

УДК 532.529 : 534.2

© 1992 г. Н. А. Гумеров

О КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКИХ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В ПУЗЫРЬКОВОЙ СРЕДЕ С МАЛОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Рассматривается распространение квазимонохроматических волновых пакетов в разреженной полидисперсной смеси слабосжимаемой жидкости с конечным набором фракций газовых пузырьков, различающихся по размерам. Методом многих масштабов в кубическом по амплитуде волны приближении получены уравнения для модуляционных волн: в условиях пренебрежения диссипативными эффектами — нелинейное уравнение Шредингера и при учете малой диссипации за счет вязкости жидкости и тепловых потерь при колебаниях пузырьков — уравнение Ландау — Гинзбурга. На основе анализа коэффициентов нелинейного уравнения Шредингера исследуется нелинейная (модуляционная) устойчивость волн в монодисперсной недиссипативной пузырьковой среде.

Ранее было получено линейное дисперсионное соотношение для акустических волн в полидисперсной пузырьковой среде без диссипации [1] и для волн в диссипативной среде [2]. Общая схема вывода амплитудных уравнений асимптотическим методом многих масштабов изложена в ряде монографий (например, [3]). Получены [4] уравнения модуляции для волн в монодисперсной пузырьковой смеси методом усредненного лагранжиана Уизема [5].

1. Уравнения движения недиссипативной среды. Плоские одномерные движения идеальной слабосжимаемой жидкости с малым объемным содержанием сферических газовых пузырьков ($\alpha_g \ll 1$) в условиях, когда тепловой диссипацией и капиллярными эффектами можно пренебречь, описываются уравнениями Иорданского [1, 6, 7]

$$d_t \rho + \rho \partial_x v = 0, \quad \rho d_t v + \partial_x p = 0, \quad d_t n_j + n_j \partial_x v = 0$$

$$\rho_l \left[a_j d_t^2 a_j + \frac{3}{2} (d_t a_j)^2 \right] = p_j - p, \quad \rho_l - \rho_{l0} = C_l^{-2} (p - p_0), \quad \rho = \rho_l (1 - \alpha_g)$$
(1.1)

$$p_j = p_0 (a_{j0}/a_j)^{3\kappa}, \quad \alpha_j = \frac{4}{3} \pi n_j a_j^3, \quad \alpha_g = \sum_{j=2}^N \alpha_j, \quad j = 2, \dots, N$$

Здесь ρ , p , v — плотность, давление и скорость смеси; a_j , p_j , α_j , n_j — радиус, давление, объемная доля и число пузырьков j -й фракции в единице объема смеси ($j = 2, \dots, N$); ρ_l , C_l — истинная плотность жидкости и скорость звука в чистой жидкости; κ — показатель политропы ($\kappa = \gamma_g$ при адиабатических и $\kappa = 1$ при изотермических колебаниях пузырька, γ_g — показатель адиабаты газа). Нулевой индекс означает невозмущенное состояние, $d_t = \partial_t + v \partial_x$.

Анализ распространения волн в пузырьковых системах [7] показывает, что характерные масштабы изменения плотности и скорости среды равны, соответственно $\rho_* = \rho_0 \alpha_{g0}$ и $v_* = (\alpha_{g0} p_0 / \rho_0)^{1/2}$, а характерная

скорость волны $C_* = [p_0/(\alpha_{g0}\rho_0)]^{1/2}$. Вводя безразмерные переменные

$$a_j = a_j'/a_{j0} - 1, \quad p = p'/p_0 - 1, \quad \rho = (\rho' - \rho_0)/\rho_*, \quad v = v'/v_*, \quad \xi_j = a_{j0}/a_* \quad (1.2)$$

$$t = t'/t_*, \quad x = x'/x_*, \quad t_* = a_* (\rho_0/p_0)^{1/2}, \quad x_* = a_* \alpha_{g0}^{-1/2},$$

$$b^2 = p_0/(\rho_{l0} C_l^2 \alpha_{g0})$$

где штрих означает размерные переменные, a_* — некоторый представительный радиус пузырьков (для монодисперсной смеси это, например, a_0), и пренебрегая величинами порядка α_{g0} и $|\rho_l - \rho_{l0}|/\rho_{l0}$ по сравнению с единицей, можно после исключения v из системы (1.1) записать безразмерные уравнения

$$\partial_x^2 p - \partial_t^2 \rho = 0, \quad \rho - 1 - b^2 p + \langle (1 + a_j)^3 \rangle = 0 \quad (1.3)$$

$$\xi_j^2 [(1 + a_j) \partial_t^2 a_j + 3/2 (\partial_t a_j)^2] - (1 + a_j)^{-3\kappa} + p + 1 = 0$$

$$j = 2, \dots, N$$

Здесь и далее угловые скобки означают действие линейного оператора

$$\langle f_j \rangle = \sum_{j=2}^N v_j f_j, \quad v_j = \frac{\alpha_{j0}}{\alpha_{g0}}, \quad j = 2, \dots, N \quad (1.4)$$

v_j — доля пузырьков j -й фракции в общем объеме пузырьков).

