi(x)\end{cases} \tag{2.37}$$

Кривая переключений $y=\psi(x)$ для управления (2.37), (2.35) симметрична относительно начала координат и состоит из двух дуг парабол и двух лучей. Она изображена на фигуре жирной линией. Так как $\delta<\varepsilon$, то эта кривая целиком лежит в полосе $|y|\leqslant\varepsilon$ и делит ее на две симметричные части: область X^+, где $y<\psi(x)$ и $u=U^0$, и область X^-, где $y>\psi(x)$, $u=-U^0$, см. (2.37).

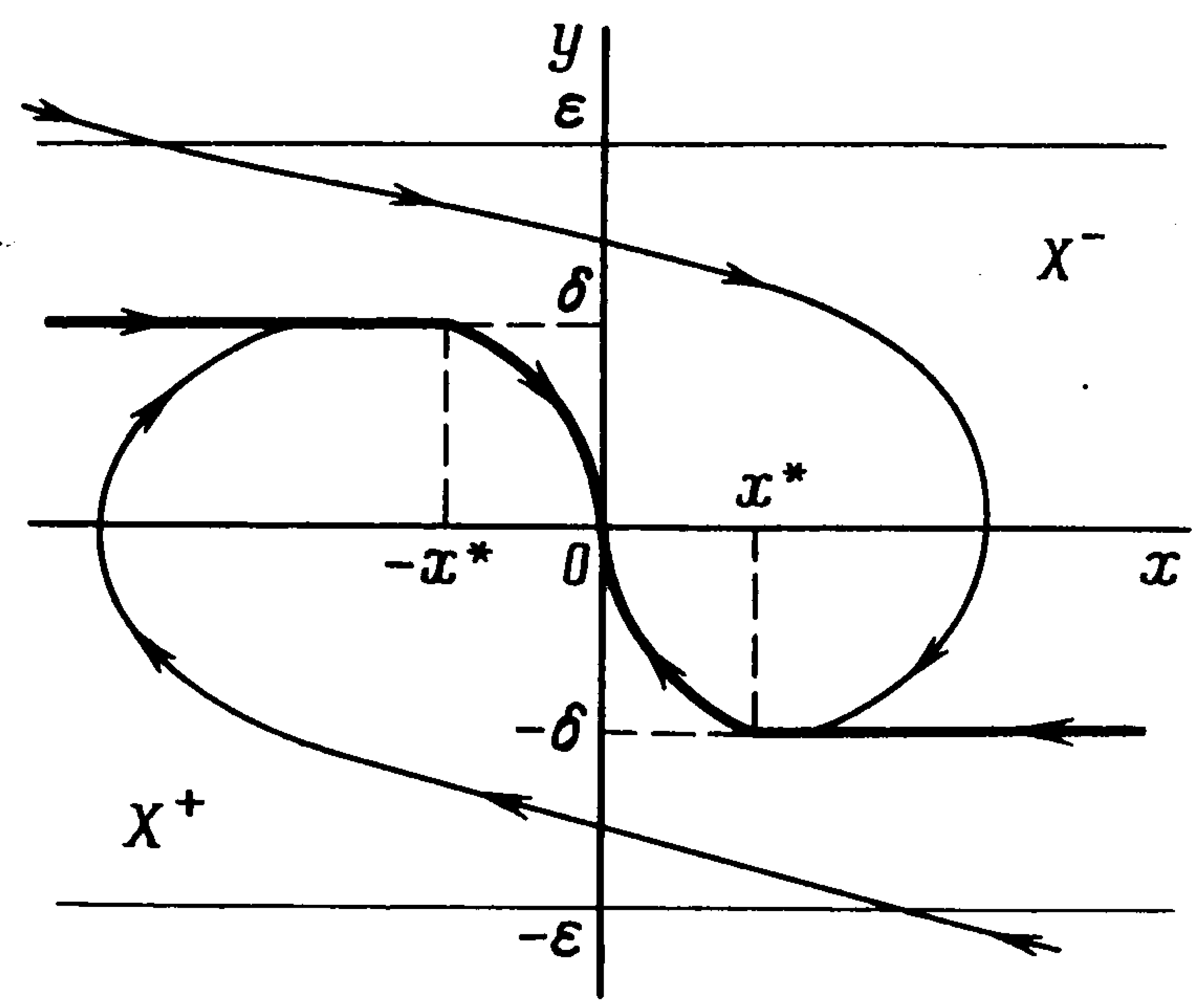
Докажем, что управление (2.37), (2.35) решает задачу 2.

