Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 532.5 + 539.215

© 1992 г. П. А. Мазуров

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД В ТЕОРИЯХ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ И ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Предлагается общий подход к построению двойственных вариационных принципов для нелинейных задач фильтрационной консолидации и двухфазной фильтрации несжимаемой жидкости. При известных пористости и насыщенности вариационные принципы позволяют определять поля перемещений и напряжений в твердой фазе и поля давлений и скоростей фильтрации в жидкой фазе. Вариационные принципы выводятся из вариационных задач, решение которых эквивалентно выполнению определяющих соотношений между деформациями и напряжениями, скоростью фильтрации и градиентом давления. При помощи вариационных принципов показывается возможность расщепления задач консолидации и фильтрации на задачи, характеризующие поведение отдельных фаз. Построение вариационных принципов, таким образом, сводится к определенной схеме связи вариационных принципов для твердой и жидкой фаз.

1. Вариационный подход. Рассмотрим диссипативный процесс с объемной диссипацией, записываемой в виде суммы произведений

$$\Sigma = XY = X_1Y_1 + \ldots + X_nY_n$$

где $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — обобщенные силы, $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ — обобщенные скорости. Согласно гипотезе нормальной диссипации [1, 2] для любого реального термодинамического процесса существует потенциал диссипации $\varphi(Y)$, такой, что

$$X \in \partial\varphi(Y) \tag{1.1}$$

где $\varphi(Y)$ — выпуклый полунепрерывный снизу собственный функционал, X — субградиент функционала $\varphi(Y)$ в точке Y, $\partial\varphi(Y)$ — множество всех субградиентов функционала $\varphi(Y)$ в точке Y, состоявшее в случае гладкого $\varphi(Y)$ из одного элемента $\operatorname{grad}\varphi(Y)$. Вектор X будет соответствовать заданному вектору Y тогда и только тогда, когда X — субградиент функционала $\varphi(Y)$ в точке Y. Из (1.1) вытекает обратное соотношение [1, 2]

$$Y \in \partial\varphi^*(X) \tag{1.2}$$

где сопряженный потенциал диссипации $\varphi^*(X)$ — выпуклый полунепрерывный снизу собственный функционал, связанный с $\varphi(Y)$ преобразованием Юнга — Фенхеля [3]

$$\varphi^*(X) = \sup_Y [XY - \varphi(Y)]$$

При гладких выпуклых потенциалах $\varphi(Y)$, $\varphi^*(X)$ вместо (1.1), (1.2) записываются равенства

$$X = \operatorname{grad}\varphi(Y),\ Y = \operatorname{grad}\varphi^*(X)$$

Принято считать, что правила (1.1), (1.2) позволяющие формулировать соотношения между X и Y, определяют диссипативный механизм [2]. Если имеется два диссипативных механизма с потенциалами Ψ_1 (Y), Ψ_2 (Y), то можно определить новый механизм через потенциал

$$\varphi(Y) = \Psi_1(Y) + \Psi_2(Y)$$

В общем случае φ^* (X) не равен сумме потенциалов Φ_1 (X), Φ_2 (X), сопряженных соответственно с Ψ_1 (Y), Ψ_2 (Y). Диссипативные механизмы Ψ_1 (Y), Ψ_2 (Y) считаются несвязанными [2], если Ψ_1 (Y) не зависит от переменных Y_α, от которых зависит Ψ_2 (Y), а Ψ_2 (Y) не зависит от переменных Y_α, от которых зависит Ψ_1 (Y). В этом случае можно записать

$$\varphi(Y) = \varphi(Y_1, Y_2) = \Psi_1(Y_1) + \Psi_2(Y_2),\ Y_1 \in E_p,\ Y_2 \in E_q$$

$$\varphi^*(X) = \varphi^*(X_1, X_2) = \Phi_1(X_1) + \Phi_2(X_2),\ X_1 \in E_p,\ X_2 \in E_q$$

где E_p, E_q — два взаимно дополняющих подпространства с размерностями p и q, $p + q = n$.

Следующие утверждения эквивалентны [1]:

a) $X' \in \partial\varphi(Y')$,

b) $\varphi(Y) - X'Y$ достигает минимума по Y в точке $Y = Y'$,

*a**) $Y' \in \partial\varphi^*(X')$,

*b**) $\varphi^*(X) - XY'$ достигает минимума по X в точке $X = X'$.

Отсюда следует, что для действительно происходящего в области Ω процесса (X°, Y°) величина Y°, соответствующая X°, определится из решения задачи

$$\inf_Y B_1^\circ(Y) = \inf_Y \int_\Omega [\varphi(Y) - X^\circ Y]\, d\Omega \qquad (1.3)$$

В такой постановке определение Y° тривиально, так как необходимо знать силы ($X_1^\circ, \ldots, X_n^\circ$) во всей области Ω. Возникает задача преобразования интеграла $\int_\Omega X^\circ Y\, d\Omega$ с использованием имеющихся ограничений в интеграл по границе Г области Ω. Для определения Y° в таком случае будет достаточно знания сил ($X_1^\circ, \ldots, X_n^\circ$) на границе Г. Подобная задача возникает и при определении величины X°

$$\inf_X B_2^\circ(X) = \inf_X \int_\Omega [\varphi^*(X) - XY^\circ]\, d\Omega \qquad (1.4)$$

Гипотеза нормальной диссипации в виде задач (1.3), (1.4) представляет собой принцип наименьшего рассеяния энергии [4, 5] при учете более широкого класса функционалов φ (Y), φ^* (X).

