Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. Е. Л. Нахмейн, Б. М. Нуллер

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОМБИНИРОВАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Метод [1—4] решения краевых задач Гильберта — Римана, поставленных в комплексной плоскости на конечном числе контуров, распространяется на периодические задачи. Рассматриваются смешанные периодические задачи статической и стационарной динамической теории упругости для изо- и ортотропной полуплоскости и составной плоскости, сводящиеся к задачам Гильберта — Римана и разрешимые в квадратурах при помощи этого метода. В частности, решаются задачи о давлении на упругую полуплоскость периодической системы штампов с участками полного сцепления и отслаивания в зоне контакта.

1. Пусть L и M — две системы гладких контуров в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$, лежащие в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z < 2\pi$.

Периодической комбинированной краевой задачей Гильберта — Римана назовем задачу определения периодической кусочно-аналитической функции $\Phi(z)$ [5] по краевым условиям

$$\operatorname{Im}[p^{\pm}(x)\Phi^{\pm}(x)] = f^{\pm}(x), \quad p^{\pm}(x) \neq 0, \quad x \in L \tag{1.1}$$

$$\Phi^{+}(x) = G(x)\Phi^{-}(x) + g(x), \quad x \in M \tag{1.2}$$

периодически с периодом 2π, распространенным на всю комплексную плоскость.

Рассмотрим далее важный для приложений частный случай этой задачи, когда $L = L^1 \bigcup L^2$, $M = M^1 \bigcup M^2$, контур L состоит из интервалов $\langle a_k, b_k\rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$; контур M^1 — из отрезков $[s_k, t_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, Q)$ действительной оси, $0 < a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_N < 2\pi$, $0 < s_1 < t_1 < s_2 < \ldots < t_Q < 2\pi$, $L \bigcup M = [0, 2\pi)$, $L \bigcap M = 0$; $G(x) = -G = \mathrm{const}$, $G > 0$, $x \in M^1$; $G(x) = 1$, $x \in M^2$; функция $p^{\pm}(x) = p(x)$ вещественна на L^1 и чистомнима на L^2. Не умаляя общности, положим $p(x) \equiv 1$, $x \in L^1$; $p(x) \equiv i$, $x \in L^2$. Следуя [4], будем считать, что всякая граничная точка L не принадлежит L только тогда, когда она является граничной точкой M^1.

Пусть каждый промежуток $\langle a_k, b_k\rangle$ содержит S_k внутренних узловых точек $x = d_{kl}$, $d_{kl} < d_{k,l+1}$, разделяющих его на интервалы из L^1 и L^2. В этих точках функция $p(x)$ имеет разрыв. Общее число внутренних узлов на L равно S. Функции $f^{\pm}(x)$, $g(x)$ удовлетворяют условию Гельдера.

Решение задачи (1.1), (1.2) будем искать в наиболее широком классе функций, ограниченных на бесконечности и интегрируемых во всех узлах L и M.

Каноническое решение соответствующей однородной периодической задачи

$$\operatorname{Im}[p(x)\Phi^{\pm}(x)] = 0, \quad x \in L \tag{1.3}$$

$$\Phi^{+}(x) = -G\Phi^{-}(x), \quad x \in M^1 \tag{1.4}$$

с учетом свойств автоморфности будем строить в форме

$$X(z) = Z(z)\, e^{i\psi(z)} \prod_{j=1}^{N} [S(z-b_j)]^{-\alpha_j} \prod_{j=1}^{2K} [S(z-c_j)]^{-\beta_j}, \quad S(z) = \sin\frac{z}{2} \tag{1.5}$$

Здесь $Z(z)$ — каноническое решение периодической задачи Римана (1.4); c_j — комплексные числа, $0 \leqslant \operatorname{Re} c_j < 2\pi$, $\operatorname{Im} c_j \neq 0$; α_j, β_j — целые числа; $K = E\{{}^1/_2 N\}$, $E\{t\}$ — целая часть t, $\psi(z)$ — решение периодической задачи Дирихле

$$\operatorname{Re}\psi^{\pm}(x) = h^{\pm}(x), \quad x \in L \tag{1.6}$$

$$h^{\pm}(x) = \pi n_k^{\pm} - \arg Z^{\pm}(x) + \sum_{j=1}^{N} [\alpha_j \arg S(x-b_j) + \beta_j \arg S(x-c_j)]^{\pm} +$$
$$+ \pi m^{\pm}(x) + {}^1/_2\pi(1-r), \quad x \in L^r \cap \langle a_k, b_k \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad r = 1, 2 \tag{1.7}$$

ограниченное во всех узлах и на бесконечности, $n_k^{\pm}$ — целые числа, $m^{\pm}(x)$ — целочисленные функции, которые могут иметь скачки при $x = d_{kl} \pm i0$, $m^{\pm}(a_k) = 0$, $0 \leqslant \arg S(z) \leqslant 2\pi$.