В момент t_1 выполнены начальные условия (2.29).

Согласно уравнениям (2.28) и закону управления (2.37), имеем

$$y^{\cdot}\geqslant U^0(1-\rho),\quad (x,y)\in X^+;\quad y^{\cdot}\leqslant -U^0(1-\rho),\quad (x,y)\in X^- \tag{2.38}$$

Ширина областей X^+, X^- вдоль оси y не превышает $\varepsilon+\delta$ (фигура), а скорость движения вдоль этой оси согласно (2.38) конечна и направлена к линии переключения. Следовательно, фазовая точка никогда не выйдет из полосы $|y|\leqslant\varepsilon$ и за конечное время, в некоторый момент $t_2\geqslant t_1$, попадет на кривую переключений $y=\psi(x)$.



Пусть фазовая точка в момент t_2 попала на прямолинейный участок $y=\pm\delta$ кривой переключения $y=\psi(x)$. После этого точка будет двигаться вдоль прямолинейного участка в скользящем режиме. Это вытекает из того, что по обе стороны данного участка фазовые скорости конечны и направлены к кривой переключений. Движение вдоль указанных участков будет происходить с соответствующей постоянной скоростью $y=x^{\cdot}=\pm\delta$ в сторону уменьшения $|x|$. Следовательно, за конечное время, в некоторый момент $t_3\geqslant t_2$, фазовая точка попадет в одну из точек $(\pm x^*, \mp\delta)$ на границе прямолинейного и криволинейного участков кривой переключений. Криволинейные (параболические) участки являются фазовыми траекториями системы (2.28) при u, выбранном согласно (2.37), и при $v=-\rho u$. Если $v\neq-\rho u$, то движение при выбранном управлении (2.37) все равно будет происходить вдоль этих участков парабол, но в скользящем режиме. Поэтому за конечное время, в момент t_*, фазовая точка попадет в начало координат.

На фигуре тонкими линиями изображены некоторые возможные фазовые траектории. Стрелками указано направление роста времени t.

Все движение от момента t_1 до момента t_* распадается на три этапа: движение в области X^+ или X^-, движение по прямым $y=\pm\delta$ и движение по параболам. Некоторые из этих этапов могут отсутствовать. Например, в начальный момент t_1 фазовая точка может лежать на кривой переключений или она может попасть из области X^+ или X^- сразу на параболический участок этой кривой. Но во всех случаях время движения t_*-t_1 конечно.

Для оценки этого суммарного времени будем предполагать наличие всех трех этапов, что приведет к искомой оценке сверху. Длительность t_2-t_1 первого этапа (движение в области X^+ или X^-) оценим, разделив максимальную ширину $\varepsilon+\delta$ этих областей вдоль оси y на минимальную по модулю скорость $y^{\cdot}$ из (2.38). Получим

$$t_2-t_1\leqslant(\varepsilon+\delta)[U^0(1-\rho)]^{-1} \tag{2.39}$$

Оценим еще координату $x(t_2)$, используя ограничение (2.31) и начальное условие (2.29)

$$|x(t_2)-x^1|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}|y|\,dt\leqslant\varepsilon(t_2-t_1)$$

Отсюда при учете (2.39) получим

$$|x(t_2)|\leqslant|x^1|+\varepsilon(\varepsilon+\delta)[U^0(1-\rho)]^{-1} \tag{2.40}$$

Длительность t_3-t_2 второго этапа (движение по прямым $y=\pm\delta$) оценим, разделив расстояние вдоль оси x на скорость, равную по модулю δ

$$t_3-t_2\leqslant[|x(t_2)|-x^*]\delta^{-1}$$

Подставляя в данное неравенство соотношения (2.36), (2.40), получим

$$t_3-t_2\leqslant|x^1|\delta^{-1}+\varepsilon(\varepsilon+\delta)[U^0(1-\rho)\delta]^{-1}-\delta[2U^0(1-\rho)]^{-1} \tag{2.41}$$

Длительность t_*-t_3 третьего, последнего этапа (движение по параболе) можно оценить, разделив максимальную по модулю скорость δ в начале этого этапа на минимальное (по модулю) ускорение, определяемое согласно (2.38). Получим

$$t_*-t_3\leqslant\delta[U^0(1-\rho)]^{-1} \tag{2.42}$$

Суммируя соотношения (2.39), (2.41) и (2.42), получим оценку сверху полного времени движения в задаче 2

$$t_*-t_1\leqslant|x^1|\delta^{-1}+(2\varepsilon^2+4\varepsilon\delta+3\delta^2)\delta^{-1}[2U^0(1-\rho)]^{-1} \tag{2.43}$$

Полученный результат подытожим в виде теоремы.

