Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. **М. А. Рвачев**

ФУНКЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЪЕМАХ

Показано, что в пространственно-неодносвязном объеме функции напряжений существуют только в случае, когда напряжения таковы, что суммарное воздействие на объем со стороны каждой полости равно нулю. Найден общий вид произвольного статически возможного поля напряжений в многосвязном теле. Исследована неоднозначность определения тензора функций напряжений по заданному полю напряжений. На основании этого получено общее выражение для статически возможных полей напряжений в многосвязном теле, удовлетворяющих на части поверхности тела нулевым граничным условиям.

1. Известно [1—3], что поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, удовлетворяющее в объеме V условиям равновесия

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0 \tag{1.1}$$

выражается через функции напряжений. Впоследствии это утверждение было обобщено [4] на случай тензора напряжений с интегрируемыми компонентами, откуда, в частности, следует, что функции напряжений существуют и в том случае, когда поле $\boldsymbol{\sigma}$ разрывно и удовлетворяет на поверхности разрыва S_p дополнительным условиям равновесия

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma}^- \text{ на } S_p \tag{1.2}$$

где $\mathbf{v}$ — нормаль к S_p, $\boldsymbol{\sigma}^+$ и $\boldsymbol{\sigma}^-$ — предельные значения $\boldsymbol{\sigma}$, получаемые при стремлении точки $\mathbf{x}$ к поверхности S_p с разных сторон. (Все рассматриваемые здесь поверхности и ограничивающие их линии предполагаются гладкими и регулярными [5], а функции — имеющими непрерывные производные используемых порядков всюду, кроме, возможно, некоторых поверхностей разрыва, причем в этом случае предполагается существование конечных пределов функций и их производных при приближении к поверхности разрыва с каждой стороны.) Путем введения тензора функций напряжений $\boldsymbol{\varphi}$ было сформулировано инвариантное утверждение [6—8]: уравнения (1.1), (1.2) выполняются тогда и только тогда, когда

$$\boldsymbol{\sigma} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{\varphi})^* = \operatorname{Ink}\boldsymbol{\varphi} \tag{1.3}$$

Отметим, что во всех перечисленных работах подразумевалось, что объем V односвязен. Вопрос об условиях существования функций напряжений в многосвязных объемах ранее, по-видимому, не ставился.

Покажем сначала, что в случае многосвязного тела равенство (1.3), вообще говоря, не следует из (1.1), (1.2), т. е. для существования функций напряжений на напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ действительно должны быть наложены дополнительные ограничения. Предположим, что равенство (1.3) имеет место, тогда по формуле Стокса получим

$$\mathbf{F}(\sigma, S) = \iint\limits_S \mathbf{ds}\cdot\sigma = \iint\limits_S \mathbf{ds}\cdot(\nabla\times(\nabla\times\varphi)^*) = \oint\limits_{\partial S} \mathbf{dx}\cdot(\nabla\times\varphi)^* \qquad (1.4)$$

где поверхность $S \subset V$, $\mathbf{F}(\sigma, S)$ — суммарная сила, действующая на S со стороны конца вектора $\mathbf{ds}$, направление обхода контура ∂S при вычислении криволинейного интеграла согласовано обычным образом с направлением вектора $\mathbf{ds}$. В частности, если поверхность S замкнута, то из (1.4) следует, что $\mathbf{F}(\sigma, S) = 0$ для любого поля напряжений σ. Пусть теперь σ — поле напряжений в пространственно-неодносвязном теле V, содержащем полость, со стороны которой на V действует сила $\mathbf{F}_1 \neq 0$, и замкнутая поверхность S охватывает эту полость. Если бы (1.3) имело место, то из сказанного и равновесия отсекаемой поверхностью S части V следовало бы, что $\mathbf{F}_1 = 0$, что противоречит предположению.

Условия, которым должно удовлетворять поле напряжений σ, для того чтобы существовал тензор функций напряжений определяет

Теорема 1. Пусть содержащиеся в пространственно- и поверхностно-многосвязном теле V полости ограничены замкнутыми поверхностями S_i, $i = 1, \ldots, n$, $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Тогда удовлетворяющее уравнениям (1.1), (1.2) поле напряжений представимо в виде (1.3) в том и только том случае, когда

$$\mathbf{F}(\sigma, S_i) = 0, \ \mathbf{M}(\sigma, S_i) = 0, \ i = 1, \ldots, n \qquad (1.5)$$

Функция $\mathbf{F}(\sigma, S)$ определена формулой (1.4), а $\mathbf{M}(\sigma, S)$ — суммарный момент (относительно некоторой фиксированной точки) сил, действующих на поверхность $S \subset V$ с одной из ее сторон.