Поскольку имеет место соотношение $S(z + 2\pi) = -S(z)$, условие периодичности функции $\psi(z)$ накладывает определенные ограничения на выбор функции $Z(z)$ и значений α_j, β_j. Как будет видно из дальнейшего, для построения общего решения задачи (1.1), (1.2) в нужном классе может быть использовано каноническое решение с любым поведением в узлах. Следует отметить, что, как и в [3, 4], в отличие от задачи Римана [5], в комбинированной задаче Гильберта — Римана нельзя построить каноническое решение с заданным произвольным поведением в узлах.

Используя теорию краевых задач для автоморфных функций [5, 6], функцию $Z(z)$, периодическую вместе с аргументом ее значений, запишем в виде

$$Z(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi i}\int_{M^1} \ln(-G)\, T(t-z)\, dt\right\} = \prod_{j=1}^{Q}\left[\frac{S(z-t_j)}{S(z-s_j)}\right]^{1/2 - i\gamma} \tag{1.8}$$

$$T(z) = \operatorname{ctg}({}^1/_2 z), \quad \gamma = {}^1/_2\pi^{-1}\ln G$$

Теперь задача Дирихле (1.6), (1.7) периодизуется, если ввести какое-либо условие замыкания, например,

$$\beta_{2K} = -\sum_{j=1}^{2K-1} \beta_j - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \tag{1.9}$$

Решение задачи (1.6), (1.7) строится также на основе теории [5, 6]

$$\psi(z) = \frac{Y(z)}{4\pi i}\int_L \frac{h^{+}(t) + h^{-}(t)}{Y^{+}(t)} H(t-z)\, dt + \frac{1}{4\pi i}\int [h^{+}(t) - h^{-}(t)]\, T(t-z)\, dt \tag{1.10}$$

$$Y(z) = \prod_{k=1}^{N} [S(z-a_k)\,S(z-b_k)]^{1/2}, \quad Y(z) \sim \exp(\pm {}^1/_2 iNz), \quad z \to \mp i\infty$$

$$(1.11)$$

$$H(z) = [S(z)]^{-1},\ N = 2p+1;\ H(z) = T(z),\ N = 2p;$$
$$p = 0, 1, \ldots \qquad (1.12)$$

При $N > 1$ условие ограниченности функции $\psi(z)$ на бесконечности приводит, согласно (1.10), (1.11), к системе $N-1$ действительных уравнений

$$\int_L \frac{h^+(t)+h^-(t)}{Y^+(t)} P_n(t)\,dt = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, K \qquad (1.13)$$

где $P_n(t) = \exp[i(n - {}^1/_2)t]$ (N — нечетное), $P_n(t) = \exp[i(n-1)t]$ (N — четное), в которой неизвестными являются целые числа $w_j^+ = n_j^+ + n_j^-$ ($j = 1, 2, \ldots, N$) и комплексные числа c_j ($j = 1, 2, \ldots, N-1$). Эта система имеет по крайней мере одно решение [3, 7], причем аффиксы точек c_j располагаются на кривых, имеющих концы в точках a_j, b_j и полностью лежащих в одной из полуплоскостей $y \geqslant 0$ или $y \leqslant 0$.

Целые числа α_j, β_j и $w_j^- = n_j^+ - n_j^-$, а также комплексное число c_N (при N — четном) пока остаются неопределенными, допуская некоторую свободу при построении функции $X(z)$.

Зафиксируем их, полагая $n_j^+ = n_j^- = n_j$, $c_N = 0$, $\alpha_j \equiv 0$, $\beta_j = (-1)^j$, $j = 1, 2, \ldots, 2K$. Тогда $w_j^+ = 2n_j$, условие (1.9) выполняется.

Подставим эти величины в (1.5), (1.7), (1.10) и перейдем путем замены переменной от интегрирования по отрезкам прямой $[a_k, b_k]$ к интегрированию по дугам единичной окружности на вспомогательной комплексной плоскости $w = e^{iz}$. Следуя [2], изменим порядок интегрирования в первом интеграле (1.10). После элементарных преобразований искомое каноническое решение задачи примет вид

$$X(z) = e^{i\varphi(z)} e^{i\varphi_0(z)} \prod_{j=1}^{Q} \left[\frac{S(z-t_j)}{S(z-s_j)}\right]^{1/2} \prod_{j=1}^{K} \frac{S(z-c_{2j-1})}{S(z-c_{2j})} \qquad (1.14)$$