2. Схема вывода амплитудных уравнений. Будем исследовать уравнения (1.3), (1.4) в окрестности равновесного состояния $p = 0, \rho = 0, a_j = 0$, представляя решения в виде асимптотических рядов по малому параметру ε (относительной амплитуде возмущения)

$$p = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m p_m, \quad \rho = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \rho_m, \quad a_j = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m a_{jm} \quad (j = 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

Зависимости неизвестных от x и t , согласно основной идее построения равномерно пригодных разложений методом многих масштабов [3, 5, 8], будем считать зависимостями от наборов «медленных» координат и времен $\{x_s\}, \{t_s\}, x_s = \varepsilon^s x, t_s = \varepsilon^s t, s = 0, 1, 2, \dots$. При этом все x_s и t_s полагаются формально независимыми, а операторы дифференцирования представляются в виде рядов по ε

$$\partial_x = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \partial_{x_s}, \quad \partial_t = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \partial_{t_s}, \quad \partial_{x_s} = \frac{\partial}{\partial x_s}, \quad \partial_{t_s} = \frac{\partial}{\partial t_s} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1), (2.2) в (1.3) и собирая члены при одинаковых степенях ε , получим в m -м приближении линейную неоднородную систему

$$\partial_{x_0}^2 p_m - \partial_{t_0}^2 \rho_m = f_m, \quad \rho_m - b^2 p_m + 3 \langle a_{jm} \rangle = g_m$$

$$\xi_j^2 \partial_{t_0}^2 a_{jm} + 3\kappa a_{jm} + p_m = h_{jm}, \quad j = 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Величины f_m, g_m, h_{jm} определяются из низших приближений.

Рассмотрим частные решения системы (2.3) вида

$$\chi_m = \chi_{m0}^0 + \sum_{n>0} (\chi_{mn}^0 e^{in\theta} + \text{с. с.}), \quad \theta = kx_0 - \omega t_0, \quad \chi = p, \rho, a_j, f, g, h_j \quad (2.4)$$

где θ, k, ω — фаза, волновое число и циклическая частота, χ_{mn}^0 — комплексные амплитуды, зависящие только от $x_s, t_s, s \geq 1$, символ с.с. означает

член, комплексно сопряженный к первому члену в скобках. Учитывая ортогональность тригонометрической системы, имеем для n -й гармоники в m -м приближении

$$n^2 p_{mn}^0 (k^2 - 3\omega^2 \langle \Lambda_{jn}^{-1} \rangle - \omega^2 b^2) = n^2 \omega^2 (g_{mn}^0 - 3 \langle \Lambda_{jn}^{-1} h_{jmn} \rangle) - f_{mn}^0 \quad (2.5)$$

$$a_{jmn}^0 = \Lambda_{jn}^{-1} (h_{jmn}^0 - p_{mn}^0), \quad \rho_{mn}^0 = g_{mn}^0 - 3 \langle \Lambda_{jn}^{-1} h_{jmn}^0 \rangle +$$

$$+ [3 \langle \Lambda_{jn}^{-1} \rangle + b^2] p_{mn}^0$$

$$\Lambda_{jn} = 3\kappa - \xi_j^2 \omega^2 n^2, \quad j = 2, \dots, N, \quad m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots$$

Пусть имеет место дисперсионное соотношение [1] (см. разд. 3)

$$k^2 = \omega^2 (b^2 + 3 \langle \Lambda_{j1}^{-1} \rangle) \quad (2.6)$$

Тогда для существования решений вида (2.4) необходимо выполнение следующих условий для резонансных гармоник f , g и h_j :

$$\text{при } n = 0: f_{m0}^0 = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Решение при этом определяется с точностью до произвольного значения p_{m0}^0 :

$$\rho_{m0}^0 = g_{m0}^0 - \kappa^{-1} [\langle h_{jm0}^0 \rangle - (1 + \kappa b^2) p_{m0}^0],$$

$$a_{jm0}^0 = 1/3 \kappa^{-1} (h_{jm0}^0 - p_{m0}^0) \quad (2.8)$$

$$\text{при } n = 1: \omega^2 (g_{m1}^0 - 3 \langle \Lambda_{j1}^{-1} h_{jm1} \rangle) - f_{m1}^0 = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Решение также неоднозначно. Учитывая соотношения (2.6), (2.9), имеем

$$\rho_{m1}^0 = \omega^{-2} (f_{m1}^0 + k^2 p_{m1}^0), \quad a_{jm1}^0 = \Lambda_{j1}^{-1} (h_{jm1}^0 - p_{m1}^0) \quad (2.10)$$

Далее будем считать, что при прочих n , если выполнено соотношение (2.6), то $\langle \Lambda_{jn}^{-1} \rangle \neq \langle \Lambda_{j1}^{-1} \rangle$. В этом случае решение существует и единственно (см. (2.5)):