Доказательство. Необходимость первого из равенств (1.5) следует из проведенных выше рассуждений. Точно так же доказывается и необходимость второго равенства.

Докажем достаточность условий (1.5). Для этого покажем, что поле σ может быть продолжено с сохранением условий (1.1), (1.2) на односвязный объем $V^c \supset V$, и применим к полю напряжений на V^c результаты [4] о существовании функций напряжений в односвязных объемах.

Рассмотрим полость V_i, ограниченную поверхностью S_i, как упругое тело, нагруженное по поверхности распределенной нагрузкой $\mathbf{\nu}\cdot\sigma$. В силу (1.5) эта нагрузка самоуравновешена, поэтому внутри тела V_i установится поле напряжений σ_i, удовлетворяющее условиям (1.1). Тело $V' = V \cup V_1 \cup \ldots \cup V_n$ является пространственно-односвязным, и определенное на нем поле напряжений σ', совпадающее с σ на V и с σ_i на V_i, удовлетворяет условиям (1.1), (1.2).

Если тело V' является также и поверхностно-односвязным, то на этом доказательство заканчивается; в противном случае пусть V^c — содержащий V' односвязный объем: $V^c \supset V'$. В силу пространственной односвязности V' объем $V'' = V^c \setminus V'$ связен, и его поверхность $\partial V''$ состоит из поверхности $\partial V'$ объема V' и оставшейся части поверхности $S' = \partial V'' \setminus \partial V'$, причем $S' \neq \varnothing$. Рассмотрим V'' как упругое тело, нагруженное по поверхности $\partial V'$ распределенной нагрузкой $\mathbf{\nu}\cdot\sigma'$ (вообще говоря, не самоуравновешенной) и догруженное по S' до нагрузки, уравновешенной на $\partial V''$ в целом (например, защемленное на S'). Пусть $\boldsymbol{\sigma}''$ — напряжения в V''. Поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}^c$, определенное в односвязном теле V^c и совпадающее с $\boldsymbol{\sigma}'$ и $\boldsymbol{\sigma}''$ на V' и V'' соответственно, удовлетворяет условиям (1.1), (1.2) и является искомым продолжением $\boldsymbol{\sigma}$, что и требовалось.

Как видно из теоремы 1, поверхностная многосвязность тела не препятствует существованию функций напряжений; ограничения (1.5) появляются только тогда, когда тело V содержит полости. В этом случае общий вид удовлетворяющих (1.1), (1.2) полей напряжений можно получить, добавляя в (1.3) слагаемые, компенсирующие воздействие на V со стороны каждой полости V_i. Именно, поставим в соответствие полю напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ $6n$-мерный вектор

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, S_1);\ \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, S_1);\ \ldots\ \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, S_n);\ \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, S_n))$$

и предположим, что известны удовлетворяющие (1.1), (1.2) тензорные поля $\boldsymbol{\sigma}_j$ ($j = 1, \ldots, 6n$), такие, что соответствующие им векторы $\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}_j)$ линейно независимы. Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. Симметричное тензорное поле $\boldsymbol{\sigma}$ на пространственно $(n+1)$-связном поверхностно-многосвязном объеме удовлетворяет условиям (1.1), (1.2) в том и только том случае, когда

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{Ink}\boldsymbol{\varphi} + \sum_{j=1}^{6n} c_j\boldsymbol{\sigma}_j \tag{1.6}$$

для некоторых симметричного тензора $\boldsymbol{\varphi}$ и чисел c_j.

2. По заданному тензору $\boldsymbol{\sigma}$ из равенства (1.3) тензор $\boldsymbol{\varphi}$ определяется неоднозначно, так как равенство

$$\operatorname{Ink}\boldsymbol{\varphi} \equiv 0 \text{ на } V \tag{2.1}$$

выполнено для ненулевых тензоров $\boldsymbol{\varphi}$ вида

$$\boldsymbol{\varphi} = {}^1/_2\,[\nabla\mathbf{q} + (\nabla\mathbf{q})^*] = \operatorname{def}\mathbf{q} \tag{2.2}$$

где $\mathbf{q}$ — произвольное векторное поле на V.

