Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 532.546

© 1992 г. И. С. Гинзбург, В. М. Ентов, Э. В. Теодорович

МЕТОД РЕНОРМГРУППЫ В ЗАДАЧЕ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ С НЕОБРАТИМОЙ СОРБЦИЕЙ

Методом ренормгруппы исследуется распространение узкого пика концентрации примеси фильтрационным потоком в предположении, что существенны процессы диффузии и сорбции. Сорбция считается частично необратимой, что описывается изотермой сорбции с гистерезисом. Развита общая техника анализа задачи. Проведены расчеты для автомодельного случая и сопоставлением с точным решением показана их удовлетворительная точность.

В ряде задач теории фильтрационного переноса примеси необходимо учитывать необратимость сорбции примеси скелетом пористой среды. Необратимое удержание примеси особенно существенно для тонких оторочек примеси. Оно может быть полезным, когда речь идет об анализе распространения загрязнений в грунтовых водах, или вредным, если примесь используется как индикатор для анализа структуры фильтрационного потока, и особенно, как средство повышения нефтеотдачи пласта. В [1, 2] в рамках общепринятой модели диффузионно-конвективного переноса примеси в пористых средах (см., например, [3, 4]) была сделана попытка учета необратимости адсорбции, для чего использовалась простейшая схема. А именно предполагалось, что адсорбция происходит по линейному закону с постоянным коэффициентом Генри $da/dt = \Gamma^+$ при $da/dt > 0$, а десорбция — по линейному закону с другим (меньшим) коэффициентом Генри $da/dt = \Gamma^-$ при $da/dt < 0$; собственно временные эффекты не учитываются. Такой «гистерезисный» закон адсорбции в упрощенной форме отражает экспериментальные данные по необратимости адсорбции по крайней мере при однократном увеличении — уменьшении концентрации, типичном для прохождения тонкой оторочки примеси. Были построены [1, 2] точные автомодельные решения возникающей нелинейной задачи при определенных упрощающих предположениях: специальный закон изменения скорости фильтрации со временем, пренебрежение зависимостью коэффициента диффузии от времени.

В данной работе те же задачи рассматриваются при помощи метода ренормализационной группы (РГ). Основная цель работы — оценка возможности метода РГ и сопоставление полученных с его помощью результатов с результатами численных расчетов. Поскольку это сопоставление демонстрирует вполне удовлетворительную точность, в последующем возможно применение метода РГ к физически более естественным (в том числе и неавтомодельным) ситуациям.

1. Рассмотрим одномерную задачу конвективно-диффузионного переноса тонкой оторочки примеси потоком жидкости в пористой среде с постоянным коэффициентом диффузии D и различными значениями константы Генри для сорбционных и десорбционных процессов, т. е. для областей убывания и возрастания концентрации примеси, что отражает необратимость сорбции. Эволюция концентрации растворенной примеси c описывается в этом случае уравнением

$$\frac{\partial (mc + a(c))}{\partial t} + v(t)\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$
$$a'(c) = \begin{cases} \Gamma^+, & \partial c/\partial t > 0 \\ \Gamma^-, & \partial c/\partial t < 0 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Здесь $v(t)$ — скорость фильтрации, $a(c)$ — количество сорбированной примеси на единицу объема среды. Будем рассматривать непрерывное вместе с потоком примеси $j = vc - D\partial c/\partial x$ решение задачи Коши на прямой для уравнения (1.1). Уравнение (1.1) может быть представлено в эквивалентной форме ($H(x)$ — функция Хевисайда)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + f(t)\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = -\varepsilon H\left(-\frac{\partial c}{\partial t}\right)\left(f(t)\frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right) \qquad (1.2)$$

$$\varepsilon = (\varepsilon^+ - \varepsilon^-)/\varepsilon^-, \ \varepsilon^\pm = m + \Gamma^\pm, \ f(t) = v(t)/(2D\varepsilon^+)^{1/2}$$

Отметим, что уравнение (1.2) не обладает галилеевской инвариантностью, так как функция Хевисайда зависит от эйлеровой ($\partial/\partial t$), а не от лагранжевой ($\partial/\partial t + f(t)\,\partial/\partial x$) производной. Причина этого состоит в том, что процесс сорбции является локальным и определяется историей изменения концентрации вблизи данной точки неподвижного твердого скелета, а не в данной частице движущейся жидкости. Уравнение (1.2) является обобщением уравнения нелинейно-упругого режима, введенного в [4] (см. также [5]), и детально исследованного в несколько иной трактовке в [6]. От рассмотренного ранее оно отличается наличием конвективного члена.