Из потенциала диссипации φ (Y) преобразованием Юнга — Фенхеля по части переменных Y_α определяются частично сопряженные потенциалы. Так для системы с двумя несвязанными диссипативными механизмами Ψ_1 (Y_1), Ψ_2 (Y_2) преобразованием по переменным, входящим в Y_2, получим частично сопряженный потенциал

$$\varphi(Y_1, X_2) = \sup_{Y_2} [X_2 Y_2 - \varphi(Y_1, Y_2)] = \Phi_2(X_2) - \Psi_1(Y_1)$$

Вариационная задача для построения вариационного принципа в переменных Y_1, X_2 будет иметь тогда вид

$$\inf_{\mathrm{Y}_1}\sup_{\mathrm{X}_2} B_3^\circ(\mathrm{Y}_1, \mathrm{X}_2) = \inf_{\mathrm{Y}_1}\sup_{\mathrm{X}_2} \int_\Omega [\Psi_1(\mathrm{Y}_1) - \mathrm{X}_1^\circ\mathrm{Y}_1 - \Phi_2(\mathrm{X}_2) + \mathrm{X}_2\mathrm{Y}_2^\circ)]\, d\Omega \tag{1.5}$$

Вместо задач (1.3), (1.4), (1.5) при построении вариационных принципов можно исходить из вариаций

$$\delta B_1(\mathrm{Y}) = \int_\Omega [\delta\varphi(\mathrm{Y}) - \mathrm{X}\delta\mathrm{Y}]\, d\Omega, \quad \delta B_2(\mathrm{X}) = \int_\Omega [\delta\varphi^*(\mathrm{X}) - \mathrm{Y}\delta\mathrm{X}]\, d\Omega$$

$$\delta B_3(\mathrm{Y}_1, \mathrm{X}_2) = \int_\Omega [\delta\Psi_1(\mathrm{Y}_1) - \mathrm{X}_1\delta\mathrm{Y}_1 - \delta\Phi_2(\mathrm{X}_2) + \mathrm{Y}_2\delta\mathrm{X}_2]\, d\Omega$$

равенство нулю которых

$$\delta B_1(\mathrm{Y}) = 0, \ \delta B_2(\mathrm{X}) = 0, \ \delta B_3(\mathrm{Y}_1, \mathrm{X}_2) = 0 \tag{1.6}$$

эквивалентно выполнению определяющих соотношений между Y и X. Здесь задача заключается в приведении вариаций $\delta B_1(\mathrm{Y})$, $\delta B_2(\mathrm{X})$, $\delta B_3(\mathrm{Y}_1, \mathrm{X}_2)$ к вариациям некоторых функционалов.

Вариационные задачи, подобные (1.3)—(1.6), можно записать для любых выпуклых потенциалов, связывающих произвольные двойственные переменные X, Y соотношением (1.1) или (1.2) и использовать при построении вариационных принципов.

2. Двухфазная фильтрация несжимаемой жидкости. Запишем уравнения неразрывности фаз, связь между давлениями в фазах и выражение для производства энтропии [6] в энергетическом представлении за счет движения жидких фаз относительно твердой при $T_1 \approx T_2 \approx \mathrm{const}$

$$(sm)_{,t} + \operatorname{div}(sm\mathbf{v}_1) = 0, \quad ((1-s)\,m)_{,t} + \operatorname{div}((1-s)\,m\mathbf{v}_2) = 0$$

$$p_1 - p_2 = p_c(s), \quad \Sigma = -\nabla p_1\mathbf{q}_1 - \nabla p_2\mathbf{q}_2$$

Здесь $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — скорости движения фаз, s — насыщенность первой фазы, m — пористость, $\mathbf{q}_1 = sm\mathbf{v}_1$, $\mathbf{q}_2 = (1-s)\,m\mathbf{v}_2$ — скорости фильтрации фаз, T_1, T_2 — абсолютные температуры в фазах.

Для замыкания уравнений используем гипотезу нормальной диссипации, согласно которой существуют выпуклые потенциалы диссипации

$$\varphi(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2), \ \varphi^*(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2), \text{ где } \mathrm{X}_1 = -\nabla p_1, \ \mathrm{X}_2 = -\nabla p_2, \ \mathrm{Y}_1 = \mathbf{q}_1, \ \mathrm{Y}_2 = \mathbf{q}_2.$$

Примем, что процесс диссипации представляется двумя несвязанными диссипативными механизмами, тогда

$$\varphi(\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2) = \Psi_1(\mathbf{q}_1) + \Psi_2(\mathbf{q}_2), \quad \varphi^*(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) = \Phi_1(\nabla p_1) + \Phi_2(\nabla p_2) \tag{2.1}$$

где Ψ_i, Φ_i — диссипативный и сопряженный диссипативный потенциалы для жидкой фазы [7].