Теорема 1. Управление $u(x, y)$, определяемое равенствами (2.37), (2.35), в которых функция ψ_0 и число x^* определены равенствами (2.34) и (2.36), а δ – любое число из интервала $(0, \varepsilon)$, доставляет решение задачи 2, т. е. удовлетворяет ограничениям (2.28), (2.31) и переводит систему (2.28) из начального состояния (2.29) в терминальное состояние (2.30) за конечное время t_*-t_1, удовлетворяющее оценке (2.43).

Обратимся теперь к решению исходной задачи 1 в рассматриваемом случае $R_i=S_i=0$. Искомое управление $G(q, q^{\cdot})$ в области Ω_1 определено соотношениями (2.4), а в области Ω_2 оно может быть получено из решения $u(x, y)$ задачи 2. Для этого достаточно воспользоваться соотношениями $G=AU$ из (2.20), а также обозначениями (2.27). В результате получим

$$G(q, q^{\cdot})=A(q)U(q, q^{\cdot}),\ U_i(q_i, q_i^{\cdot})=u(q_i-q_i^*, q_i^{\cdot}) \tag{2.44}$$

Напомним, что решение $u(x, y)$ задачи 1 получено при условии $\rho<1$, см. (2.26), которое при учете обозначений (2.22) и (2.24) приводится к неравенству на ε:

$$\varepsilon<\varepsilon_0=(2mr)^{1/2}(3MCn^3)^{-1/2} \tag{2.45}$$

Для оценки полного времени движения t_*-t_0 нужно сложить времена движения в областях Ω_1 и Ω_2. При вычислении t_*-t_1, учтем, что вместо $|x^1|$ в (2.43) нужно подставить максимальную по i из разностей $|q_i(t_1)-q_i^*|$, см. (2.29), так как система попадает в терминальное состояние тогда, когда все координаты примут терминальные значения. Используя оценку (2.15), получим

$$\begin{gathered}|x^1|=\max_i|q_i(t_1)-q_i^*|\leqslant\max_i(|q_i(t_1)-q_i^0|+|q_i^0-q_i^*|)\leqslant\\ \leqslant\max_i|q_i^0-q_i^*|+(M/m)^{1/2}r^{-1}(T_0-m\varepsilon^2/2)\end{gathered}$$

Подставим это выражение в неравенство (2.43), которое затем сложим с неравенством (2.11)

$$\begin{gathered}t_*-t_0\leqslant\delta^{-1}\max_i|q_i^0-q_i^*|+(2M)^{1/2}r^{-1}[T_0^{1/2}-(m/2)^{1/2}\varepsilon]+\\ +(M/m)^{1/2}r^{-1}\delta^{-1}(T_0-m\varepsilon^2/2)+\\ +(2\varepsilon^2+4\varepsilon\delta+3\delta^2)\delta^{-1}[2U^0(1-\rho)]^{-1}\end{gathered} \tag{2.46}$$

Параметры U^0 и ρ определены соотношениями (2.22), (2.24), (2.26), причем $\rho<1$ при условии (2.45).

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. Задача 1 для системы (2.1), т. е. при $R_i=S_i=0$, всегда имеет решение. При любом $\varepsilon\in(0, \varepsilon_0)$, где ε_0 задано формулой (2.45), управление $G(q, \dot q)$, определяемое соотношениями (2.4) в области Ω_1 (для случаев (1.12) и (1.13) соответственно) и соотношениями (2.44) в области Ω_2, доставляет решение этой задачи, т. е. переводит систему (2.1) из любого начального состояния (1.16) в заданное терминальное состояние (1.17) за конечное время t_*-t_0, удовлетворяющее неравенству (2.46). При этом функция $u(x, y)$ в (2.44) определена соотношениями (2.37), (2.35), (2.34), в которых параметры U^0, ρ, x^* заданы формулами (2.22), (2.26), (2.24), (2.36), а δ — любое число в интервале $(0, \varepsilon)$.