Имея в виду анализ эволюции тонкого импульса концентрации, выберем в качестве начального условия задачи Коши близкое к дельта-образному распределение

$$c(x,0) = \frac{Q_0}{\sqrt{2\pi\delta}}\exp\left(-\frac{1}{2\delta}\left(x - \int_{-\delta}^{0} f(s)\,ds\right)^2\right) \equiv Q_0 G(x,0,-\delta) \quad (\delta > 0) \qquad (1.3)$$

где $G(x, t, t_0)$ — функция Грина для уравнения конвективной диффузии

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + f(t)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] G(x,t,t_0) = \delta(x)\,\delta(t - t_0) \qquad (1.4)$$

причем функция Грина зависит отдельно от t и t_0, а не от разности времен $(t - t_0)$, так как коэффициент в уравнении (1.4) явно зависит от времени. Отметим, что $Q_0 G(x, t, t_0)$ — точное решение задачи Коши для уравнения конвективной диффузии (уравнение (2.2) с $\varepsilon = 0$), если в начальный момент $t = -\delta$ распределение концентрации имеет дельта-образный вид. Изучим поведение решения в асимптотической области $t/\delta \Rightarrow \infty$.

2. В общем случае ($\varepsilon \neq 0$) решение может быть представлено в виде

$$c(x,t) = \frac{Q_0}{\sqrt{t}} F\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\left(x - \int_{-\delta}^{t} f(s)\,ds\right), \frac{t}{\delta}, \varepsilon\right\} \qquad (2.1)$$

Было показано [1, 2], что подобно задаче о модифицированном тепловом источнике [4] задача (1.1) при $v = \lambda/t^{1/2}$ и начальных условиях (1.3) не имеет автомодельной асимптотики первого рода при $t \Rightarrow \infty$ $(\delta \Rightarrow 0)$, удовлетворяющей условию непрерывности концентрации примеси c и ее производной $\partial c/\partial x$ на границах, но для нее существует автомодельное решение второго рода, имеющее функциональное представление вида

$$c(x,t) = A\frac{c(\xi)}{(Dt)^{(1+\alpha)/2}}$$

$$A = \gamma_0 \lim_{\delta \Rightarrow 0} c_0\delta^\alpha, \quad c_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} c(x,0)\,dx, \quad \xi = \frac{x}{(Dt)^{1/2}} \qquad (2.2)$$

где γ_0 — множитель, зависящий от условий нормировки $c(\xi)$, а показатель α определяется параметрами задачи. Были представлены [1, 2] зависимости $\alpha(\varepsilon^+, \varepsilon^-, \beta)$ ($\beta = \lambda/D^{1/2}$), полученные в результате численного решения нелинейной задачи на собственные значения. В случае $\beta = 0$ ($v(t) = 0$) это решение совпадает с автомодельным решением второго рода для модифицированного теплового источника [6].

Автомодельность второго рода означает, что функция F в (2.2) неаналитически зависит от параметра δ при $\delta \Rightarrow 0$. В соответствии с этим уравнение (1.2) нельзя решать обычным методом возмущений по малому параметру ε, принимая в качестве начального приближения $Q_0G(x, t, -\delta)$. Действительно, такой процесс, будь он законным, привел бы к ряду по степеням ε, каждый член которого при $\delta \Rightarrow 0$ имел бы вид автомодельного решения первого рода (т. е. был бы аналитичен по δ), и, следовательно, само решение оказалось бы аналитичным по δ. Неаналитическая зависимость от δ связана с тем, что при $\delta \Rightarrow 0$ величина $\partial c/\partial t$ имеет неинтегрируемую особенность, в результате чего вычисляемые по теории возмущений поправки содержат расходимости.

Эти расходимости сходны с расходимостями, возникающими в квантовой теории поля при снятии регуляризации [7] (в рассматриваемой задаче роль такого регуляризующего параметра играет величина δ). Расходимости теории поля устраняются при помощи процедуры перенормировок, при которой неаналитическая зависимость от регуляризующего параметра входит только в константы перенормировок исходных параметров системы и амплитуд полей. При наличии размерного регуляризующего параметра константы перенормировки имеют ненулевую размерность, в результате чего перенормированные физические параметры приобретают дополнительную (аномальную) размерность, т. е. преобразуются необычным образом при масштабных преобразованиях [7—9]. Показатели аномальной размерности теории поля совпадают с показателями неполной автомодельности (автомодельности второго рода) в методе промежуточных асимптотик (ПА) [6], на что было обращено внимание в [10]. В теории поля вычисление показателей аномальной размерности осуществляется на основе метода РГ, представляющего собой способ улучшения результатов теории возмущений с помощью требования ренормализационной инвариантности, т. е. условия независимости результата вычисления асимптотического поведения физической величины от выбора условий нормировки [7, 9].