Систему уравнений двухфазной фильтрации при учете соотношений (2.1) запишем в виде:

$$-\mathbf{q}_i \in \partial\Phi_i(\nabla p_i) \text{ или } -\nabla p_i \in \partial\Psi_i(\mathbf{q}_i), \ i = 1, 2 \tag{2.2}$$

$$p_1 - p_2 = p_c(s) \tag{2.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_1 + \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = 0 \tag{2.4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{q}_1 = -ms_{,t} \text{ или } \operatorname{div} \mathbf{q}_2 = ms_{,t} \tag{2.5}$$

В случае гладких потенциалов законы фильтрации фаз (2.2) имеют вид

$$-q_{1i} = \partial\Phi_1 (\nabla p_1)/\partial p_{1,i} \text{ или } -p_{1,i} = \partial\Psi_1 (\mathbf{q}_1)/\partial q_{1i}$$

$$-q_{2i} = \partial\Phi_2 (\nabla p_2)/\partial p_{2,i} \text{ или } -p_{2,i} = \partial\Psi_2 (\mathbf{q}_2)/\partial q_{2i}$$

где q_{1i}, q_{2i} и $p_{1,i}$, $p_{2,i}$ — компоненты соответственно $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ и ∇p_1, ∇p_2.

В частности, потенциалы диссипации $\Phi_1 (\nabla p_1)$, $\Phi_2 (\nabla p_2)$ могут иметь следующие выражения [7]:

$$\Phi_1 (\nabla p_1) = \int\limits_0^{|\nabla p_1|} \varphi_1 (\alpha, s)\, d\alpha, \quad \Phi_2 (\nabla p_2) = \int\limits_0^{|\nabla p_2|} \varphi_2 (\alpha, s)\, d\alpha$$

где выпуклость функционалов $\Phi_1 (\nabla p_1)$, $\Phi_2 (\nabla p_2)$ обеспечивается свойствами функций $\varphi_1 (\alpha, s)$, $\varphi_2 (\alpha, s)$. Функции $\varphi_1 (\alpha, s)$, $\varphi_2 (\alpha, s)$ при линейных законах фильтрации

$$\mathbf{q}_i = -k \,(f_i(s)/\mu_i)\, \nabla p_i \tag{2.6}$$

имеют вид

$$\varphi_i (\alpha, s) = k \,(f_i (s)/\mu_i)\, \alpha$$

где k — абсолютная проницаемость, $f_i (s)$ $(i = 1, 2)$ — относительные фазовые проницаемости, μ_i $(i = 1, 2)$ — вязкости. Для решения системы (2.2)—(2.5) задаются следующие краевые условия:

$$p|_{\Gamma_p} = p^\circ \tag{2.7}$$

$$q_n|_{\Gamma_q} = q_n^\circ \tag{2.8}$$

где $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_p$ — граница области решения задачи Ω; $q_n = q_{1n} + q_{2n}$ — нормальная составляющая суммарной скорости фильтрации; $p = lp_1 + (1 - l)\, p_2$, $l = l(s)$: $p = p_1$, $p = p_2$ при $l = 1$, $l = 0$ соответственно, p — среднее давление при $l(s) = s$ или $l(s) = F(s)$, $F(s)$ — функция Баклея — Леверетта.

Основными при построении вариационных принципов являются уравнения (2.2). Уравнения (2.3), (2.4) и краевые условия (2.7), (2.8) при построении используются в качестве ограничений. Построим вариационный принцип в скоростях. Из (1.3) имеем

$$B_1{}^\circ (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int\limits_\Omega \{[\Psi_1 (\mathbf{q}_1) + \Psi_2 (\mathbf{q}_2)] + (\mathbf{q}_1 \nabla p_1{}^\circ + \mathbf{q}_2 \nabla p_2{}^\circ)\}\, d\Omega \tag{2.9}$$

Преобразовав правую часть функционала (2.9) при учете ограничений (2.3), (2.4), (2.8), получим функционал

$$I_1 (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \int\limits_\Omega [\Psi_1 (\mathbf{q}_1) + \mathbf{q}_1 \nabla ((1 - l)\, p_c)]\, d\Omega + {}$$

$$+ \int\limits_\Omega [\Psi_2 (\mathbf{q}_2) - \mathbf{q}_2 \nabla (l p_c)]\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_p} q_n p^\circ d\Gamma \tag{2.10}$$

Минимум функционала (2.10) при ограничениях (2.4), (2.8) достигается на действительном поле скоростей $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, что проверяется непосредственно. Аналогично из (1.4) строится функционал

$$I_2 (p) = \int\limits_\Omega [\Phi_1 (\nabla (p + (1 - l)\, p_c)) + \Phi_2 (\nabla (p - l p_c))]\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_q} q_n^\circ p\, d\Gamma$$

минимум которого достигается на действительном поле давления p при ограничении (2.7).