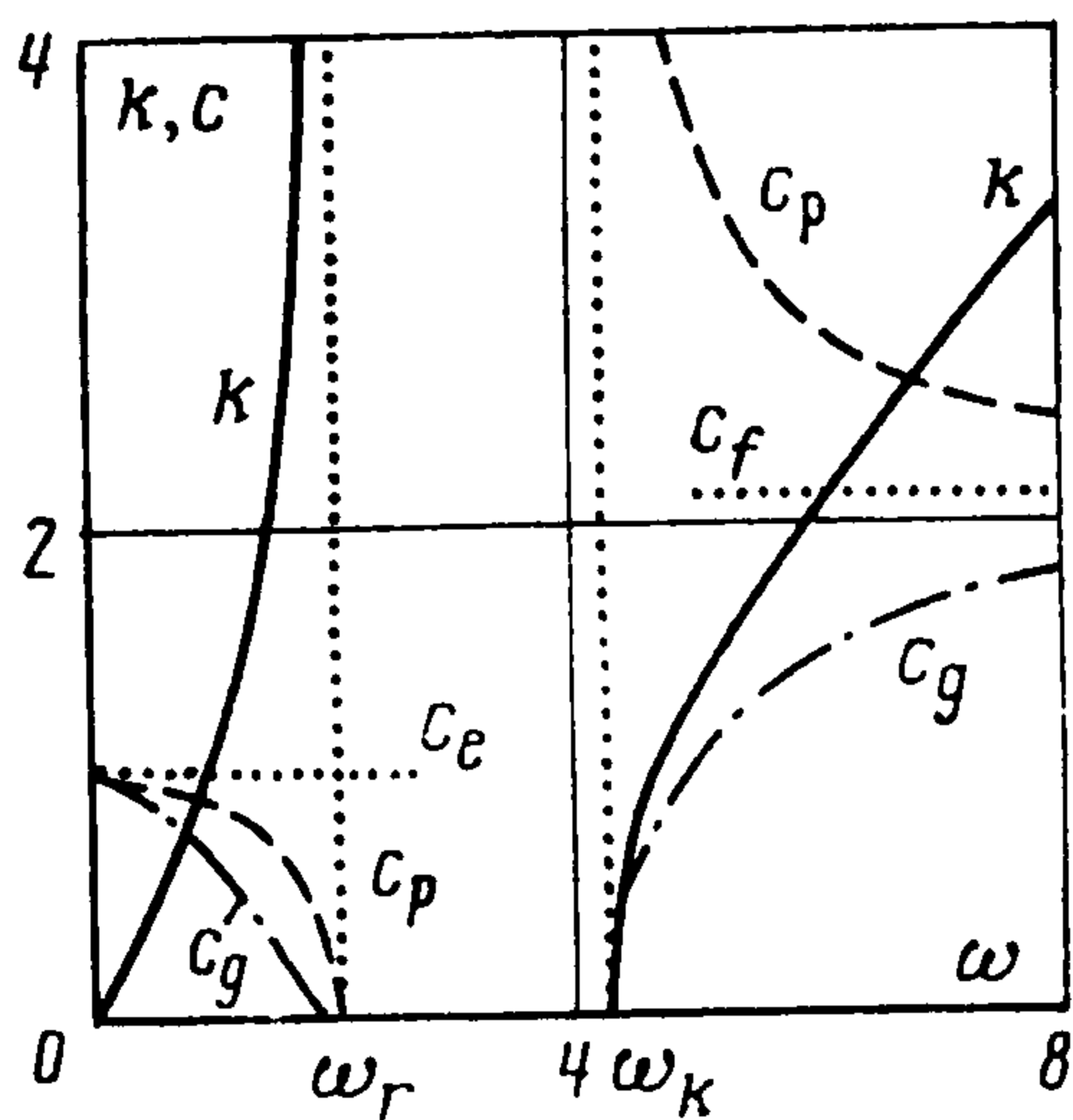
$$p_{mn}^0 = \frac{n^2 \omega^2 (g_{mn}^0 - 3 \langle \Lambda_{jn}^{-1} h_{jmn} \rangle) - f_{mn}^0}{3n^2 \omega^2 \langle \Lambda_{j1}^{-1} - \Lambda_{jn}^{-1} \rangle}, \quad n \geq 2 \quad (2.11)$$

Таким образом, соотношения (2.5), (2.8), (2.10), (2.11) определяют n -е гармоники в m -м приближении. Условия существования решений (2.7), (2.9) при этом «управляют» поведением комплексных амплитуд, подчиняя их соответствующим дифференциальным уравнениям, записанным в «медленных» координатах.