В данной работе способ вычисления показателя аномальной размерности для уравнения диффузии с гистерезисом сорбции [10] обобщается на случай наличия конвективного переноса, автомодельное решение второго рода для которого построено методом ПА [1, 2] для модельного примера $v = \lambda t^{-1/2}$.

3. В соответствии с методом РГ [11] перепишем уравнение (1.2) в интегральной форме

$$c(x,t) = \int dx' G(x-x', t, 0)\, c(x', 0) -$$
$$- \varepsilon \int dx' \int dt' G(x-x'\, t, t')\, H\left[-\frac{\partial c(x',t')}{\partial t'}\right]\left[f(t)\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right] c(x',t')$$

где первый член правой части — решение невозмущенной задачи ($\varepsilon = 0$). Подставляя начальное условие (1.3), найдем

$$c^{(0)}(x, t) = \int dx' G(x-x', t, 0)\, c(x', 0) = Q_0 G(x, t, -\delta) \qquad (3.1)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что функция Грина уравнения конвективно-диффузионного переноса (1.4) очевидно удовлетворяет соотношению

$$G(x - x_0, t, t_0) = \int dx' G(x - x', t, t') G(x' - x_0, t', t_0) \qquad (3.2)$$

являющемуся по существу уравнением Смолуховского — Колмогорова — Чепмена для марковского процесса [12].

Итерационное решение интегрального уравнения соответствует представлению решения c в виде ряда теории возмущений по степеням ε, в котором каждый член ряда будет расходиться при $\delta \Rightarrow 0$. Улучшение теории возмущений сводится к перестройке этого ряда при помощи процедуры перенормировки коэффициента Q_0, входящего в (3.1). Для этого после подстановки (3.1) в интегральное уравнение заменим исходный параметр Q_0 на перенормированный (феноменологический) параметр $Q = ZQ_0$ и добавим к возмущающей части компенсирующий контрчлен (КЧ) вида $(1 - Z) Q_0 G(x, t, -\delta)$. В результате получим

$$c(x, t) = QG(x, t, -\delta) - \varepsilon \int dx' \int dt' G(x - x', t, t') \times$$
$$\times H[-\partial c(x', t')/\partial t'] [f(t) \partial/\partial x' - {}^1/_2 \partial^2/\partial x^2] \times$$
$$\times c(x', t') + (1 - Z) Q_0 G(x, t, -\delta) \qquad (3.3)$$

Константу перенормировки Z определим так, чтобы при $\delta \Rightarrow 0$ в некоторой «точке нормировки» $t = \tau$ сингулярная поправка к перенормированному значению Q обращалась в нуль.

Будем искать асимптотическое решение задачи в виде

$$c(x, t) = q(t, \delta, \varepsilon, Q_0) t^{-1/2} F(x, t, \varepsilon),\ q(t, \delta, \varepsilon, Q_0) = \int dx c(x, t) \qquad (3.4)$$

т. е. неаналитическая зависимость от δ при $\delta \Rightarrow 0$ входит только в функцию $q(t, \delta, \varepsilon, Q_0)$, представляющую собой полный запас растворенной примеси в момент времени t, изменяющийся в результате частичной необратимости сорбции. Функция $F(x, t, \varepsilon)$ зависит от автомодельной переменной $[x - \int f(s) ds]^2/t$, однако она уже не является гауссовой экспонентой.

При $\varepsilon = 0$ имеем

$$q = Q_0, \quad F(x, t, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\left(x - \int_0^t f(s) ds\right)^2\right\} \qquad (3.5)$$

и постоянная Q_0 имеет смысл полного запаса примеси в жидкости, остающегося неизменным. Асимптотическое решение, отвечающее тонкому начальному импульсу, автомодельно.

Константу перенормировки $Z = Q/Q_0$ определим из условия

$$Q = q(t, \delta, \varepsilon, Q_0)|_{t=\tau} \qquad (3.6)$$

Согласно (3.6), сингулярная зависимость от δ вошла в феноменологический параметр Q, представляющий собой запас примеси в момент времени τ.