Применяя методы двойственности [3], получим, что двойственной к вариационной задаче

$$\inf_{\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2 \in (2.4),\, (2.8)} I_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \tag{2.11}$$

является задача на максимум функционала $[-I_2(p)]$, т. е.

$$\inf_{\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2 \in (2.4),\, (2.8)} I_4(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \sup_{p \in (2.7)} [-I_2(p)]$$

Запишем следующие краевые условия:

$$q_{1n}|_{\Gamma_q} = q_{1n}^{\circ},\quad q_{2n}|_{\Gamma_q} = q_{2n}^{\circ} \tag{2.12}$$

и перейдем от задачи (2.11) к двойственной по одной из переменных. Получим две минимаксные задачи для I_3 и I_4, такие, что

$$\sup_{p \in (2.7)} \inf_{\mathbf{q}_1 \in (2.12)} I_3(\mathbf{q}_1, p) = \inf_{\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2 \in (2.4),\, (2.8)} I_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

$$\sup_{p \in (2.7)} \inf_{\mathbf{q}_2 \in (2.12)} I_1(p, \mathbf{q}_2) = \inf_{\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \in (2.4),\, (2.8)} I_1(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

$$I_3(\mathbf{q}_1, p) = \int_\Omega [\Psi_1(\mathbf{q}_1) + \mathbf{q}_1 \nabla((1-l)p_c)]\, d\Omega + \int_{\Gamma_p} p^{\circ} q_{1n}\, d\Gamma -$$

$$-\int_\Omega \Phi_2(\nabla(p - lp_c))\, d\Omega - \int_{\Gamma_q} p q_{2n}^{\circ}\, d\Gamma - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{q}_1\, d\Omega$$

$$I_4(p, \mathbf{q}_2) = -\int_\Omega \Phi_1(\nabla(p + (1-l)p_c))\, d\Omega - \int_{\Gamma_q} p q_{1n}^{\circ}\, d\Gamma +$$

$$+\int_\Omega [\Psi_2(\mathbf{q}_2) - \mathbf{q}_2 \nabla(lp_c)]\, d\Omega + \int_{\Gamma_p} p^{\circ} q_{2n}\, d\Gamma - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{q}_2\, d\Omega$$

При линейных законах фильтрации (2.6) из функционала (2.10), в котором примем $l(s) = F(s)$ и $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ выразим через суммарную скорость $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$, получим

$$I_1(\mathbf{q}) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} \frac{\mu_1}{k\varphi(s)} |\mathbf{q}|^2 + (p_c \nabla F(s))\, \mathbf{q}\right] d\Omega + \int_{\Gamma_p} q_n p^{\circ}\, d\Gamma \tag{2.13}$$

$$F(s) = f_1(s)/\varphi(s),\quad \varphi(s) = f_1(s) + (\mu_1/\mu_2)\, f_2(s)$$

где $\varphi(s)$ — относительная подвижность. Функционал (2.13) после преобразований можно записать в виде

$$I_1(\mathbf{q}) = \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\mu_1}{k\varphi(s)} |\mathbf{q}|^2\, d\Omega + \int_{\Gamma_p} q_n p_*^{\circ}\, d\Gamma \tag{2.14}$$

$$p_* = p_1 F(s) + p_2(1 - F(s)) + \int_s^1 p_c(s)\, dF(s)$$

Минимум функционалов (2.13), (2.14) достигается на истинном поле суммарной скорости $\mathbf{q}$ при ограничениях

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0,\quad q_n|_{\Gamma_q} = q_n^{\circ}$$

3. Фильтрационная консолидация. Рассмотрим вариационный подход для задач консолидации с вязкопластическим скелетом. Запишем уравнения неразрывности фаз, уравнение равновесия и выражение для производства энтропии [6] в энергетическом представлении за счет работы $-\mathbf{q}\nabla p$ в жидкой и работы $\sigma_{ij}{}^f e_{ij}$ в твердой фазах при $T_1 \approx T_2 \approx \mathrm{const}$:

$$-m_{,t} + \mathrm{div}\,((1-m)\,\mathbf{u}^{\cdot}) = 0,\ m_{,t} + \mathrm{div}\,(m\mathbf{v}) = 0$$

$$\sigma^f_{ij,\,j} - p_{,\,i} = 0,\ \Sigma = \sigma_{ij}{}^f e_{ij} - \mathbf{q}\nabla p$$

Здесь $\mathbf{q} = m\,(\mathbf{v} - \mathbf{u}^{\cdot})$ — скорость фильтрации, $\mathbf{v}$ — скорость движения жидкой фазы, $\mathbf{u}$ — вектор перемещений твердой фазы, p — поровое давление, $\boldsymbol{\sigma}^f$ — тензор эффективных напряжений, $\mathbf{e}$ — тензор скоростей вязкопластических деформаций, T_1, T_2 — абсолютные температуры в фазах.