$$\varphi(z) = -\frac{\gamma Y(z)}{2} \int_{M^1} \frac{H(t-z)\,dt}{Y(t)}$$

$$\varphi_0(z) = \frac{Y(z)}{4\pi i} \int_L \frac{h_0^+(t)+h_0^-(t)}{Y^+(t)} H(t-z)\,dt + $$
$$+ \frac{1}{4\pi i} \int_L [h_0^+(t) - h_0^-(t)]\, T(t-z)\,dt$$

$$h_0^\pm(t) = \pi n_k + \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j \arg S(t-c_j) + \pi m^\pm(t) + {}^1/_2\pi(1-r)$$

$$t \in L^r \cap \langle a_k, b_k \rangle, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad r = 1, 2$$

При этом несколько упростится и система уравнений (1.13):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{h_0^+(t)+h_0^-(t)}{Y^+(t)} P_n(t)\,dt - \gamma \int_{M^1} \frac{P_n(t)\,dt}{Y(t)} = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, K \qquad (1.15)$$

Функция $X(z)$ периодична, ограничена на бесконечности, имеет простые полюсы в точках $z = c_{2j}$ и нули в точках $z = c_{2j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, K$.

Ее асимптотику в узлах можно записать в виде $X(z) = O[(z-d)^{\zeta}]$, где $\zeta = \varepsilon_k$ при $z = s_k$, $\zeta = \delta_k$ при $z = t_k$, $\zeta = \lambda_k$ при $z = a_k$, $\zeta = \nu_k$ при $z = b_k$, $\zeta = \gamma_{kl}^{\pm}$ при $z = d_{kl} \pm i0$.

Пользуясь оценками поведения интегралов типа Коши в узлах линии интегрирования [5], из (1.14) при отсутствии общих точек у контуров L и M^1 будем иметь

$$\varepsilon_k = -{}^1/_2 + i\gamma,\ \delta_k = -{}^1/_2 - i\gamma,\ \lambda_k = 0,\ \nu_k = {}^1/_2\,[m^+(b_k) - \\ - m^-(b_k)] \qquad (1.16)$$

$$\gamma_{kl}^{\pm} = \pm\,[\theta(d_{kl}) + m^{\pm}(d_{kl}-0) - m^{\pm}(d_{kl}+0)],\ \theta(t) = \\ = \pi^{-1}\arg\{p(t+0)[p(t-0)]^{-1}\}$$

Полагая $\gamma_{kl}^{\pm} = -{}^1/_2$ и учитывая, что $\theta(d_{kl}) = \pm{}^1/_2$, $m^{\pm}(a_k) = 0$, $m^{\pm}(d_{kl}+0) = m^{\pm}(d_{k,l+1}-0)$, получим для вычисления значений функций $m^{\pm}(t)$ на $\langle a_k, b_k\rangle$ рекуррентную формулу

$$m^{\pm}(d_{kl}+0) = m^{\pm}(d_{kl}-0) + E\{\theta(d_{kl})\} + {}^1/_2 \pm {}^1/_2$$

Отсюда и из (1.16) следует, что $\nu_k = {}^1/_2 S_k$.

В случае совпадения концов какой-либо пары промежутков $[s_l, t_l] \subset M^1$ и $\langle a_r, b_r\rangle \subset L$ каноническое решение, как и в [2], перестает осциллировать в окрестности их общей точки, так что $\varepsilon_l = \nu_r = {}^1/_2(S_r - 1)$ при $s_l = b_r$, $\delta_l = \lambda_r = -{}^1/_2$ при $t_l = a_r$. Исчезновение осцилляции позволяет описать модель отслаивания путем введения участка скользящей заделки, примыкающего к участку полного сцепления.

Переходя к построению общего решения краевой задачи в указанном выше классе периодических кусочно-аналитических функций, рассмотрим функцию $F(z) = [X(z)]^{-1}\Phi(z)$. Эта периодическая функция удовлетворяет краевым условиям

$$\operatorname{Im} F^{\pm}(x) = f^{\pm}(x)[p(x)X^{\pm}(x)]^{-1},\ x \in L \qquad (1.17)$$

$$F^{+}(x) - F^{-}(x) = g(x)\,[X^{+}(x)]^{-1},\ x \in M \qquad (1.18)$$

и ограничена на бесконечности.