При использовании для вычисления $c(x, t)$ перенормированной теории возмущений определенная соотношением (3.4) функция $q(t, \delta, \varepsilon, Q_0)$ в пределе $t \to \infty$ $(\delta \to 0)$ будет зависеть от параметра $Q = ZQ_0$, времени t и выбора точки нормировки τ; при этом из соображений размерности следует, что

$$q\,(t,\ \delta,\ \varepsilon,\ Q_0) \to q\,(t,\ \tau,\ \varepsilon,\ Q) = Q\varphi\,(t/\tau,\ \varepsilon) \qquad (3.7)$$

Ренормализационная инвариантность означает, что при замене масштаба времени τ на τ_1 одновременно с соответствующим изменением значения Q на Q_1 (параметр Q_1 определен соотношением (3.6) при $t = \tau_1$) физическая картина не меняется, т. е.

$$Q\varphi\,(t/\tau,\ \varepsilon) = Q_1\varphi\,(t/\tau_1,\ \varepsilon) \qquad (3.8)$$

При этом в соответствии с условием нормировки (3.6)

$$\varphi\,(1,\ \varepsilon) = 1 \qquad (3.9)$$

Из (3.8), (3.9) следует функциональное уравнение РГ для функции φ:

$$\varphi\,(u,\ \varepsilon) = \varphi\,(\lambda,\ \varepsilon)\,\varphi\,(u/\lambda,\ \varepsilon) \qquad (3.10)$$

Дифференцируя (3.10) по λ и положив затем $\lambda = 1$, приходим к дифференциальному уравнению РГ

$$\{-u\partial/\partial u + \alpha_R\}\,\varphi\,(u,\ \varepsilon) = 0,\ \alpha_R = \partial\varphi\,(u,\ \varepsilon)/\partial u\,|_{u=1} \qquad (3.11)$$

Решение уравнения (3.11), удовлетворяющее условию нормировки (3.9), имеет вид

$$\varphi\,(t/\tau,\ \varepsilon) = (t/\tau)^{\alpha_R(\varepsilon)} \qquad (3.12)$$

и задача нахождения показателя неполной автомодельности сводится к вычислению функции φ (t/τ, ε) вблизи точки нормировки $t = \tau$. Согласно методу РГ в его полевой формулировке [7] вычислим φ (t/τ, ε) в низшем приближении перенормированной теории возмущений, т. е. возьмем первую итерацию для уравнения (3.3)

$$c\,(x,t) = QG\,(x,t,-\delta) + \varepsilon Q\int\limits_0^t dt'\int dx' G\,(x-x',t,t')\times$$
$$\times H\,[-\partial G\,(x',t',-\delta)/\partial t']\,\partial G\,(x',t',-\delta)/\partial t' + \text{КЧ} \qquad (3.13)$$

Используя выражение для функции Грина (1.3) и определение (3.6), найдем

$$q\,(t,\delta,\varepsilon,Q_0) = Q_0 Z\sqrt{\frac{t}{t+\delta}} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{8\pi}}\int\limits_0^t\frac{dt'}{t'}\left(\frac{t'}{t+\delta-t'}\right)^{1/2}\int\limits_{w_-(t',\,\delta)}^{w_+(t',\,\delta)}dw\,\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{w^2}{2}\frac{t+\delta}{t+\delta-t'}\right\}[w-1+2w\sqrt{t'}\,f\,(t'+\delta)] +$$
$$+ Q_0(1-Z)\sqrt{t/(t+\delta)},\quad w_\pm\,(t,\delta) = \pm\sqrt{tf^2\,(t-\delta)+1} - tf\,(t-\delta) \qquad (3.14)$$

При $t/\delta \to \infty$ и учете того, что основной вклад в интеграл (3.14) при $\delta \Rightarrow 0$ дает область малых t', получим

$$q\,(t,\delta,\varepsilon,Q_0) = Q_0 Z\left\{1 + \varepsilon/(8\pi)^{1/2}\int\limits_\delta^t\frac{dt'}{t'}\int\limits_{w_-(t',\,0)}^{w_+(t',\,0)}dw\,W\,(w,t')\right\} + Q_0\,(1-Z) \qquad (3.15)$$

$$W\,(w,\ t) = \exp\,(-w^2/2)[w^2 - 1 + 2w\sqrt{t-\delta}\,f\,(t)]$$

Параметры КЧ Q_0 (1 — Z) выбираются таким образом, чтобы удовлетворить условию нормировки (3.6), в результате чего будем иметь

$$\varphi\,(t/\tau,\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{(8\pi)^{1/2}}\int\limits_\tau^t\frac{dt'}{t'}\int\limits_{w_-}^{w_+}dwW\,(w,t') \qquad (3.16)$$