Отметим, что с точки зрения уменьшения времени движения целесообразно выбирать δ как можно ближе к ε. Однако при $\delta=\varepsilon$ уже нельзя гарантировать, что система, попав на границу областей Ω_1 и Ω_2, останется в области Ω_2. Поэтому δ выбирается из интервала $(0, \varepsilon)$. Построенные решения задач 1, 2, конечно, не являются единственными. В частности, для построения синтеза в одномерной системе (2.28), полученной в результате декомпозиции, можно воспользоваться другими подходами.

3. Управление в общем случае. Перейдем к решению задачи 1 в общем случае системы (1.15). При этом ход решения в основном остается тем же, что и в разд. 2.

Зададимся некоторым $\varepsilon>0$ и снова введем в рассмотрение области Ω_1 и Ω_2, определяемые соотношениями (2.2). Теорема об изменении кинетической энергии для системы (1.15) в силу условия диссипативности (1.6) для сил R_i примет вид, аналогичный (2.3)

$$dT/dt \leqslant \sum_i (G_i + S_i) q_i^{\cdot} \tag{3.1}$$

Управление G в области Ω_1 выберем из условия минимума скалярного произведения $(G, q^{\cdot})$ при ограничении (1.18). Для двух случаев множества W_0, заданного в виде (1.12) или (1.13), получим снова выражения (2.4) соответственно. Подставим эти выражения в неравенство (3.1) и воспользуемся ограничениями (1.8), а также неравенством Коши — Буняковского. Для случая множества W_0 в виде шара (1.12) получим

$$dT/dt \leqslant -r|q^{\cdot}| + \sum_i S_i^0 |q_i^{\cdot}| \leqslant -r_1 |q^{\cdot}| \tag{3.2}$$

Здесь

$$r_1 = r - \Big[\sum_i (S_i^0)^2\Big]^{1/2} > 0 \tag{3.3}$$

Для множества W_0 в виде прямоугольного параллелепипеда (1.13) найдем

$$dT/dt \leqslant -\sum_i (G_i^0 - S_i^0) |q_i^{\cdot}| \leqslant -r_2 |q_i^{\cdot}| \tag{3.4}$$

где

$$r_2 = \Big[\sum_i (G_i^0 - S_i^0)^2\Big]^{1/2} \tag{3.5}$$

причем предполагается выполненным условие

$$G_i^0 > S_i^0, \quad i=1, \ldots, n \tag{3.6}$$

Таким образом, при выполнении неравенств (3.3) в случае шара (1.12) и (3.6) в случае параллелепипеда (1.13), неравенства (3.2) и (3.4) переходят в неравенство (2.6) с заменой постоянной $r>0$ на $r_\alpha>0$. Здесь и далее значения индекса $\alpha=1$, 2 отвечают случаям (1.12) и (1.13) соответственно. Поэтому все соотношения разд. 2, относящиеся к области Ω_1, остаются в силе с точностью до указанной замены.

Обратимся к области Ω_2. Наложим условие

$$\varepsilon \leqslant \nu_0 \tag{3.7}$$

при котором в этой области справедливы оценки (1.7). Уравнения Лагранжа (1.15) снова преобразуем к виду (2.19), разрешенному относительно производных

$$q^{\cdot\cdot} = U + V_* \tag{3.8}$$

причем для U имеет место прежнее соотношение (2.20). Вектор V_* в (3.8) оказывается равным

$$V_* = V + A^{-1}(R+S) \tag{3.9}$$

Величина V дается формулой (2.20), а R и S — векторы с компонентами R_i и S_i соответственно.

Используя неравенства (2.21) для A^{-1}, (1.7) для R_i и (1.8) для S_i, получим оценку

$$|A^{-1}(R+S)|\leqslant m^{-1}[R^0(\varepsilon)+S^0] \tag{3.10}$$

$$R^0(\varepsilon)=\left\{\sum_i [R_i^0(\varepsilon)]^2\right\}^{1/2}, \quad S^0=\left[\sum_i (S_i^0)^2\right]^{1/2}$$

В соответствии со сделанными в разд. 1 допущениями относительно функций R_i^0 (см. (1.7)) $R^0(\varepsilon)$ – монотонно возрастающая непрерывная функция от ε, причем $R^0(0)=0$.