Согласно гипотезе нормальной диссипации существуют выпуклые потенциалы диссипации $\varphi\,(\mathbf{Y}_1,\ \mathbf{Y}_2)$, $\varphi^*\,(\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2)$, где $\mathbf{X}_1 = \boldsymbol{\sigma}^f$, $\mathbf{X}_2 = -\nabla p$, $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{e}$, $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{q}$. Приняв, что процесс диссипации представляется двумя несвязанными диссипативными механизмами

$$\varphi\,(\mathbf{Y}_1,\ \mathbf{Y}_2) = \Psi_e\,(\mathbf{e}) + \Psi_q\,(\mathbf{q}),\ \varphi^*\,(\mathbf{X}_1,\ \mathbf{X}_2) = \Phi_\sigma\,(\boldsymbol{\sigma}^f) + \Phi_p\,(\nabla p)$$

систему уравнений фильтрационной консолидации запишем в виде:

$$-\mathbf{q} \in \partial\Phi_p\,(\nabla p) \quad \text{или} \quad -\nabla p \in \partial\Psi_q\,(\mathbf{q}) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{e} \in \partial\Phi_\sigma\,(\boldsymbol{\sigma}^f) \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\sigma}^f \in \partial\Psi_e\,(\mathbf{e}) \tag{3.2}$$

$$\sigma^f_{i,\,jj} - p_{,\,i} = 0 \tag{3.3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{q} + \mathrm{div}\,\mathbf{u}^{\cdot} = 0 \tag{3.4}$$

$$m_{,t} = \mathrm{div}\,(1-m)\,\mathbf{u}^{\cdot} \tag{3.5}$$

где Ψ_q, Φ_p и Ψ_e, Φ_σ — диссипативный и сопряженный диссипативный потенциалы соответственно для жидкой фазы [7] и для вязкопластического скелета [8].

В случае гладких потенциалов законы поведения фаз (3.1), (3.2) имеют вид

$$-q_i = \partial\Phi_p\,(\nabla p)/\partial p_{,i} \quad \text{или} \quad -p_{,i} = \partial\Psi_q\,(\mathbf{q})/\partial q_i$$

$$e_{ij} = \partial\Phi_\sigma\,(\boldsymbol{\sigma}^f)/\partial\sigma_{ij}{}^f \quad \text{или} \quad \sigma_{ij}{}^f = \partial\Psi_e\,(\mathbf{e})/\partial e_{ij}$$

где e_{ij}, q_i и $\sigma_{ij}{}^f$, $p_{,i}$ — компоненты соответственно $\mathbf{e}$, $\mathbf{q}$ и σ^f, ∇p.

В задачах консолидации изменением пористости m обычно пренебрегают, и уравнение (3.5) не используется. Для решения системы уравнений (3.1)—(3.4) задаются следующие краевые условия:

$$p\,|_{\Gamma_p} = p^\circ, \quad q_n\,|_{\Gamma_q} = q_n{}^\circ \tag{3.6}$$

$$(\sigma_{ij}{}^f - p\delta_{ij})\,n_j\,|_{\Gamma_\sigma} = \Pi_i{}^\circ, \quad u_i\,|_{\Gamma_u} = u_i{}^\circ \tag{3.7}$$

где $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_u = \Gamma_p + \Gamma_q$ — граница области решения задачи.

Основными при построении вариационных принципов являются уравнения (3.1), (3.2); уравнения (3.3), (3.4) и краевые условия (3.6), (3.7) используются в качестве ограничений. Система уравнений (3.1)—(3.5) по структуре подобна системе уравнений двухфазной фильтрации (2.2)—(2.5).

Из соотношения (1.3) после соответствующих преобразований получим функционал в скоростях

$$I_1\,(\mathbf{u}^{\cdot},\ \mathbf{q}) = \int\limits_\Omega [\Psi_e\,(\mathbf{e}) + \Psi_q\,(\mathbf{q})]\,d\Omega - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \Pi_i{}^\circ u_i{}^{\cdot}\,d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_p} p^\circ q_n\,d\Gamma \tag{3.8}$$

минимум которого при ограничениях (3.4), (3.6), (3.7) достигается на действительном поле скоростей $\mathbf{u}^{\cdot}$, $\mathbf{q}$, что можно проверить непосредственно. Из (1.4) получим функционал

$$I_2(\sigma^f, p) = \int_\Omega [\Phi_\sigma(\sigma^f) + \Phi_p(\nabla p)]\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} (\sigma_{ij}{}^f - p\delta_{ij})\, n_j u_i^{\cdot\circ}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_q} p q_n{}^\circ\, d\Gamma \tag{3.9}$$

минимум которого при ограничениях (3.3), (3.6), (3.7) достигается на действительном поле переменных p, $\sigma_{ij}{}^f$. Применяя методы двойственности [3], получим, что двойственной к вариационной задаче

$$\inf_{\mathbf{u}^{\cdot},\, \mathbf{q} \in (3.4),\, (3.6),\, (3.7)} I_1(\mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{q}) \tag{3.10}$$

является задача на максимум функционала $[-I_2(\sigma^f, p)]$, т. е.

$$\inf_{\mathbf{u}^{\cdot},\, \mathbf{q} \in (3.4),\, (3.6),\, (3.7)} I_1(\mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{q}) = \sup_{p,\, \sigma^f \in (3.3),\, (3.6),\, (3.7)} [-I_2(\sigma^f, p)]$$