В автомодельном случае, когда $f(t) = \gamma t^{-1/2}$, функции $w_{\pm}$ не зависят от t и интегралы легко вычисляются, что дает

$$\varphi(t/\tau, \varepsilon) = 1 + \varepsilon A \ln(t/\tau) \tag{3.17}$$

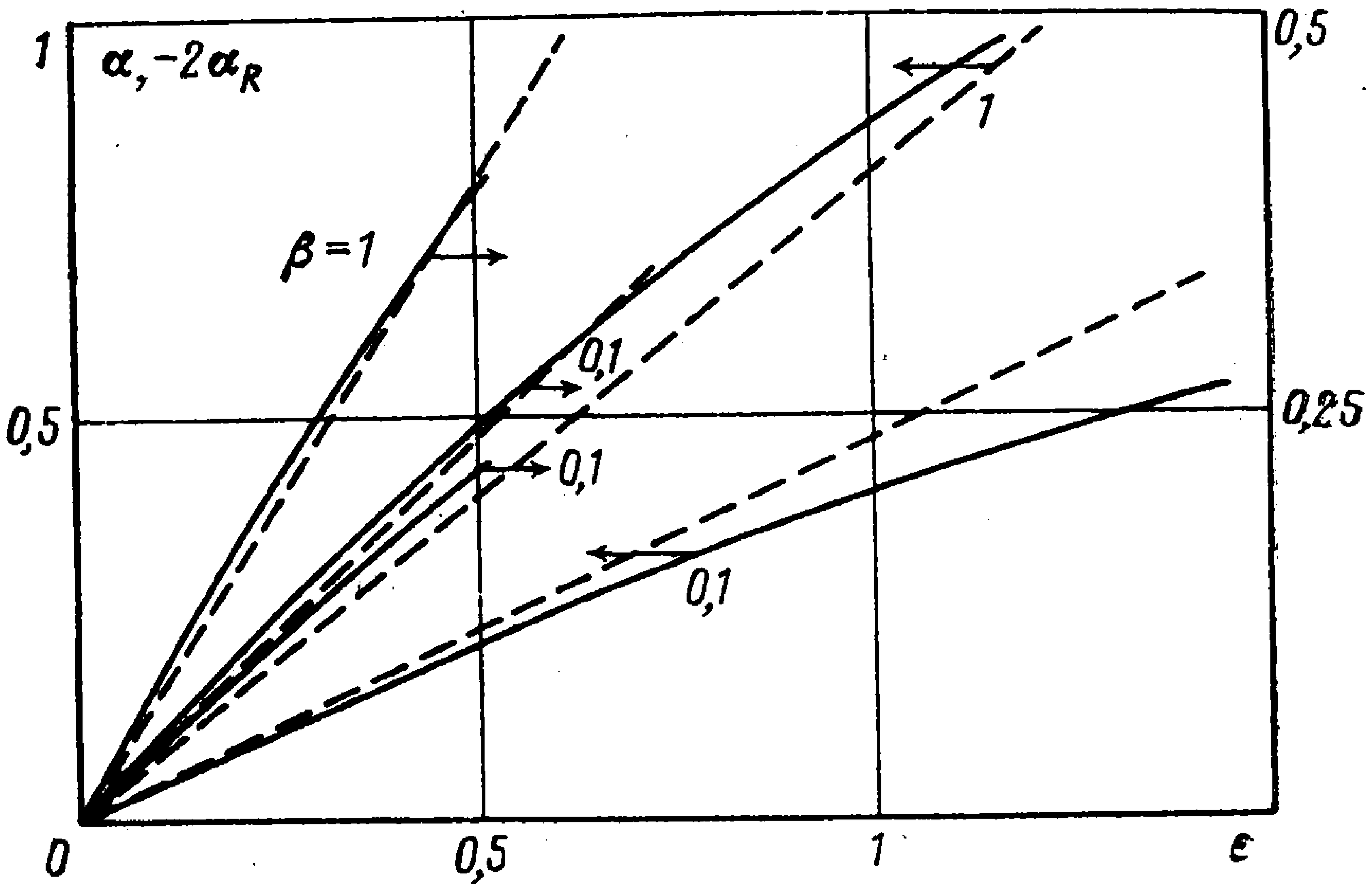
$$A = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \int\limits_{w_-}^{w_+} dw \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)[w^2 - 1 + 2w\gamma] =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi e}}\{e^{\gamma\gamma_-}\gamma_+ + e^{\gamma\gamma_+}\gamma_-\} \cong -\frac{1+\gamma^2}{\sqrt{2\pi e}}, \quad \gamma_{\pm} = \sqrt{\gamma^2+1} \pm \gamma \tag{3.18}$$

Таким образом, при малых ε должно выполняться соотношение

$$-2\alpha_R(\varepsilon, \gamma) = \alpha(\varepsilon^+, \varepsilon^-, \beta), \ \gamma = \beta/(2\varepsilon^+)^{1/2}, \ \varepsilon = (\varepsilon^+ - \varepsilon^-)/\varepsilon^- \tag{3.19}$$