Положим

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z),\quad F_1(z) = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_M \frac{g(t)}{X^+(t)}\,T(t-z)\,dt \qquad (1.19)$$

Тогда функция $F_2(z)$ будет решением периодической задачи Дирихле

$$\operatorname{Im} F_2^{\pm}(x) = f_2^{\pm}(x),\ f_2^{\pm}(x) = f^{\pm}(x)[p(x)X^{\pm}(x)]^{-1} - \operatorname{Im}F_1(x),\ x \in L \qquad (1.20)$$

Она также строится на основе теории краевых задач для автоморфных функций. Учитывая аналогично [3] наличие у нее полюсов с неизвестными главными частями при $z = c_{2k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, K)$ и при $z = t_k$ $(k = 1, 2, \ldots, Q)$, получим:

$$F_2(z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_L \left\{\frac{[f_2^+(t) + f_2^-(t)]\,Y_0(z)}{Y_0^+(t)} + f_2^+(t) - f_2^-(t)\right\} T(t-z)\,dt + \\ + F_3(z) + F_4(z),\quad Y_0(z) = Y^{-1}(z)\prod_{k=1}^{N} S(z-d_k) \qquad (1.21)$$

$$F_3(z) = \sum_{k=1}^{Q} [A_{k1} + iA_{k2}Y_0(z)]\, T(z - t_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K} \{B_k [1 + Y_0^{-1}(c_{2k-1})\, Y(z)] \times$$

$$\times T(z - c_{2k-1}) + \overline{B}_k [1 - Y_0^{-1}(\overline{c}_{2k-1})\, Y(z)]\, T(z - \overline{c}_{2k-1})\}, \quad B_k = B_{k1} + iB_{k2}$$

$$F_4(z) = C_0 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{p_k'} C_{kj} [T(z - b_k)]^{-1} + iQ_{N+S_0}(z)\, Y^{-1}(z) \prod_{k=1}^{N} [S(z - b_k)]^{-q_k'} \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{R_0} S(z - a_n^*), \quad Q_N(z) = D_0 + \sum_{k=1}^{1/2 N} \{D_{k1} \cos kz + D_{k2} \sin kz\}, \quad N = 2p$$

$$Q_N(z) = \sum_{k=0}^{1/2(N-1)} \{D_{k1} \cos (k + 1/2)\, z + D_{k2} \sin (k + 1/2)\, z\}, \quad N = 2p + 1,$$

$$p = 0, 1, \ldots$$

$$p_k' = p_k, \quad q_k' = q_k \ (b_k \in M'); \ p_k' = q_k, \quad q_k' = p_k - 1 \ (b_k \equiv b_k^* \in M^1)$$

$$p_k = E\{1/2\,(S_k + 1)\}, \quad q_k = E\{1/2 S_k\}, \quad S_0 = S - R_0 - R_1$$

a_n^* $(n = 1, \ldots, R_0)$ и b_n^* $(n = 1, \ldots, R_1)$ — граничные точки a_k и b_k контура L, принадлежащие M^1, d_k $(k = 1, \ldots, N)$ — совокупность N узлов контура L, включающая все точки a_n^*; A_{kj}, B_{kj}, C_{kj}, C_0, D_0 — действительные постоянные.

Количество произвольных постоянных в полученном решении равно $2K + N + 2Q - R_0 - R_1 + S + 2$. Из них $2K$ постоянных требуется для устранения полюсов функции $F(z)$ в точках $z = c_{2k-1}^*$ путем решения системы уравнений $F(C_{2k-1}^*) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, K$.

Таким образом, общее решение периодической комбинированной задачи Гильберта — Римана содержит $N + 2Q - R_0 - R_1 + S + 2$ произвольных действительных постоянных. Оно соответствует наиболее высоким степеням интегрируемых особенностей во всех узлах $z = d$ и имеет вид $\Phi(z) = O[(z - d)^{\zeta}]$, $\operatorname{Re} \zeta \equiv -1/2$.

Отметим, что общее решение в виде (1.19), (1.21), (1.14) содержит наименьшее возможное количество произвольных постоянных и соответственно требует решения наименьшего числа уравнений для ликвидации полюсов.

2. Периодическая комбинированная краевая задача Дирихле — Римана определяется условиями (1.1), (1.2), когда $p(x) \equiv 1$, $x \in L$, участок L^2 отсутствует. При этом каноническое решение задачи по-прежнему выражается формулой (1.14) при

$$h_0^{\pm}(t) = \pi n_k + \sum_{j=1}^{2K} (-1)^j \arg S(t - c_j), \quad t \in L \tag{2.1}$$

Оно имеет осциллирующие особенности при $z = s_k$, обращается в нуль порядка $1/2 - i\gamma$ при $z = t_k$, ограничено при $z = a_k$, $z = b_k$ и на бесконечности.

Общее решение задачи в классе функций, имеющих интегрируемые особенности во всех узлах, выражается формулами разд. 1 при $p_k = q_k = 0$. После устранения полюсов $z = c_{2k-1}$ остается $N + 2Q - R_0 - R_1 + 2$ произвольных постоянных.