При переходе от задачи (3.10) к двойственной по одной из переменных получим две вариационные задачи для I_3 и I_4, такие, что:

$$\sup_{p \in (3.6)} \inf_{\mathbf{u}^{\cdot} \in (3.7)} I_3(\mathbf{u}^{\cdot}, p) = \inf_{\mathbf{u}^{\cdot},\, \mathbf{q} \in (3.4),\, (3.6),\, (3.7)} I_1(\mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{q})$$

$$\sup_{p,\, \sigma^f \in (3.3),\, (3.7)} \inf_{\mathbf{q} \in (3.6)} I_4(\sigma^f, p, \mathbf{q}) = \inf_{\mathbf{u}^{\cdot},\, \mathbf{q} \in (3.4),\, (3.6),\, (3.7)} I_1(\mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{q})$$

$$I_3(\mathbf{u}^{\cdot}, p) = \int_\Omega [\Psi_e(\mathbf{e}) - \Phi_p(\nabla p)]\, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \Pi_i{}^\circ u_i^{\cdot} d\Gamma - \int_{\Gamma_q} p q_n{}^\circ\, d\Gamma - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{u}^{\cdot}\, d\Omega$$

$$I_4(\sigma^f, p, \mathbf{q}) = \int_\Omega [\Phi_\sigma(\sigma^f) - \Phi(\mathbf{q})]\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} (\sigma_{ij}{}^f - p\delta_{ij})\, n_j u^{\cdot\circ}\, d\Gamma -$$

$$- \int_{\Gamma_p} p^\circ q_n\, d\Gamma + \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{q}\, d\Omega \tag{3.11}$$

При $\Gamma_u = \Gamma$, $\Gamma_q = \Gamma$ функционал (3.8) имеет вид

$$I_1(\mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{q}) = \int_\Omega [\Psi_e(\mathbf{e}) + \Psi_q(\mathbf{q})]\, d\Omega \tag{3.12}$$

В этом случае при $\Psi_e(\mathbf{e}) = D_e(\mathbf{e})$, $\Psi_q(\mathbf{q}) = D_q(\mathbf{q})$, где D_e, D_q — диссипативные функции, действительный процесс определяется минимумом скорости диссипации энергии.

Для задачи консолидации с упругим скелетом функционал, обобщающий (3.12), будет иметь вид

$$I_1(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = \int_\Omega \left[\frac{W_\varepsilon(\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\varepsilon(t) - \Delta t))}{\Delta t} + \Psi_q(\mathbf{q}) \right] d\Omega \tag{3.13}$$

где $W_\varepsilon(\varepsilon)$ — выпуклый упругий потенциал, $\sigma^f \in \partial W_\varepsilon(\varepsilon)$, ε — тензор малых деформаций. Функционал (3.13) при $\Psi_q(\mathbf{q}) = D_q(\mathbf{q})$ приближенно характеризует сумму скоростей накопления и диссипации энергии. В общем случае он имеет вид

$$I_1(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = \int_\Omega \left[\frac{W_\varepsilon(\varepsilon(t)) - W_\varepsilon(\varepsilon(t - \Delta t))}{\Delta t} + \Psi_q(\mathbf{q}) \right] d\Omega -$$

$$- \int_{\Gamma_\sigma} \Pi_i{}^\circ \frac{u_i(t) - u_i(t - \Delta t)}{\Delta t}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_p} p^\circ q_n\, d\Gamma \tag{3.14}$$

Функционалы, двойственные к (3.14), имеют вид, аналогичный (3.9), (3.11).

Рассмотрим функционалы I_1 в задачах минимизации (3.8), (3.14). Переменные $\mathbf{u}^{\cdot}$, $\mathbf{q}$ в функционале (3.8) связаны ограничением (3.4). При знании величин

$$\operatorname{div} \mathbf{u}^{\cdot} = \chi(\mathbf{r}, t), \ \operatorname{div} \mathbf{q} = -\chi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \Omega \tag{3.15}$$

задачу минимизации функционала $I_1(\mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{q})$ можно было бы разделить по переменным $\mathbf{u}^{\cdot}$, $\mathbf{q}$ и рассмотреть отдельно задачу

$$\inf J_1(\mathbf{u}^{\cdot}) \text{ при } \operatorname{div} \mathbf{u}^{\cdot} = \chi(\mathbf{r}, t) \tag{3.16}$$

и задачу

$$\inf J_2(\mathbf{q}) \text{ при } \operatorname{div} \mathbf{q} = -\chi(\mathbf{r}, t) \tag{3.17}$$

т. е.

$$\inf_{\mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{q} \in (3.4), (3.6), (3.7)} I_1(\mathbf{u}^{\cdot}, \mathbf{q}) = \inf_{\mathbf{u}^{\cdot} \in (3.7), (3.15)} J_1(\mathbf{u}^{\cdot}) + \inf_{\mathbf{q} \in (3.6), (3.15)} J_2(\mathbf{q}) \tag{3.18}$$

Аналогично задачу минимизации функционала (3.14) можно разделить по переменным $\mathbf{u}$, $\mathbf{q}$ и представить в виде, подобном (3.18). Указанные представления расщепляют задачу консолидации на две задачи, одна из которых характеризует процесс деформации, другая — процесс фильтрации. Функционалы $J_3(\sigma^f, p)$, $J_4(p)$ в задачах

$$\sup_{\sigma^f, p \in (3.3), (3.7)} [-J_3(\sigma^f, p)], \qquad \sup_{p \in (3.6)} [-J_4(p)]$$