На фиг. 1 в соответствии с графиками $\alpha(\varepsilon^+, \varepsilon^-, \beta)$ [1, 2] представлены результаты сравнения $-2\alpha_R$ (метод РГ, сплошные линии) и α (метод ПА, штриховые линии) в зависимости от ε для двух фиксированных значений



Фиг. 1

ε^-: $\varepsilon^- = 0{,}25$ ($m = 0{,}2$, $\Gamma^- = 0{,}05$, левая шкала) и $\varepsilon^- = 0{,}4$ ($m = 0{,}2$, $\Gamma^- = 0{,}2$, правая шкала). Заметим, что при $\varepsilon^- = 0{,}4$ значения $-2\alpha_R$ и α практически совпадают. Для $\varepsilon^- = 0{,}25$ соответственно для больших значений γ при тех же значениях ε становится заметной недостаточная точность вычисления α_R до первого члена теории возмущений. При $\beta = 0$ результаты вычислений по формуле (3.18) совпадают с вычислениями α_R в работе [10].

4. Тот же метод применим и к осесимметричной задаче конвективной диффузии с необратимой сорбцией в стационарном поле скоростей вида

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \lambda \mathbf{r}/r^2 \tag{4.1}$$

В этом случае уравнение для концентрации

$$[\varepsilon^{\pm}\partial/\partial t + \lambda r^{-1}\partial/\partial r - D\Delta^{(2)}]c(r, t) = 0 \tag{4.2}$$

для радиально-симметричного начального распределения аналогично соотношению (1.2) может быть представлено в форме

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\beta-1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right\} c(r,t) =$$

$$= \varepsilon H\left[-\frac{\partial c}{\partial t}\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\beta-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right] c(r,t), \quad \beta = \frac{\lambda}{D} \tag{4.3}$$

Здесь выполнена замена $r \Rightarrow r\,(D/\varepsilon^+)^{1/4}$. Как и при переходе к уравнению (3.3), запишем уравнение (4.3) в интегральной форме

$$c(r,t)=\int_0^\infty r'dr'G(r,r',t)\,c(r',0)+\varepsilon\int_0^t ds\int_0^\infty r'dr'G(r,r',t-s)\times$$
$$\times H\left[-\frac{\partial}{\partial s}c(r',s)\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial r'^2}-\frac{\beta-1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\right]c(r',s) \qquad (4.4)$$

Функция Грина $G\,(r,\ r',\ t)$ удовлетворяет уравнению

$$\{\partial/\partial t+(\beta-1)\,r^{-1}\partial/\partial r-\partial^2/\partial r^2\}\,G\,(r,r',t)=\delta\,(t)\,\delta\,(r-r')\,r^{-1} \qquad (4.5)$$

решение которого имеет вид

$$G(r,r',t)=H(t)\left(\frac{r}{r'}\right)^{\beta/2}\int_0^\infty \lambda\,d\lambda\exp(-\lambda^2t)\,J_{\beta/2}(\lambda r)\,J_{\beta/2}(\lambda r') \qquad (4.6)$$

где $J_n\,(x)$ — функции Бесселя первого рода.

Используя известный интеграл Фурье — Бесселя, можно показать, что функция Грина (4.6) удовлетворяет уравнению Смолуховского — Колмогорова — Чепмена

$$G(r,r_0,t-t_0)=\int_0^\infty r'dr'G(r,r',t-t')\,G(r',r_0,t'-t_0) \qquad (4.7)$$

являющемуся аналогом соотношения (3.2) для одномерной задачи.

Выбрав в качестве начального распределения

$$c(r,0)=Q_0G(r,0,-\delta)=\frac{Q_0}{2\Gamma(1+\beta/2)\,\delta}\left(\frac{r^2}{4\delta}\right)^{\beta/2}\exp\left(-\frac{r^2}{4\delta}\right) \qquad (4.8)$$

получим с использованием (4.7) решение невозмущенной задачи

$$c^0(r,t)=Q_0G(r,0,t+\delta)=\frac{Q_0}{2\Gamma(1+\beta/2)(t+\delta)}\left(\frac{r^2}{4(t+\delta)}\right)^{\beta/2}\exp\left(-\frac{r^2}{4(t+\delta)}\right) \qquad (4.9)$$

Тем самым уравнение (4.3) примет вид

$$c(r,t)=Q_0G(r,0,t+\delta)+\varepsilon\int_0^t ds\int_0^\infty r'\,dr'\,G(r,r',t-s)\times$$
$$\times H\left[-\frac{\partial c(r',s)}{\partial s}\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{\beta-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]c(r',s) \qquad (4.10)$$