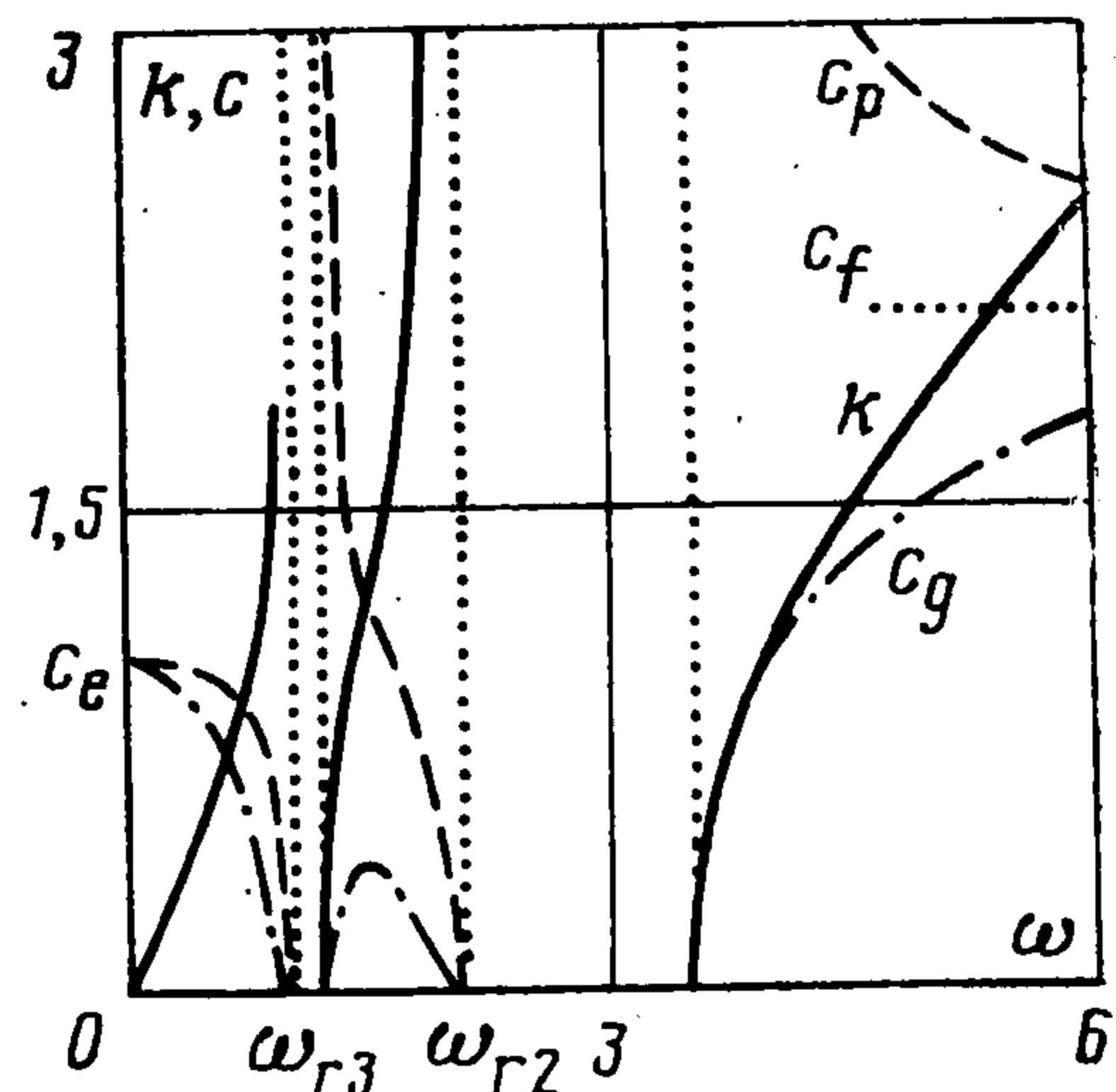
3. Первое приближение. Пусть основным тоном является монохроматический сигнал: $p_1 = (p_{11}^0 \exp(i\theta) + \text{с.с.})$. В первом приближении система (2.3) однородна ($f_1 = g_1 = h_{j1} = 0$) и условия существования (2.7), (2.9) выполнены. Нетривиальное решение ($p_{11}^0 \neq 0$) существует только в том случае, когда имеет место дисперсионное соотношение (2.6), причем из (2.10) следует

$$\rho_{11}^0 = c_p^{-2} p_{11}^0, \quad a_{j11}^0 = -\Lambda_{j1}^{-1} p_{11}^0, \quad j = 2, \dots, N \quad (c_p = \omega/k) \quad (3.1)$$

На фиг. 1, 2 представлены зависимости волнового числа k (сплошные линии), фазовой $c_p = \omega/k$ (штриховые) и групповой $c_g = d\omega/dk$ (штрихпунктир) скоростей звука от частоты ω для монодисперсной ($\xi_j \equiv 1$) и



Фиг. 1



Фиг. 2

двухфракционной ($N = 3$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 2$, $v_2 = v_3 = 0,5$ смесей воды с достаточно крупными пузырьками воздуха при давлении $p_0 = 10^5$ Па), температуре $T_0 = 293$ К ($\rho_{l0} = 1000$ кг/м³, $C_l = 1500$ м/с) и объемном содержании $\alpha_{g0} = 2 \cdot 10^{-4}$ ($\kappa = \gamma_g = 1,4$, $b^2 = 0,222$). Как следует из (2.6), равновесная c_e и замороженная c_f скорости звука в смеси имеют вид

$$c_e = \lim_{\omega \rightarrow 0} c_p = \lim_{\omega \rightarrow 0} c_g = (b^2 + \kappa^{-1})^{-1/2}, \quad c_f = \lim_{\omega \rightarrow \infty} c_p = \lim_{\omega \rightarrow \infty} c_g = b^{-1} \quad (3.2)$$

На фигурах вертикальными пунктирными линиями отмечены границы областей ω , при которых $k^2 < 0$ (так называемые «диапазоны акустической непрозрачности среды» [7]). Отметим, что для M -фракционной смеси число таких диапазонов равно M , нижняя грань $\omega_{Гj}$ каждого диапазона равна резонансной частоте пузырьков j -й фракции $\omega_{Гj}^2 = 3\kappa/\xi_j^2$, а верхняя $\omega_{кj}$ — соответствующему корню уравнения $k(\omega) = 0$.