3. К рассмотренным периодическим задачам Гильберта — Римана и

Дирихле — Римана сводятся два класса задач теории упругости для орто- и изотропных упругих сред в условиях статики или дозвукового стационарного движения. Первый класс включает в себя задачи контакта упругой полуплоскости с периодической системой сцепленных, частично или полностью отслоившихся штампов и гибких накладок. Ко второму относятся задачи о деформации упругой плоскости, составленной из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и ослабленной вдоль линии склейки периодической системой щелей. На берегах щелей в полосе периодов в любом порядке чередуются участки свободной поверхности или полного сцепления со штампами, скользящего контакта и соприкасания с гладкими штампами и нерастяжимыми нитями.

Указанные задачи, но для конечного числа штампов, накладок и разрезов, образующих контуры L и M, были решены [1—4, 8] путем сведения их к задачам Гильберта — Римана для одного или нескольких комплексных потенциалов. В периодическом случае формы решения этих задач можно сохранить. Тогда, очевидно, останутся прежними все коэффициенты задач Гильберта — Римана, и только контуры L, M будут теперь в (1.1), (1.2) периодически повторяться.

В качестве иллюстрации рассмотрим периодическую контактную задачу для упругой изотропной полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $y < 0$ в условиях статики. Пусть L_r, $r = 1, 2, 3$ — системы промежутков действительной оси $\langle a_{k2}, b_{k2}\rangle$, $k = 1, 2, \ldots, k_r$, L_4 — дополнение $L_1 \bigcup L_2 \bigcup \bigcup L_3$ до интервала $[0, 2\pi)$, $L_k \bigcap L_l = 0$, $k \neq l$ и пусть на участках L_1 имеет место полное сцепление полуплоскости со штампами, на L_2 — скользящий контакт со штампами, на L_3 — контакт с гибкими накладками, а на L_4 заданы нормальные и касательные напряжения.

Выпишем граничные условия задачи в пределах одного периода:

$$u'(x) + iv'(x) = g_0(x),\ g_0(x) = g_{01}(x) + ig_{02}(x),\ x \in L_1 \qquad (3.1)$$

$$v'(x) = v_0(x),\ \tau_{xy}(x) = 0,\ x \in L_2 \qquad (3.2)$$

$$u'(x) = u_0(x),\ \sigma_y(x) = 0,\ x \in L_3 \qquad (3.3)$$

$$\sigma_y(x) = \sigma_0(x),\ \tau_{xy}(x) = \tau_0(x),\ x \in L_4 \qquad (3.4)$$

считая, что заданные функции удовлетворяют условию Гельдера; штрих означает производную по x.

Решение задачи будем искать в форме Мусхелишвили [9]:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar z) + (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)} \qquad (3.5)$$

$$2\mu(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) + \Phi(\bar z) - (z - \bar z)\overline{\Phi'(z)}$$

$$\Phi(z) = {}^1/_4(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + 2i\mu(\varkappa + 1)^{-1}\varepsilon^\infty + o(1),\ z \to -i\infty \qquad (3.6)$$

где $\varkappa = 3 - 4\nu$; ν и μ — коэффициент Пуассона и модуль сдвига материала полуплоскости; σ_y^∞ и τ_{xy}^∞ — проникающие на бесконечность нормальное и касательное напряжения, $\sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty = {}^1/_2\pi^{-1}(Y - iX)$, (X, Y) — главный вектор внешних усилий, приложенных к границе в периоде $[0, 2\pi]$; σ_x^∞ и ε^∞ — растягивающее напряжение и вращение на бесконечности (их задание эквивалентно постановке условия периодичности или квазипериодичности перемещений).

Подставив (3.5) в (3.1)—(3.4), получим для нахождения $\Phi(z)$ периодическую комбинированную краевую задачу Гильберта — Римана (1.1), (1.2), в которой

$$M^1 = L_1,\ M^2 = L_4,\ L^1 = L_2,\ L^2 = L_3,\ G = \varkappa$$

$$g(x) = 2\mu g_0(x),\ x \in M^1;\ g(x) = -\sigma_0(x) + i\tau_0(x),\ x \in M^2$$

$$f^{\pm}(x) = 2\mu(\varkappa + 1)^{-1} v_0(x),\ x \in L^1;\ f^{\pm}(x) = 2\mu(\varkappa + 1)^{-1} u_0(x),\ x \in L^2$$

Если условие (3.2) или (3.3) отсутствует, краевая задача (1.1), (1.2) переходит в комбинированную задачу Дирихле — Римана.