Аналогично предыдущему выполним перенормировку параметра Q_0 путем замены $Q_0 \Rightarrow Q = ZQ_0$ и добавления компенсирующего КЧ. Тогда в низшем приближении перенормированной теории возмущений найдем

$$c(r,t)=QG(r,r',t+\delta)+\varepsilon\int_\delta^t d\int_0^\infty r'dr'G(r,r',t-s)\times$$
$$\times H\left[-\frac{\partial G(r',0,s+\delta)}{\partial s}\right]\frac{\partial G(r',0,s+\delta)}{\partial s}+\text{КЧ}=QG(r,0,t+\delta)+$$
$$+\varepsilon Q\int_\delta^t\frac{ds}{s^2}\int_0^{\sqrt{(1+\beta/2)s}} r'\,dr'G(r,r',t+\delta-s)\frac{1}{2\Gamma(1+\beta/2)}\left(\frac{r'^2}{4s}\right)^{\beta/2}\exp\left(-\frac{r^2}{4\delta}\right)\times$$

$$\times\left[1+\frac{\beta}{2}-\frac{r'^2}{4s}\right]+\text{КЧ}=Q\Big\{G(r,0,t+\delta)-\varepsilon Q\int\limits_{\delta}^{t}\frac{ds}{s}\int\limits_{0}^{\sqrt{1+\beta/2}}\xi\,d\xi\,\times$$

$$\times\,G(r,\sqrt{s}\,\xi,t+\delta-s)\,\zeta(\xi)+(Z^{-1}-1)\,G(r,0,t+\delta)\Big\},$$

$$\zeta(\xi)=\frac{1}{2\Gamma(1+\beta/2)}\left(\frac{\xi^2}{4}\right)^{\beta/2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4}\right)\left(1+\frac{\beta}{2}+\frac{\xi^2}{4}\right)\qquad(4.11)$$

При $\delta\Rightarrow 0$ основной вклад в интеграл по s дает область вблизи $s=0$, где подынтегральное выражение сингулярно. Оставляя в (4.11) вклад только сингулярной части и выбирая константу перенормировки Z в соответствии с условием нормировки (3.6), найдем для суммарного запаса растворенной примеси

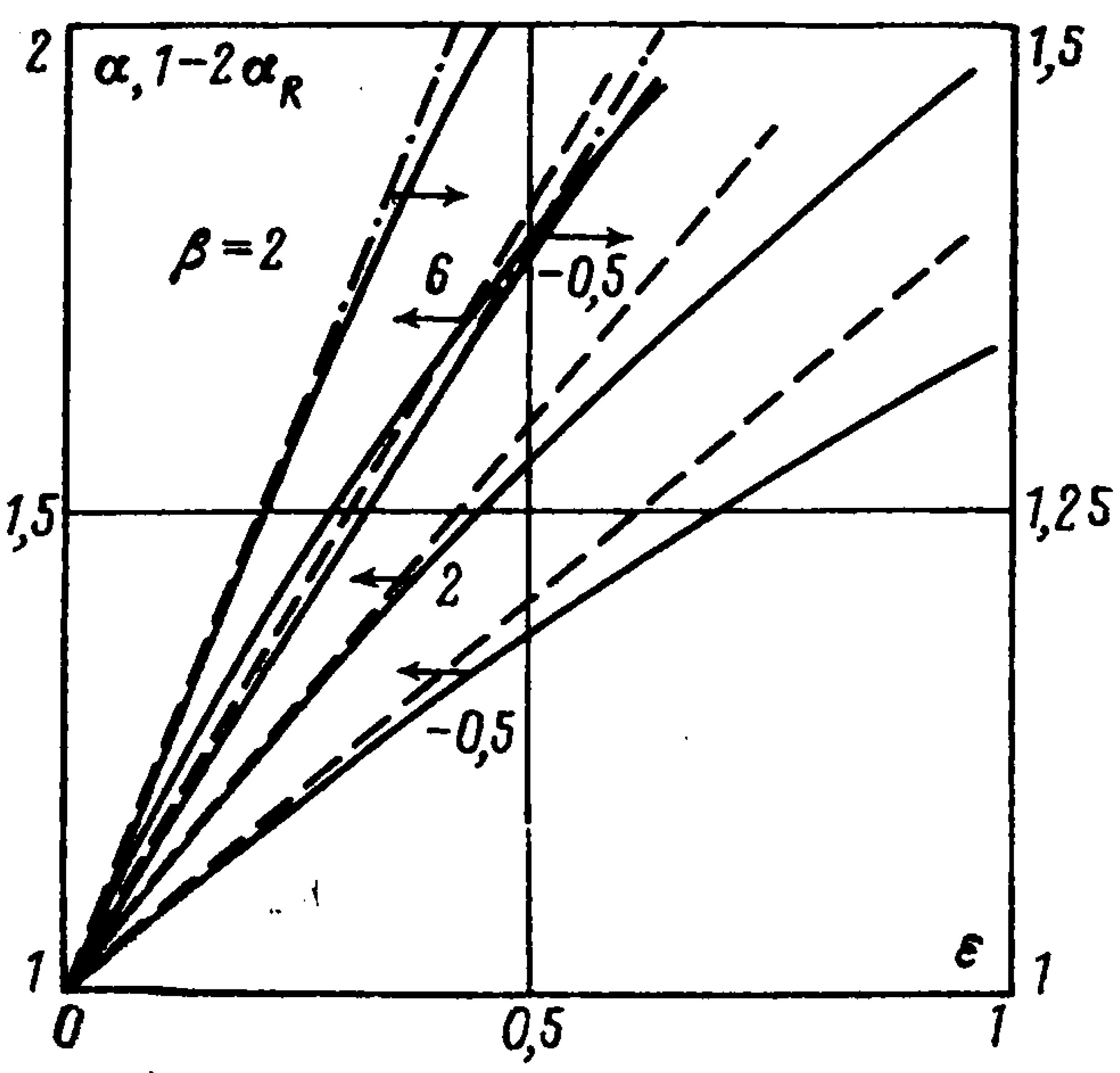
$$q(t,\,\tau,\,\varepsilon)=Q\,\{1-\varepsilon A\ln(t/\tau)\}\qquad(4.12)$$