4. Второе приближение. Подставляя соотношения (2.1), (2.2) в (1.3) и собирая члены при ε^2 , находим из (2.3)

$$f_2 = 2 (\partial_{t_0} \partial_{t_1} p_1 - \partial_{x_0} \partial_{x_1} p_1), \quad g_2 = -3 \langle a_{j1}^2 \rangle \quad (4.1)$$

$$h_{j2} = -\xi_j^2 [a_{j1} \partial_{t_0}^2 a_{j1} + 3/2 (\partial_{t_0} a_{j1})^2 + 2 \partial_{t_0} \partial_{t_1} a_{j1}] + 3/2 \kappa (3\kappa + 1) a_{j1}^2$$

Из (4.1), (3.1) определим все гармоники (2.4) функций f_2 , g_2 , h_{j2} :

$$f_{20}^0 = 0, \quad f_{21}^0 = -2ik (c_p^{-1} \partial_{t_1} p_{11}^0 + \partial_{x_1} p_{11}^0), \quad f_{22}^0 = 0$$

$$g_{20}^0 = -6 \langle \Lambda_{j1}^{-2} \rangle |p_{11}^0|^2, \quad g_{21}^0 = 0, \quad g_{22}^0 = -3 \langle \Lambda_{j1}^{-2} \rangle (p_{11}^0)^2$$

$$h_{j20}^0 = \Psi_j^{(1)} \Lambda_{j1}^{-2} |p_{11}^0|^2, \quad h_{j21}^0 = -2i\omega \xi_j^2 \Lambda_{j1}^{-1} \partial_{t_1} p_{11}^0, \quad h_{j22}^0 = \frac{1}{2} \Psi_j^{(2)} \Lambda_{j1}^{-2} (p_{11}^0)^2$$

$$\Psi_j^{(1)} = 3\kappa (3\kappa + 1) - \xi_j^2 \omega^2, \quad \Psi_j^{(2)} = 3\kappa (3\kappa + 1) + 5\xi_j^2 \omega^2 \quad (4.2)$$

Условие (2.7) выполняется, поэтому имеем из (2.8), (4.2)

$$\rho_{20}^0 = -\kappa^{-1} \langle \Psi_j^{(3)} \Lambda_{j1}^{-2} \rangle |p_{11}^0|^2 + c_e^{-2} p_{20}^0, \quad \Psi_j^{(3)} = 9\kappa (\kappa + 1) - \xi_j^2 \omega^2$$

$$a_{j20}^0 = 1/3 \kappa^{-1} [\Psi_j^{(1)} \Lambda_{j1}^{-2} |p_{11}^0|^2 - p_{20}^0] \quad (4.3)$$

Условие (2.9) при учете (2.6) приводит к уравнению

$$\partial_{11} p_{11}^0 + c_g \partial_{x_1} p_{11}^0 = 0, \quad c_g = d\omega/dk = (c_p^{-1} + 3c_p \omega^2 \langle \xi_j^2 \Lambda_{j1}^{-2} \rangle)^{-1} \quad (4.4)$$

что согласуется с общей теорией [3, 5]. Уравнение (4.4) показывает, что удобно перейти к сопутствующей системе координат, движущейся с групповой скоростью

$$p_{11}^0(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots) = p_{11}^0(\eta_1, x_2, t_2, \dots), \quad \eta_1 = x_1 - c_g t_1 \quad (4.5)$$

Учитывая соотношение (4.5), получим из (2.10)

$$\begin{aligned} p_{21}^0 &= -2i (\omega c_p)^{-1} (1 - c_g c_p^{-1}) \partial_{\eta_1} p_{11}^0 + c_p^{-2} p_{21}^0, \quad a_{j21}^0 = \\ &= 2i c_g \Lambda_{j1}^{-2} \omega \xi_j^2 \partial_{\eta_1} p_{11}^0 - \Lambda_{j1}^{-1} p_{21}^0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Гармоника $n = 2$ не является резонансной, поэтому из (2.11), (2.5), (2.6), (4.2) находим

$$\begin{aligned} p_{22}^0 &= -\frac{3}{2} \langle \Psi_j^{(4)} \Lambda_{j1}^{-2} \Lambda_{j2}^{-1} \rangle \langle \Lambda_{j1}^{-1} - \Lambda_{j2}^{-1} \rangle^{-1} (p_{11}^0)^2, \quad \Psi_j^{(4)} = 3\kappa(\kappa + 1) - \xi_j^2 \omega^2 \\ p_{22}^0 &= c_p^{-2} p_{22}^0, \quad a_{j22}^0 = \Lambda_{j2}^{-1} [1/2 \Psi_j^{(2)} \Lambda_{j1}^{-2} (p_{11}^0)^2 - p_{22}^0] \end{aligned} \quad (4.7)$$