двойственных соответственно к задачам (3.16), (3.17), имеют вид

$$J_3(\sigma^f, p) = \int_\Omega \Phi_\sigma(\sigma^f)\, d\Omega - \int_{\Gamma_u} (\sigma_{ij}{}^f - p\delta_{ij}) n_j u^\circ\, d\Gamma - \int_\Omega p\chi(\mathbf{r}, t)\, d\Omega$$

$$J_4(p) = \int_\Omega \Phi_p(\nabla p)\, d\Omega + \int_{\Gamma_q} p q_n{}^\circ\, d\Gamma + \int_\Omega p\chi(\mathbf{r}, t)\, d\Omega$$

Введя множитель Лагранжа $\lambda = -p$, запишем функционалы

$$J_1'(\mathbf{u}^{\cdot}, p) = J_1(\mathbf{u}^{\cdot}) - \int_\Omega p(\operatorname{div} \mathbf{u}^{\cdot} - \chi(\mathbf{r}, t))\, d\Omega$$

$$J_2'(\mathbf{q}, p) = J_2(\mathbf{q}) - \int_\Omega p(\operatorname{div} \mathbf{q} + \chi(\mathbf{r}, t))\, d\Omega$$

Комбинируя функционалы J_1', J_2', J_3, J_4 так, чтобы исключить величину $\chi(\mathbf{r}, t)$, получим функционалы (3.9), (3.11). Подобное расщепление имеет место и в задачах двухфазной фильтрации. Проблема построения вариационных принципов в фильтрационной консолидации и двухфазной фильтрации сводится, таким образом, к проблеме построения вариационных принципов для отдельных фаз.

Для построения вариационных принципов задач консолидации с линейными определяющими соотношениями использовался метод [9, 10], в основе которого лежит идея построения вариационных принципов для уравнений с линейными самосопряженными операторами [11]. В этой статье допускается нелинейный вид определяющих соотношений.

Приведем примеры построения вариационных принципов, используя вариационные задачи типа (1.6).

1°. Для линейного упругого скелета $\sigma_{ij}{}^f = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ и линейного закона фильтрации $q_i = -k_{ij}p_{,j}$ в случае малых деформаций запишем вариацию в свертках

$$\delta B_3(\varepsilon, p) = \int\limits_\Omega \left[\delta\left(\frac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{kl}*\varepsilon_{ij}\right) - \sigma_{ij}{}^f*\delta\varepsilon_{ij}\right] d\Omega -$$

$$-\int\limits_\Omega \left[\delta\left(1*\frac{1}{2} k_{ij}p_{,j}*p_{,i}\right) + q_i*\delta p_{,i}\right] d\Omega$$

равенство нулю которой эквивалентно выполнению определяющих соотношений. После преобразования получим вариацию $\delta I_3(\mathbf{u}, p)$, где [12]

$$I_3(\mathbf{u}, p) = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{2} C_{ijkl}\varepsilon_{ijkl}*\varepsilon_{ij} - 1*\frac{1}{2} k_{ij}p_{,i}*p_{,j}\right) d\Omega -$$

$$-\int\limits_{\Gamma_\sigma} \Pi_i{}^{\circ}*u_i\, d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_q} 1*q_n{}^{\circ}*p\, d\Gamma - \int\limits_\Omega p*u_{i,i}\, d\Omega$$

Равенство нулю $\delta I_3(\mathbf{u}, p)$ при ограничениях (3.6), (3.7) достигается на действительном поле переменных $\mathbf{u}$, p.

Аналогично получаются функционалы I_1, I_2, I_4. Подобным образом строятся функционалы I_1, I_2, I_3, I_4 для линейного вязкоупругого скелета $\sigma_{ij} = J_{ijkl} * \varepsilon_{kl}$. Функционал I_3 приведен в работе [13].

2°. Функционалы I_1, I_2, I_3, I_4 для среды Кельвина — Фойгта $\sigma_{ij}{}^f = \partial\Psi(\varepsilon, \dot\varepsilon)/\partial\varepsilon_{ij}$ и нелинейного закона фильтрации $\mathbf{q} = -f(|\nabla p|)\nabla p\,|\,|\nabla p|$ при малых деформациях строятся аналогично (3.8), (3.9), (3.11). Функционал

$$I_3(\dot{\mathbf{u}}, p) = \int\limits_\Omega \Psi(\varepsilon, \dot\varepsilon)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \Pi_i{}^{\circ}\dot u_i\, d\Gamma - \int\limits_\Omega \int\limits_0^{|\nabla p|} f(\alpha)\, d\alpha\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_q} q_n{}^{\circ}p\, d\Gamma - \int\limits_\Omega p\dot u_{i,i}\, d\Omega$$

получен ранее[1].