Если объем V односвязен, то ядро оператора Ink полностью описывается тензорами вида (2.2) [6].

Исследуем структуру этого ядра в многосвязном случае.

Пусть L — ориентированная кривая, обозначим

$$\mathbf{p}(L, \boldsymbol{\varphi}) = \int d\mathbf{x}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\varphi})^*$$

$$\mathbf{q}(L, \boldsymbol{\varphi}) = \int d\mathbf{x}\cdot(\boldsymbol{\varphi} - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})\times(\nabla\times\boldsymbol{\varphi}))^*,\quad \lambda(L, \boldsymbol{\varphi}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) \tag{2.3}$$

где $\mathbf{x}_1$ — фиксированная, а $\mathbf{x}$ — «текущая» точка (по которой идет интегрирование), интегралы (2.3) вычисляются по кривой L в направлении, определенном ее ориентацией.

Лемма 1. Тензор $\boldsymbol{\varphi}$ представим в виде (2.2) в том и только том случае, когда

$$\lambda(L, \boldsymbol{\varphi}) = 0 \tag{2.4}$$

для любой замкнутой кривой $L \subset V$.

Доказательство. Используем геометрическую аналогию [6]. Если рассматривать $\mathbf{q}$ как вектор перемещений, $\boldsymbol{\varphi}$ — как тензор малых деформаций, то условие (2.1) будет условием совместности деформаций φ, а формулы (2.3) суть формулы Чезаро, восстанавливающие по заданным деформациям вектор перемещений $\mathbf{q}$ и его вихрь $-2\mathbf{p}$. Отсюда сразу вытекает утверждение леммы.

Из приведенной геометрической аналогии следует также, что для поверхностно-многосвязного тела (например, тора) ядро оператора Ink шире, чем множество тензоров вида (2.2), так как в этом случае из локальной совместности деформаций, вообще говоря, не следует совместность деформаций в целом.

Для дальнейшего анализа нужны следующие определения.

Замкнутые ориентированные кривые L' и L'' назовем эквивалентными в объеме V, если непрерывной деформацией по V кривую L' можно совместить либо с L'' (так, чтобы направления их обхода совпали), либо с кривой L_e'', которая отличается от L'' только участками, проходимыми одинаковое число раз в противоположных направлениях. Порожденные этим соотношением классы эквивалентности назовем циклами на множестве V и будем обозначать G.

Если два цикла G' и G'' совпадают, будем писать $G' \underset{V}{=} G''$. Цикл G, состоящий из кривых, эквивалентных стягиваемым в точку по V, назовем нулевым, и будем писать $G \underset{V}{=} 0$. Цикл, состоящий из тех же замкнутых кривых, что и цикл G, но с противоположным направлением обхода, обозначим через $-G$.

Введем понятие суммы циклов G_1 и G_2. Для этого заметим, что в силу связности V циклы G_1 и G_2 всегда содержат в качестве элементов кривые L_1 и L_2, имеющие общий участок L', проходимый по этим кривым в разных направлениях. Рассмотрим ориентированную кривую L'', которая получается из L_1 и L_2 после отбрасывания общей для них части L' с сохранением имевшейся на них ориентации. Порождаемый кривой L'' цикл и назовем суммой $G_1 + G_2$.

Разностью циклов $G' - G''$ назовем цикл $G' + (-G'')$. Произведение kG цикла на целое число определим как результат последовательного суммирования (вычитания) соответствующего числа циклов.

Можно проверить, что введенные операции превращают множество циклов в линейное пространство над кольцом целых чисел Z (которое изоморфно одномерным гомологиям V).

Совокупность циклов $\{G_k\}_{k=1}^{m}$ назовем базисом в пространстве циклов на V, если любой цикл является линейной комбинацией циклов G_k и ни один из G_k не является линейной комбинацией остальных циклов базиса.

Пространственно- и поверхностно-многосвязное тело (конечных размеров) V в общем случае ограничено $(n + 1)$-й связной поверхностью S_i ($S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$), где n — число полостей в теле, причем каждая поверхность S_i является связным ориентированным двумерным многообразием без края. Исходя из того, что каждая поверхность S_i гомеоморфна сфере с r_i ручками [9], можно доказать существование базиса в пространстве циклов (при этом $m = r_1 + \ldots + r_n$).