5. Уравнение Шредингера. Подставляя соотношение (2.1), (2.2) в (1.3), собирая члены при ε^3 и сравнивая с (2.3), определяем

$$\begin{aligned} f_3 &= \partial_{t_1}^2 \rho_1 + 2\partial_{t_0} \partial_{t_2} \rho_1 + [2\partial_{t_0} \partial_{t_1} \rho_2 - \partial_{x_1}^2 p_1 - 2\partial_{x_0} \partial_{x_2} p_1 - 2\partial_{x_0} \partial_{x_1} p_2] \quad (5.1) \\ g_3 &= -\langle 6a_{j1} a_{j2} + a_{j1}^3 \rangle, \quad h_{j3} = -\xi_j^2 [a_{j2} \partial_{t_0}^2 a_{j1} + a_{j1} \partial_{t_0}^2 a_{j2} + \\ &+ 2a_{j1} \partial_{t_0} \partial_{t_1} a_{j1} + 2\partial_{t_0} \partial_{t_1} a_{j2} + \partial_{t_1}^2 a_{j1} + 2\partial_{t_0} \partial_{t_2} a_{j1} + \\ &+ 3(\partial_{t_1} a_{j1} + \partial_{t_0} a_{j2}) \partial_{t_0} a_{j1}] + 3\kappa(3\kappa + 1) a_{j1} a_{j2} - 1/2 \kappa(3\kappa + \\ &+ 1)(3\kappa + 2) a_{j1}^3 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что спектр третьего приближения состоит из гармоник $n = 0, 1, 2, 3$, причем $f_{30}^0 = 0$, поэтому первое условие существования решений (2.7) выполнено. Чтобы удовлетворить второму условию (2.9) выделим первую гармонику в соотношениях (5.1). Обозначая чертой сверху комплексное сопряжение, найдем из (5.1) при учете соотношений (3.1), (4.5), (4.6)

$$\begin{aligned} f_{31}^0 &= -2ik (c_p^{-1} \partial_{t_2} + \partial_{x_2}) p_{11}^0 - (3c_p^{-2} c_g^2 - 4c_p^{-1} c_g + 1) \partial_{\eta_1}^2 p_{11}^0 + \\ &+ 2ik (c_p^{-1} c_g - 1) \partial_{\eta_1} p_{21}^0 \\ g_{31}^0 &= -3 \langle 2\bar{a}_{j11}^0 a_{j22}^0 + 2a_{j11}^0 \bar{a}_{j20}^0 + a_{j11}^0 | a_{j11}^0 |^2 \rangle, \\ h_{j31}^0 &= -\xi_j^2 [\omega^2 (\bar{a}_{j11}^0 a_{j22}^0 - a_{j11}^0 \bar{a}_{j20}^0 + 2i\omega \Lambda_{j1}^{-1} \partial_{t_2} p_{11}^0 - \\ &- c_g^2) (\Lambda_{j1}^{-1} + 4\omega^2 \xi_j^2 \Lambda_{j1}^{-2}) \partial_{\eta_1}^2 p_{11}^0 - 2i\omega c_g \Lambda_{j1}^{-1} \partial_{\eta_1} p_{21}^0] + \\ &+ 3\kappa(3\kappa + 1) [\bar{a}_{j11}^0 a_{j22}^0 + a_{j11}^0 \bar{a}_{j20}^0 - 1/2(3\kappa + 2) a_{j11}^0 | a_{j11}^0 |^2] \end{aligned} \quad (5.2)$$