Из неравенств (2.24) и (3.10) вытекает оценка для вектора V_* из (3.9)

$$\begin{aligned}|V_*|\leqslant V_*^0=V^0+m^{-1}[R^0(\varepsilon)+S^0]=\\ =m^{-1}[{}^3/_2Cn^{5/2}\varepsilon^2+R^0(\varepsilon)+S^0]\end{aligned} \tag{3.11}$$

Наложим условие, аналогичное (2.26)

$$\rho^*=V_*^0/U^0<1 \tag{3.12}$$

Процедура построения управления в области Ω_2, а также все проведенные оценки в этой области остаются теми же, что и в разд. 2. Единственные изменения состоят в замене ρ на ρ^*, а также r на r_α в оценках (2.46) для времени. В формуле (2.22) для U^0 параметр r нужно оставить без замены: он здесь определен соотношениями (1.12) и (1.14) для случаев (1.12), (1.13) соответственно. Кроме того, изменяются ограничения на выбор ε. Вместо неравенства (2.45) имеем теперь два условия: (3.7) и (3.12). В развернутом виде, с учетом соотношений (2.22) и (3.11), получим

$$\varepsilon\leqslant\nu_0, \quad {}^3/_2Cn^{5/2}\varepsilon^2+R^0(\varepsilon)+S^0\leqslant mM^{-1}rn^{-1/2} \tag{3.13}$$

Итак, предлагаемая процедура построения управления приводит к решению задачи 1, если выполнены следующие условия: неравенства (3.3) или (3.6) в случаях $\alpha=1$, 2 соответственно, а также оба неравенства (3.13) на ε. Число ε, удовлетворяющее условию (3.13), заведомо существует, если возмущения отсутствуют ($S^0=0$) или достаточно малы ($S^0\leqslant mM^{-1}rn^{-1/2}$). Это вытекает из непрерывности функции $R^0(\varepsilon)$: $R^0\to0$ при $\varepsilon\to0$. Заметим, что для диссипативных сил, пропорциональных скоростям, функции R_i^0 из (1.7) и R^0 из (3.10) линейны по ε.

Подытожим полученные результаты.

Теорема 3. Пусть число α равно 1 или 2 соответственно для случаев множества W_0 в виде шара (1.12) или параллелепипеда (1.13). Предположим, что выполнены условия (3.3), (3.6) для $\alpha=1$, 2, соответственно, и существует $\varepsilon>0$, удовлетворяющее обоим условиям (3.13). Тогда управление $G(q, q^{\cdot})$, определяемое соотношениями (2.4) в области Ω_1 (для $\alpha=$ $=1$, 2, соответственно) и соотношениями (2.44) в области Ω_2, доставляет решение задачи 1 для системы (1.15), т. е. переводит эту систему из любого начального состояния (1.16) в заданное терминальное состояние (1.17). При этом функция $u(x, y)$ в (2.44) определена соотношениями (2.37), (2.35), (2.34), в которых параметры U^0, x^* заданы формулами (2.22), (2.36). Параметр ρ в формулах (2.34) и (2.36) следует заменить на ρ^* согласно формулам (3.12), (3.11), причем при наложенных условиях имеем $\rho^*<1$, а в качестве δ можно взять любое число из интервала $(0, \varepsilon)$. Время движения $\dot{t}_*-t_0$ конечно и удовлетворяет неравенству (2.46), в котором r следует заменить на r_a (см. (3.3), (3.5)), а ρ на ρ^*.

Отметим, что близкие по постановке задачи управления были рассмотрены ранее [2, 3] при наложении более жестких условий на величины управляющих сил. Так, при отсутствии внешних сил ($R_i=S_i=0$) в разд. 2 настоящей работы получено решение задачи управления при сколь угодно малых управляющих силах, в то время как в работах [2, 3] требовалось, чтобы эти силы могли принимать достаточно большие значения. С другой стороны, время управления оказалось в [2, 3], вообще говоря, меньшим. Как показано в [3], полученные результаты могут быть применены к проблемам управления манипуляционными роботами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. *Черноусько Ф. Л.* Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // Прикладная математика и механика. 1990. № 6. С. 883–893.
3. *Черноусько Ф. Л.* Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 6. С. 64–82.

Москва

Поступила в редакцию
27.VI.1991