Покажем теперь, что если выполнено условие (2.1), то определяемая формулами (2.3) векторная функция λ постоянна на замкнутых кривых из одного и того же цикла, и поэтому может рассматриваться как функция $\lambda(G, \varphi)$, определенная на циклах.

Действительно, пусть $L', L'' \in G$ и $S \subset V$ — поверхность, по которой кривая L' может быть продеформирована в L_e''. Применяя формулу (1.4) к двусвязной поверхности S, при учете (2.1) и (2.3)

$$0 = \oint\limits_{\partial S} d\mathbf{x} \cdot (\nabla \times \varphi)^* = \mathbf{p}(L', \varphi) - \mathbf{p}(L_e'', \varphi) \tag{2.5}$$

В (2.5) учтено, что $\partial S = L' \bigcup L''$, причем направление обхода ∂S при вычислении криволинейного интеграла для одной из кривых L' или L_e'' (например, L_e'') противоположно ее ориентации. Аналогично может быть выведено и второе требуемое равенство $\mathbf{q}(L', \varphi) = \mathbf{q}(L'', \varphi)$.

Полученная таким образом векторная функция $\lambda(G, \varphi)$, определенная на циклах и удовлетворяющих условию (2.1) тензорных полях, оказывается линейной по G и по φ.

Лемма 2. Пусть $\{G_k\}_{k=1}^m$ — базис в пространстве циклов на V, $\mathbf{a}_k = (\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k)$, $k = 1, \ldots, m$,— произвольный набор фиксированных векторов из R^6 ($\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k \in R^3$).

Тогда найдется удовлетворяющее условию (2.1) симметричное тензорное поле φ, такое, что

$$\lambda(G_k, \varphi) = \mathbf{a}_k, \quad k = 1, \ldots, m \tag{2.6}$$

Доказательство. Фиксируем номер i ($1 \leqslant i \leqslant m$) и рассмотрим тор $V_i \supseteq V$ такой, что $G_i \underset{V_i}{\neq} 0$, $G_j \underset{V_i}{=} 0$ при $j \neq i$. Возможность построения такого тора следует из гомеоморфности поверхности объема V сферам с ручками: V_i получается «приклеиванием» лишних ручек.

Пусть $L \in G_i$ и поверхность S рассекает тор V_i на связное односвязное тело и пересекает L в единственной точке. Обозначим через V_ε^+ и V_ε^- ε-слои тора V_i, прилежащие к S с разных сторон, и определим векторную функцию $\mathbf{q}_i(\mathbf{x})$ ($\mathbf{q}_i \in R^3$) следующим образом:

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathbf{x} \in V_\varepsilon^- \\ \mathbf{q}_i - \frac{1}{2}\mathbf{p}_i \times \mathbf{x} & \text{при } \mathbf{x} \in V_\varepsilon^+ \end{cases}$$

для остальных $\mathbf{x} \in V_i$ функция $\mathbf{q}_i(\mathbf{x})$ доопределяется произвольным гладким образом. (Если рассматривать $\mathbf{q}_i(\mathbf{x})$ как вектор смещений, то слой V_ε^- неподвижен, а слой V_ε^+ смещен и повернут как жесткое целое.) Определим тензор φ_i как деформации, соответствующие смещению $\mathbf{q}_i$ по формулам Коши (2.2). Тогда $\mathrm{Ink}\, \varphi_i \equiv 0$, и в силу указанной выше геометрической аналогии

$$\lambda(L, \varphi_i) = \mathbf{a}_i \text{ и } \lambda(L', \varphi_i) = 0, \text{ если } L' \in G_j \text{ при } j \neq i.$$

Проведя такие построения для каждого i и положив $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_m$, получаем требуемое.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующее утверждение, описывающее ядро оператора Ink в многосвязном случае

Следствие 2. Пусть $\{G_k\}_{k=1}^m$ — базис в пространстве циклов на V, $\Lambda(\varphi) = (\lambda(G_1, \varphi), \ldots, \lambda(G_m, \varphi))$ и φ_i ($i = 1, \ldots, 6m$) — удовлетворяющие условию (2.1) тензорные поля, такие, что соответствующие им $6m$-мерные векторы $\Lambda(\varphi_i)$ линейно независимы.