Дополнительными условиями, определяющими решение задачи теории упругости (3.1)—(3.4), в зависимости от характера связанности штампов и накладок, служат значения главных векторов нормальных и касательных усилий, приложенных к штампам и накладкам, а также величины скачков перемещений (натягов) между ними. Общее количество этих параметров, включая характеристики напряженно-деформированного состояния полуплоскости на бесконечности, очевидно, совпадает с числом произвольных постоянных в решении соответствующей комбинированной краевой задачи.

4. *Пример* 1. Пусть в пределах одного периода с границей полуплоскости соприкасаются два плоских штампа, один из которых — на участке $[a, b]$ — сцеплен с нею, а другой — на участке $[c, d]$ — находится в состоянии проскальзывания. Граничные условия этой задачи описываются соотношениями (3.1), (3.2), (3.4) при $g_0(x) = v_0(x) = \sigma_0(x) = \tau_0(x) \equiv 0$, $L_1 = [a, b]$, $L_2 = [c, d]$. Ее непериодический вариант рассмотрен в [2].

Каноническое решение получившейся задачи Дирихле — Римана строится по формулам (1.14), (2.1), при $N = 1$, $s_1 = a$, $t_1 = b$, $a_1 = c$, $b_1 = d$, $n_1 = 0$. Имеем

$$X(z) = e^{i\varphi(z)} \sqrt{\frac{S(z-b)}{S(z-a)}},\quad \varphi(z) = -\frac{\gamma Y(z)}{2} \int_a^b \frac{dt}{Y(t)\,S(t-z)} \tag{4.1}$$

$$Y(z) = \sqrt{S(z-c)S(z-d)},\quad Y(t) = -\sqrt{S(c-t)S(d-t)},\quad t \in [a, b]$$

Вычисляя интеграл в (2.7) путем сведения к табличному на плоскости $w = e^{iz}$, после некоторых преобразований получим

$$\varphi(z) = 2\gamma \ln\left[\frac{\sqrt{S(d-b)\,S(z-c)} + \sqrt{S(c-b)\,S(z-d)}}{\sqrt{S(d-a)\,S(z-c)} + \sqrt{S(c-a)\,S(z-d)}} \sqrt{\frac{S(z-a)}{S(z-b)}}\right] \tag{4.2}$$

Далее, согласно разд. 2 и (1.19), (1.21), будем иметь

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = A_{11} + iA_{12}\sqrt{\frac{S(z-d)}{S(z-c)}} + C_0 + \frac{i\,(D_{11}\cos{}^1/_2 z + D_{12}\sin{}^1/_2 z)}{\sqrt{S(z-c)\,S(z-d)}} \tag{4.3}$$

Подставим (4.3) в (4.1). Выполнив тригонометрические преобразования, представим общее решение задачи в виде

$$\Phi(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{S(z-a)\,S(z-b)}}\left[P(z) + \frac{iQ(z)}{\sqrt{S(z-c)\,S(z-d)}}\right] \tag{4.4}$$

$$P(z) = A_1 \cos{}^1/_2 (z - a_*) + A_2 \sin{}^1/_2 (z - a_*),\quad a_* = {}^1/_2 (a + b) \tag{4.5}$$

$$Q(z) = C_1 \cos(z - c_*) + C_2 \sin(z - c_*) + C_3,\quad c_* = {}^1/_4 (a + b + c + d)$$

A_j, C_j — новые произвольные действительные постоянные.

Выпишем, согласно (4.4), (4.5), (4.2) и (3.5), значения нормальных напряжений на участке проскальзывания

$$\sigma_y(x) = -\frac{2}{\sqrt{S(x-a)S(x-b)}}\left[P(x)\operatorname{sh}\varphi_0(x) + \frac{Q(x)\operatorname{ch}\varphi_0(x)}{\sqrt{S(x-c)S(d-x)}}\right] \quad (4.6)$$

$$\varphi_0(x) = \gamma\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{S(c-a)S(d-x)}{S(d-a)S(x-c)}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{S(c-b)S(d-x)}{S(d-b)S(x-c)}}\right]$$

где, очевидно, $\varphi_0(x) \geqslant 0$ при $x \in [c, d]$.