3°. Для нелинейного упругого поведения твердой фазы $\sigma_{ij}{}^f = \partial W(\varepsilon)/\partial\varepsilon_{ij}$ и нелинейного поведения жидкой фазы $q_i = -\partial\Psi(\nabla p)/\partial p_{,i}$ в случае малых деформаций запишем вариацию

$$\delta B_3(\varepsilon, p) = \int\limits_\Omega [\delta W(\varepsilon) - \sigma_{ij}{}^f\delta\varepsilon_{ij}]\, d\Omega - \int\limits_0^t \int\limits_\Omega [\Psi(\nabla p) + q_i\delta p_{,i}]\, d\Omega\, dt$$

равенство нулю которой эквивалентно выполнению законов поведения фаз. После преобразования получим вариацию $\delta I_3(\mathbf{u}, p)$, где

$$I_3(\mathbf{u}, p) = \int\limits_\Omega W(\varepsilon)\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \Pi_i{}^{\circ}u_i\, d\Gamma - \int\limits_0^t \left[\int\limits_\Omega \Psi(\nabla p)\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_q} q_n{}^{\circ}p\, d\Gamma - \int\limits_\Omega p\, \mathrm{div}\, \dot{\mathbf{u}}\, d\Omega\right] dt$$

Равенство нулю вариации $\delta I_3(\mathbf{u}, p)$ при ограничениях (3.6), (3.7) достигается на решении задачи.

4°. Для нелинейного закона поведения твердой фазы $\sigma_{ij}{}^{f\cdot} = \partial W(\dot\varepsilon, \sigma^f)/\partial\varepsilon_{ij}{}^{\cdot}$ и линейного закона фильтрации $q_i = -k_{ij}p_{,j}$ в случае конечных деформаций $\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j})$ запишем вариацию

$$\delta B_3(\dot\varepsilon, \dot p) = \int\limits_\Omega [\delta W(\dot\varepsilon, \sigma^f) - \sigma_{ij}{}^{f\cdot}\delta\dot\varepsilon_{ij}]\, d\Omega - \int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[\delta\frac{1}{2} k_{ij}\dot p_{,i}\dot p_{,j} + \dot q_i\delta p_{,i}\right] d\Omega\, dt$$

---

[1] *Костерин А. В.* Вариационный принцип фильтрационной консолидации. Казан. ун-т, Казань, 1986. 7 с.— Деп. в ВИНИТИ 16.12.86, № 8598—В.

равенство нулю которой эквивалентно выполнению законов поведения фаз. После преобразования получим вариацию $\delta I_3(u^{\cdot}, p)$, где [14]

$$I_3(\mathbf{u}^{\cdot}, p^{\cdot}) = \int\limits_{\Omega} W(\varepsilon^{\cdot}, \sigma^{f})\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_\sigma} \Pi_i^{\cdot\circ} u_i^{\cdot}\, d\Gamma + \int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} (\sigma_{ij}{}^{f} - \delta_{ij} p)\, \dot{u}_{k,i} \dot{u}_{k,j}\, d\Omega -$$

$$- \int\limits_0^t \left[\int\limits_{\Omega} \frac{1}{2} k_{ij} \dot{p}_{,i} \dot{p}_{,j}\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_q} q_n{}^{\cdot\circ} p^{\cdot}\, d\Gamma - \int\limits_{\Omega} p^{\cdot} \varepsilon_{ii}{}^{\cdot\cdot}\, d\Omega \right] dt$$

Равенство нулю вариации $\delta I_3(u^{\cdot}, p^{\cdot})$ при соответствующих ограничениях [14] на варьируемые переменные $u^{\cdot}$, $p^{\cdot}$ достигается на решении задачи.

Автор благодарит А. В. Костерина за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Панагиотопулос П.* Неравенства в механике и их приложения: Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 492 с.
2. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983. 399 с.
3. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
4. *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика: Теория поля и вариационные принципы. М.: Мир, 1974. 304 с.
5. *Базаров И. П.* Термодинамика. М.: Высш. шк., 1983. 344 с.
6. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
7. *Баренблатт Г. И.*, *Ентов В. М.*, *Рыжик В. М.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.
8. *Мосолов П. П.*, *Мясников В. П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981. 208 с.
9. *Sandhu R. S.*, *Pister K. S.* A variational principle for linear coupled field problems in continuum mechanics // Intern. J. Eng. Sci. 1970. V. 8. N 12. P. 989—999.
10. *Sandhu R. S.*, *Hong S. J.* Dynamics of fluid-saturated soils-variational formulation// Intern. J. Num. Anal. Meth. Geomech. 1987. V. 11. N 3. P. 241—255.
11. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М., Л.: Гостехиздат. 1952. 216 с.
12. *Sandhu R. S.*, *Wilson E. L.* Finite element analysis of seepage in elastic media // J. Eng. Mech. Div., ASCE. 1969. V. 95. N 3. P. 641—652.
13. *Sandhu R. S.*, *Liu M.* Analysis of consolidation of viscoelastic soils // Numer. Meth. Geomech. Proc. 3rd. Intern. Conf. Aachen, 1979. Rotterdam, 1980. V. 4. P. 1255—1263.
14. *Nisseki S.*, *Satake M.* Variational principles for nonlinear consolidation problem // Numer. Meth. Geomech. Proc. 3rd Intern. Conf. Aachen, 1979. Rotterdam, 1979. V. 1. P. 175—180.

Казань

Поступила в редакцию 23.I.1991