Тогда φ удовлетворяет условию (2.1) в том и только том случае, когда

$$\varphi = \operatorname{def} \mathbf{q} + c_1\varphi_1 + \ldots + c_{6m}\varphi_{6m}$$

для некоторых векторного поля $\mathbf{q}$ и чисел c_i.

3. Рассмотрим задачу об определении через тензор функций напряжений (1.3) общего вида полей напряжений, удовлетворяющих кроме (1.1), (1.2) дополнительному граничному условию

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ на } S_F \subseteq \partial V \tag{3.1}$$

где ∂V — поверхность многосвязного тела V.

Для односвязного объема и случая $S_F = \partial V$ было показано [10], что общее решение системы уравнений (1.1), (1.2) и (3.1) можно получить в виде

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{Ink}(\omega^2\boldsymbol{\psi}) \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\psi}$ — произвольный симметричный тензор, а (фиксированная) функция $\omega(\mathbf{x})$ удовлетворяет условиям

$$\omega(\mathbf{x}) = 0, \; \partial\omega(\mathbf{x})/\partial\mathbf{v} \neq 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in S_F \tag{3.3}$$

$$\omega(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x} \in V \setminus S_F$$

Если $S_F \neq \partial V$, то (3.2), вообще говоря, не является общим решением, даже если объем V односвязен. Действительно, пусть, например, V — цилиндр, растягиваемый вдоль своей оси, боковая поверхность которого S_F свободна от нагрузок, S — поперечное сечение цилиндра, граница которого ∂S лежит на S_F: $\partial S \subset S_F$. Если бы представление (3.2) имело место (т. е. в (1.3) $\varphi = \omega^2\boldsymbol{\psi}$), то из первого равенства (3.3) следовало бы равенство нулю контурного интеграла в правой части (1.4), и суммарная сила в сечении S равнялась бы нулю, что противоречит предположению о растяжении цилиндра. Аналогичным образом можно получить поле напряжений внутри тора, вся поверхность которого свободна от нагрузок, не представимое в виде (3.2).

Совокупность полей напряжений в многосвязном объеме V, представимых в виде (3.2), описывает

Теорема 2. Пусть часть $S_U = \partial V \setminus S_F$ гладкой поверхности ∂V тела V конечных размеров состоит из попарно непересекающихся связных компонент S_i: $S_U = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_r$, $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$, и связные поверхности $S_k' \subset V$ $(k = 1, \ldots, t)$, ограниченные кривыми $\partial S_k' \subset S_F$, таковы, что они рассекают V на связное множество [1], но добавление любой секущей поверхности $S' \subset V$, такой, что $\partial S' \subset S_F$, делает это множество несвязным, и пусть

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, S_1), \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, S_1), \ldots, \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, S_r), \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, S_r), \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, S_1'),$$
$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, S_1'), \ldots, \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, S_t'), \mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, S_t')) \tag{3.4}$$

причем $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}, S)$ и $\mathbf{M}(\boldsymbol{\sigma}, S)$ определены в (1.4), (1.5).

Тогда удовлетворяющее уравнениям (1.1), (1.2) и (3.1) поле напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ представимо в виде (3.2) в том и только том случае, когда

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{3.5}$$

[1] Если $S_U = \varnothing$ или/ и удовлетворяющие данным условиям поверхности S_k не существуют, то принимаем $r = 0$ или / и $t = 0$ соответственно. При $r = t = 0$ условие (3.5) исчезает.

Доказательство. Достаточность доказывается так же, как в [10] для односвязного случая.

Докажем необходимость. Пусть напряжения σ удовлетворяют условиям (1.1), (1.2), (3.1) и (3.5). Из (3.1) и (3.5) следует условие (1.5) теоремы 1, поэтому найдется тензор φ', такой что выполнено условие (1.3).

Пусть L', $L'' \subset S_F$ — замкнутые ориентированные кривые. Можно показать, что если L', L'' принадлежат одному и тому же циклу на V, то

$$\lambda\,(L', \varphi') = \lambda\,(L'', \varphi') \tag{3.6}$$

Пусть $S' \subset V$, $S' \not\subset \partial V$,— поверхность, по которой L' можно продеформировать в L_e''. По условию теоремы поверхности S' и S_k' рассекают объем V на несвязные части V' и V''. Рассмотрим, например, V'. Поверхность объема V' состоит из S', части поверхности S_F и некоторых из поверхностей S_i, S_k'. Так как суммарные силы и моменты, действующие на каждую поверхность S_i, S_k' и любую часть S_F, равны нулю, то из условия равновесия объема V' равны нулю сила и момент, действующие на S'. Повторяя, далее, следующие за формулой (2.5) рассуждения, получим (3.6).