$$A=\int\limits_{0}^{2\sqrt{1+\beta/2}}\xi\,d\xi\,\zeta(\xi)=\frac{[(1+\beta/2)/e]^{1+\beta/2}}{\Gamma(1+\beta/2)}$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче для показателя неполной автомодельности будем иметь

$$\alpha_R=-\varepsilon A\qquad(4.13)$$

Результаты сравнения значений показателей автомодельности $1-2\alpha_R$ (метод РГ) и вычисленных методом ПА [1] α (ε^+, ε^-, γ) представлены на



Фиг. 2

фиг. 2. Они подобны результатам для уравнения конвективной диффузии в одномерном случае. Здесь левая шкала соответствует $m=0{,}2$, $\Gamma^-=0{,}05$, правая — $m=0{,}2$, $\Gamma^-=0{,}2$.

Примененный в разд. 4 метод может быть также использован для решения уравнения диффузии с необратимой сорбцией (без конвекции) в d-мерном случае. В результате для показателя неполной автомодельности получится выражение

$$\alpha_R=-\varepsilon\,(d/(2e))^{d/2}/\Gamma\,(d/2)\qquad(4.14)$$

которое в одномерном случае $d=1$ воспроизводит полученный ранее результат [10].

Авторы благодарят Н. Голденфельда за возможность ознакомиться с работой [10] до её публикации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гинзбург И. С., Ентов В. М.* Исследование динамики тонкой оторочки примеси в фильтрационном потоке. Численные методы решения задач фильтрации // Динамика многофазных сред. Новосибирск: Изд. ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1989. С. 76—81.
2. *Entov V. M., Ginzburg I. S., Teodorovich E. V.* Irreversible adsorbtion and dispersion effect in propagation of thin slugs of chemicals. Proc. VI European Simposium on Improved Oil Recovery. 21—23 May, 1991, Stavanger, Norway. V. 1, book II, P. 619—628.
3. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
4. *Баренблатт Г. И., Крылов А. П.* Об упруго-пластическом режиме фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. ОТН. 1955. № 2. С. 14—26.
5. *Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.* Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972. 288 с.
6. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1978. 207 с.
7. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 600 с.
8. *Wilson K. G.* Operator-product expansion and anomalous dimensions in the Thirring model // Phys. Rev. D. 1970. V. 2. No. 8. P. 1473—1477.
9. *Amit D. J.* Field theory, the renormalization group and critical phenomena. N. Y.: World Sci., 1984. 394 p.
10. *Goldenfeld N., Martin O., Oono Y., Fong Liu.* Anomalous dimensions and the renormalization group in a nonlinear diffusion process // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. No. 12. P. 1361—1364.
11. *Теодорович Э. В.* Явления турбулентного переноса и метод ренормализационной группы // ПММ. 1988. Т. 52. № 2. С. 218—224.
12. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1987. 397 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1990