Перейдем к определению произвольных постоянных. Условия на бесконечности порождают на основании (3.5), (3.6) систему линейных алгебраических уравнений относительно A_1, A_2, C_1, C_2:

$$[iA_1 + A_2 - 2(iC_1 + C_2)]\exp(i\beta_0) = {}^1/_4(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + 2i\mu(\varkappa+1)^{-1}\varepsilon^\infty \quad (4.7)$$

$$[iA_1 + A_2 + 2(iC_1 + C_2)]\exp(-i\beta_0) = {}^1/_4\sigma_x^\infty - {}^3/_4\sigma_y^\infty - 2i\mu(\varkappa+1)^{-1}\varepsilon^\infty - i\tau_{xy}^\infty$$

$$\beta_0 = \varphi(-i\infty) = 2\gamma\ln[(\sqrt{e^{id}-e^{ib}} + \sqrt{e^{ic}-e^{ib}})(\sqrt{e^{id}-e^{ia}} + \sqrt{e^{ic}-e^{ia}})^{-1}] \quad (4.8)$$

Если штампы связаны между собой, то постоянная C_3 находится затем из условия

$$\int_b^c v'(x)\,dx = 0 \quad (4.9)$$

Если же штампы могут перемещаться независимо, без поворотов, и известны внешние усилия (X, Y_1) и Y_2, приложенные соответственно к отрезкам $[a, b]$ и $[c, d]$[2], то для определения C_3 следует проинтегрировать выражение (4.6) для контактных напряжений под проскальзывающим штампом

$$\int_c^d \sigma_y(x)\,dx = Y_2 \quad (4.10)$$

Отметим, наконец, что условие механической осуществимости $\sigma_y \leqslant 0$ при $x \in [c, d]$ налагает ограничения на геометрические и силовые параметры задачи.

5. *Пример* 2. Пусть концы участков L_1 и L_2 совпадают, что соответствует контакту с полуплоскостью периодической системы одиночных штампов с отслоившимся краем.

Каноническое решение комбинированной краевой задачи выражается той же формулой (4.1), в которой при $c = b$ вместо (4.2) и (4.8) получим

$$\varphi(z) = 2\gamma\ln[\sqrt{S(d-b)S(z-a)}(\sqrt{S(d-a)S(z-c)} + \sqrt{S(b-a)S(z-d)})^{-1}] \quad (5.1)$$

$$\beta_0 = \varphi(-i\infty) = \gamma\ln[\sqrt{e^{id}-e^{ib}}(\sqrt{e^{id}-e^{ia}} + \sqrt{e^{ib}-e^{ia}})^{-1}] \quad (5.2)$$

Аналогично (4.4) представим общее решение задачи в виде:

$$\Phi(z) = \frac{e^{i\varphi(z)}}{\sqrt{S(z-a)}}\left[\frac{P(z)}{\sqrt{S(z-b)}} + \frac{iQ(z)}{\sqrt{S(z-d)}}\right] \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} P(z) &= A_1\cos{}^1/_2(z-a_*) + A_2\sin{}^1/_2(z-a_*),\quad a_* = {}^1/_2(a+b) \\ Q(z) &= C_1\cos{}^1/_2(z-b_*) + C_2\sin{}^1/_2(z-b_*),\quad b_* = {}^1/_2(c+d) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Произвольные постоянные определяются по условиям на бесконечности. Из (5.3), (5.4), (3.6) получим

$$(V_1 - V_2)\exp(i\beta_0) = {}^1/_4(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + 2i\mu(\varkappa+1)^{-1}\varepsilon^\infty,\quad V_1 = iA_1 + A_2 \quad (5.5)$$

$$(V_1 + V_2)\exp(-i\beta_0) = {}^3/_4\sigma_y^\infty - {}^1/_4\sigma_x^\infty + 2i\mu(\varkappa+1)^{-1}\varepsilon^\infty + i\tau_{xy}^\infty,\quad V_2 = C_1 - iC_2$$

Пусть к каждому штампу приложена только вертикальная сила, поле на бесконечности отсутствует. Тогда $\sigma_y^\infty = {}^1/_2\pi^{-1}Y$, $\tau_{xy}^\infty = \varepsilon^\infty = \sigma_x^\infty = 0$, и, решая (5.5), будем иметь ($k = 1, 2$):

$$8\pi V_k = -w_k Y,\ w_1 = \cos\beta_0 + 2i\sin\beta_0,\ w_2 = 2\cos\beta_0 + i\sin\beta_0 \tag{5.6}$$

Выпишем выражения контактных напряжений на участке проскальзывания $x \in [b, d]$:

$$\sigma_y(x) = \frac{Y}{4\pi\sqrt{S(x-a)}}\left[\frac{\operatorname{Im} W_1(x)\operatorname{sh}\varphi_0(x)}{\sqrt{S(x-b)}} + \frac{\operatorname{Re} W_2(x)\operatorname{ch}\varphi_0(x)}{\sqrt{S(d-x)}}\right]$$

$$\varphi_0(x) = \gamma\operatorname{arctg}\{[S(b-a)S(d-x)]^{1/2}[S(d-a)S(x-b)]^{-1/2}\},\ 0 \leqslant \varphi_0(x) \leqslant {}^1/_2\pi\gamma$$

$$W_1(x) = w_1\exp[{}^1/_2 i(x-a_*)],\ W_2(x) = w_2\exp[{}^1/_2 i(b_*-x)] \tag{5.7}$$