Таким образом, если считать элементами циклов только те кривые, которые лежат на S_F, то определенная формулами (2.3) векторная функция λ также может рассматриваться как функция циклов (хотя в этом случае $\mathrm{Ink}\,\varphi' \not\equiv 0$).

Пусть $\{G_k\}_{k=1}^{m}$ — базис в пространстве циклов и $\mathbf{a}_k = \lambda\,(G_k, \varphi')$. По лемме 2 найдется тензорное поле φ'', такое что $\mathrm{Ink}\,\varphi'' \equiv 0$ и $\lambda\,(G_k, \varphi'') = -\mathbf{a}_k$. Тогда суммарное поле $\varphi = \varphi' + \varphi''$ является тензором функций напряжений, задающим то же самое поле напряжений σ, что и φ', и таким, что $\lambda\,(G, \varphi) = 0$ для любой замкнутой кривой L, лежащей на S_F. Остальная часть доказательства совпадает с доказательством [10] для односвязного случая (начиная с формулы (2.6)).

Заметим, что в условии теоремы 2 достаточно требовать, чтобы равенство (3.5) выполнялось для любых $(r-1)$-й поверхностей S_i, например, для $S_1, \ldots, S_{r-1}$, так как из $\mathbf{N}\,(\sigma, S_1, \ldots, S_{r-1}) = 0$ и равновесия объема V в целом сразу следует, что $\mathbf{N}\,(\sigma, S_r) = 0$.

Пусть $r_1 = \max\,(r, 1)$, и предположим, что известны $6\,(r_1 + t - 1)$ полей напряжений σ_i, таких, что соответствующие им по формуле (3.4) векторы $\mathbf{N}\,(\sigma_i)$ линейно независимы. Используя теорему 2, общее решение рассматриваемой задачи можно получить в следующем виде.

Следствие 3. Поле напряжений σ удовлетворяет уравнениям (1.1), (1.2) и (3.1) в том и только том случае, когда

$$\sigma = \mathrm{Ink}\,(\omega^2\psi) + \sum_{i=1}^{6(r_1+t-1)} c_i\sigma_i \tag{3.7}$$

для некоторого симметричного тензора ψ и некоторых числовых коэффициентов c_i.

Формула (3.7) может быть использована для построения допускаемых вариаций при решении краевых задач механики деформируемого твердого тела на основании вариационного принципа Кастильяно. В отличие от результатов [10] эта формула применима для многосвязных тел и для случая $S_n \neq \partial V$. Конструктивность отыскания вариаций в виде (3.7) основана на том, что явные формулы для функции ω для областей практически произвольной формы могут быть получены методом R-функций [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Maxwell J. Cl.* On reciprocal figeres, frames and diagrams of forces // Trans. Roy. Soc. Edinburg. 1870. V. 26. P. 1—40.
2. *Morera G.* Suluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo // Atti della Rend. Accad. dei Lincei. 1892. V. 1. S. 5. P. 137—141.
3. *Beltrami E.* Osservazioni sulle nota precedente // Atti della Rend. Accad. dei Lincei. 1892. V. 1. S. 5. P. 141—142.
4. *Кузьмин Р. О.* О формулах Максвелла и Морера в теории упругости // Докл. АН СССР. 1945. Т. 49. № 5. С. 335—337.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас Е.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.
6. *Крутков Ю. А.* Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 200 с.
7. *Блох В. И.* Функции напряжений в теории упругости // ПММ. 1950. Т. 14. Вып. 4. С. 415—422.
8. *Finzi B.* Integrazione della equazione indefinite della Meccanica dei sistemi continue // Atti della Rend. Accad. dei Lincei. 1934. V. 19. S. 6. № 1. P. 578—584; № 2. P. 620—623.
9. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. М.: Мир, 1972. 277 с.
10. *Рвачёв М. А.* О статически возможных полях в односвязных объемах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 170—173.
11. *Рвачёв В. Л.* Теория R-фунций и некоторые ее приложения. Киев: Наук. думка, 1982. 551 с.

Винница

Поступила в редакцию
14.I.1991