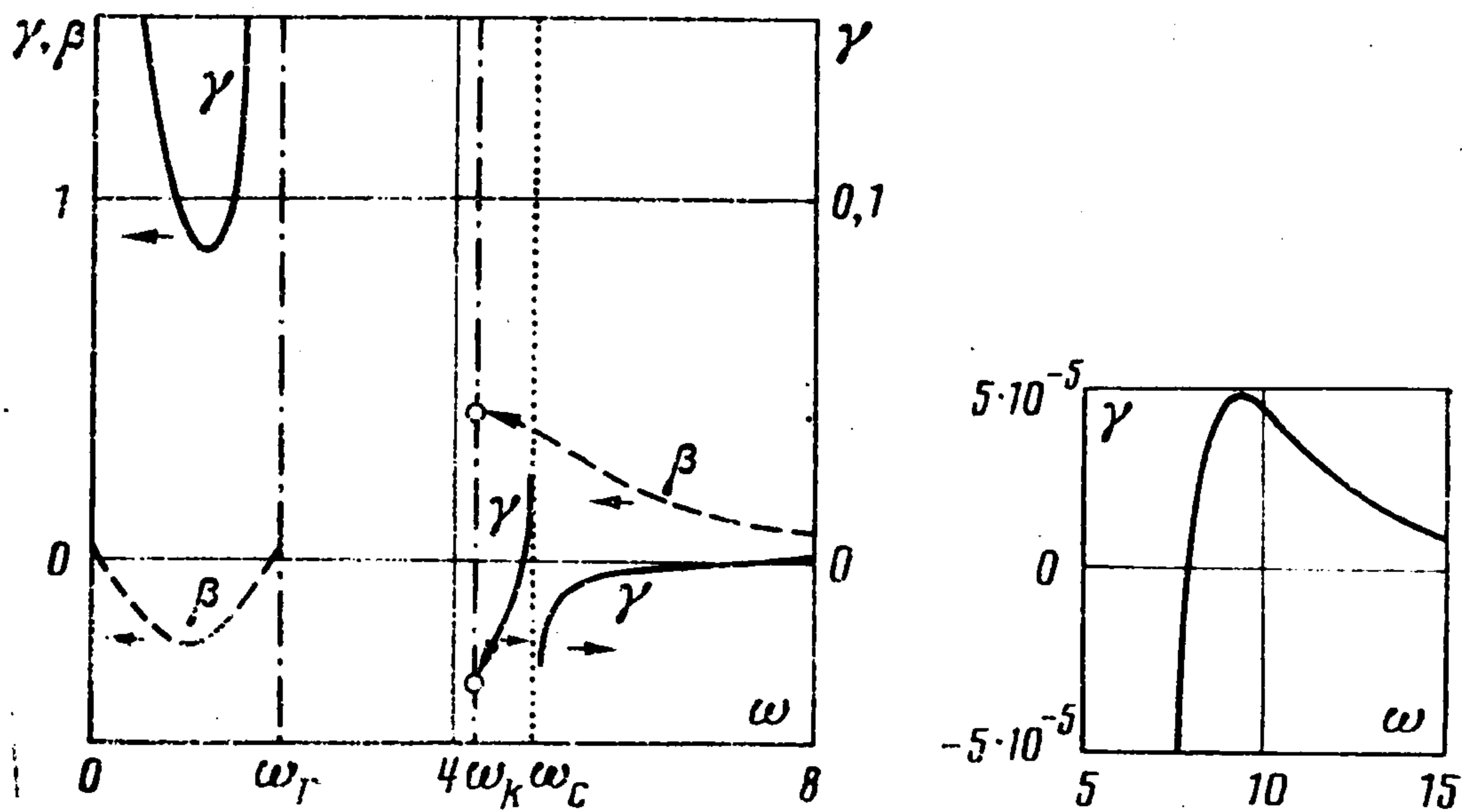
Заметим, что в (5.2) входят две неопределенные величины p_{21}^0 и p_{20}^0 (через a_{j20}^0 , см. (4.3)). Первая из них автоматически уничтожается при подстановке (5.2) в (2.9), вторая же должна определяться из дополнительных соображений. Обратимся для этого к четвертому приближению. Непосредственно можно убедиться, что

$$f_{40}^0 = \partial_{t_1}^2 \rho_{20}^0 - \partial_{x_1}^2 p_{20}^0 = \partial_{\eta_1}^2 (c_g^2 \rho_{20}^0 - p_{20}^0)$$

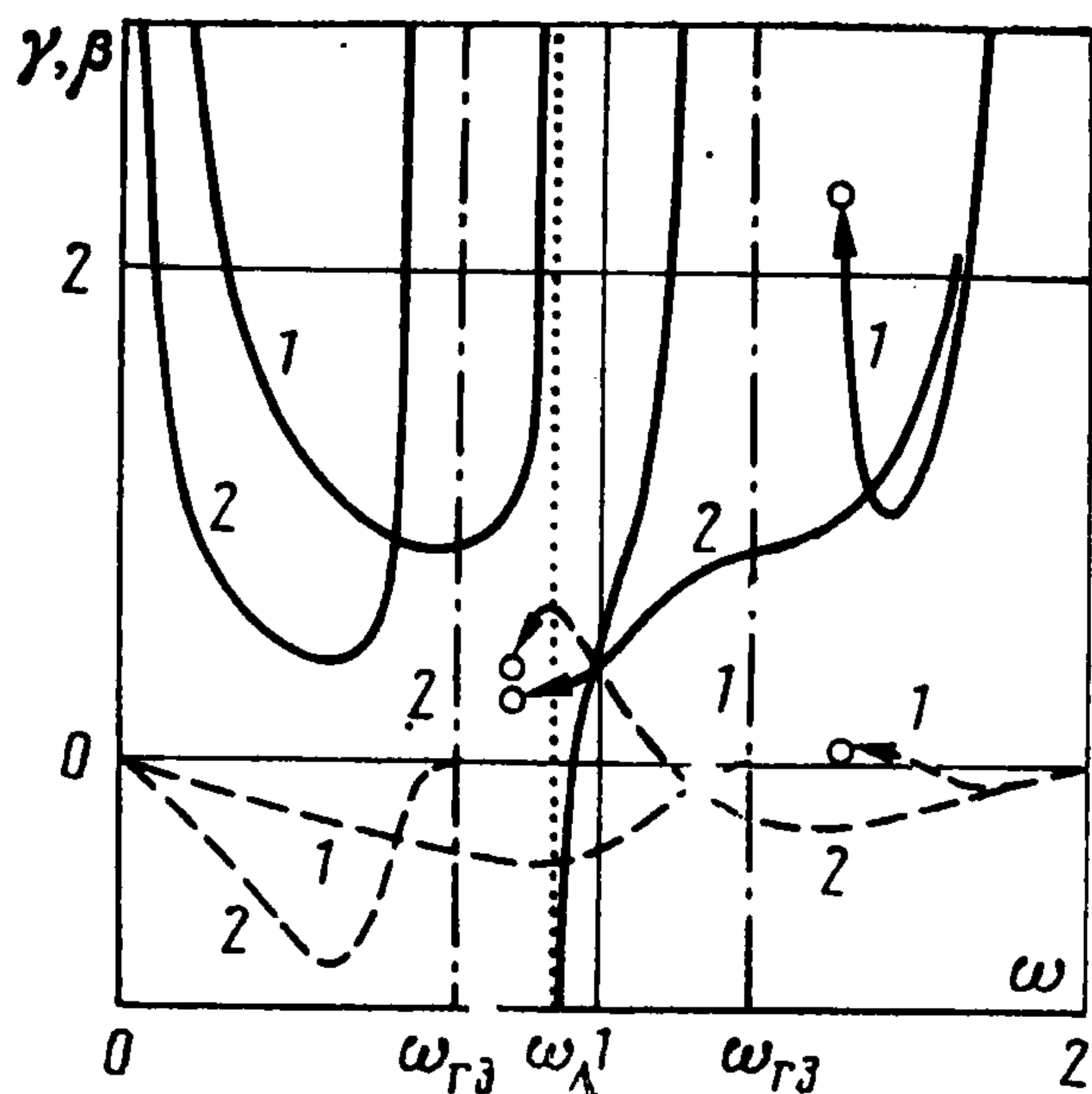
Поскольку решения в четвертом приближении существуют только при выполнении условий (2.7) ($f_{40}^0 = 0$), то без ограничения общности можно считать $p_{20}^0 = c_g^2 \rho_{20}^0$ (действительно, p_{20}^0 обусловлено квадратичной нелинейностью). Отсюда и из (4.3) находим