и на участке сцепления $x \in [a, b]$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \frac{(\varkappa+1)Ye^{i\varphi_0(x)}}{8\pi\sqrt{\varkappa S(x-a)}}\left[\frac{i\operatorname{Im} W_1(x)}{\sqrt{S(b-x)}} - \frac{\operatorname{Re} W_2(x)}{\sqrt{S(d-x)}}\right] \tag{5.8}$$

Их асимптотика в узловых точках имеет вид:

$$\sigma_y = \sigma_0 + O(\sqrt{b-x}),\ \tau_{xy} = K_{IIb}[2\pi(b-x)]^{-1/2} + O(\sqrt{b-x}),\ x \to b-0$$

$$\sigma_y = K_{Ib}[2\pi(x-b)]^{-1/2} + \sigma_0 + O(\sqrt{x-b}),\ x \to b+0 \tag{5.9}$$

$$\sigma_y = K_{Id}[2\pi(d-x)]^{-1/2} + O(\sqrt{d-x}),\ x \to d-0$$

$$K_{Ib} = \frac{K_{IIb}(\varkappa-1)}{\varkappa+1},\quad \sigma_0 = \frac{(\varkappa+1)Y\rho_2\cos[\theta_2 + {}^1/_2(d-a_*)]}{8\pi\sqrt{\varkappa S(b-a)S(d-b)}} \tag{5.10}$$

$$K_{IIb} = \frac{(\varkappa+1)Y\rho_1\sin[\theta_1 + {}^1/_4(b-a)]}{4\sqrt{\pi\varkappa S(b-a)}},\quad K_{Id} = \frac{Y\rho_2\cos[\theta_2 - {}^1/_4(d-a)]}{2\sqrt{\pi S(d-a)}}$$

$$\rho_k e^{i\theta_k} = w_k,\ k = 1, 2$$

Из (5.8) следует, что контактные напряжения будут сжимающими на всем участке проскальзывания $[c, d]$, если выполнены неравенства

$$Y\operatorname{Im} W_1(x) \leqslant 0,\ Y\operatorname{Re} W_2(x) \leqslant 0 \tag{5.11}$$

Необходимое условие для (5.11) $K_{Ib} \leqslant 0$ и $K_{Id} \leqslant 0$ согласно (5.10), приводит к соотношениям

$$Y\sin[\theta_1 + {}^1/_4(b-a)] \leqslant 0,\ Y\cos[\theta_2 + {}^1/_4(d-a)] \leqslant 0 \tag{5.12}$$

Достаточность условий (5.12) будет, очевидно, иметь место при малых длинах штампов, $d - a \ll 2\pi$. Здесь по принципу Сен-Венана применимы результаты [2], где достаточность строго доказана.

Однако и в общем случае периодической задачи сохраняются качественные особенности решения, отмеченные в [2] при рассмотрении непериодического случая.

При фиксированной длине зоны сцепления тригонометрические неравенства (5.11) ограничивают возможную длину единственного участка контакта под отслоившимся краем штампа значениями из счетного множества сужающихся интервалов.

При невыполнении неравенств (5.11) или (5.12) контакт в надрезанной части штампа осуществляется на двух или более участках.

Полная длина надрезанной части может быть больше длины участка проскальзывания. При этом, если $K_{Id} = 0$, то в точке $x = d$ имеет место плавное прилегание контактных поверхностей.

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений K_{Ib}, согласно (5.10), (5.12), неположителен. Поэтому трещина отслаивания может распространяться лишь за счет касательных напряжений. В своем развитии она проходит счетное множество состояний, характеризующихся соотношениями $K_{IIb} = K_{Ib} = 0$. Если длины участков проскальзывания и сцепления удовлетворяют этому условию, трещина устойчива и ее дальнейшее развитие может происходить лишь за счет каких-либо неупругих факторов (например, пластичность, температура, коррозия).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* О некоторых краевых задачах и их приложениях в теории упругости // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. 1984. Т. 172. С. 7—13.
2. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 4. С. 663—673.
3. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 2. С. 284—293.
4. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* О дозвуковом стационарном движении штампов и гибких накладок по границе упругой полуплоскости и составной плоскости//ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 1. С. 134—144.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
6. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 53—61.
7. *Слепян А. Л.* О разрешимости системы нелинейных уравнений, возникающих в комбинированной задаче Гильберта — Римана // Сообщ. АН Груз. ССР. 1988. Т. 129. № 3. С. 477—479.
8. *Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М.* Динамические контактные задачи для ортотропной упругой полуплоскости и составной плоскости // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 633—641.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
25.IX.1990