$$p_{20}^0 = -\kappa^{-1} (c_g^{-2} - c_e^{-2})^{-1} \langle \Psi_j^{(3)} \Lambda_{j1}^{-2} \rangle | p_{11}^0 |^2 \quad (c_e^{-2} = b^2 + \kappa^{-1}) \quad (5.3)$$

Теперь, когда все величины могут быть выражены через комплексную амплитуду давления p_{11}^0 , можно подставить выражения (5.2) в (2.9) и,



Фиг. 3



Фиг. 4

используя соотношения (2.6), (3.1), (4.2)–(4.4), (4.7), (5.3), найти

$$i(\partial_{t_2} + c_g \partial_{x_2}) p_{11}^0 + \beta \partial_{\eta_1}^2 p_{11}^0 + \gamma p_{11}^0 |p_{11}^0|^2 = 0 \quad (5.4)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{dc_g}{dk} = \frac{1}{2} k^{-1} c_g \{1 - c_g^2 [5 (c_p c_g)^{-1} - 4 c_p^{-2} + 12 \omega^4 \langle \xi_j^4 \Lambda_{j1}^{-3} \rangle]\}$$

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{1}{2} c_g c_p \omega \{ & \kappa^{-1} [\langle \Psi_j^{(1)} \Psi_j^{(3)} \Lambda_{j1}^{-4} \rangle + \kappa^{-1} (c_g^{-2} - c_e^{-2})^{-1} \langle \Psi_j^{(3)} \Lambda_{j1}^{-2} \rangle^2] - \\ & - \frac{3}{2} [\langle \Psi_j^{(5)} \Lambda_{j1}^{-4} \rangle - 3 \langle \Psi_j^{(2)} \Psi_j^{(4)} \Lambda_{j1}^{-4} \Lambda_{j2}^{-1} \rangle + \\ & + 9 \langle \Psi_j^{(4)} \Lambda_{j1}^{-2} \Lambda_{j2}^{-1} \rangle^2 \langle \Lambda_{j2}^{-1} - \Lambda_{j1}^{-1} \rangle^{-1}] \} \\ & (\Psi_j^{(5)} = 27 \kappa^2 (\kappa + 1) + 2 \omega^2 \xi_j^2) \end{aligned}$$

Переходя к системе координат, движущейся с групповой скоростью $\eta_2 = x_2 - c_g t_2$ и считая $p_{11}^0 = A(\eta_1, \eta_2, t_2, \dots)$, получим стандартный вид нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [3, 5]

$$i \partial_{t_2} A + \beta \partial_{\eta_1}^2 A + \gamma A |A|^2 = 0 \quad (5.5)$$

На фиг. 3, 4 проиллюстрированы частотные зависимости коэффициентов НУШ γ (сплошные линии) и β (штриховые) для моно- (фиг. 3) и полидисперсных (двухфракционных, $N = 3$, фиг. 4) смесей с параметрами $\kappa = 1,4$, $b^2 = 0,222$. На фиг. 3 вертикальные штрихпунктирные линии выделяют диапазон акустической непрозрачности среды (см. фиг. 1), верти-

кальная пунктирная линия, соответствующая $\omega = \omega_c$, является асимптотой γ (частота ω_c — корень уравнения $c_g(\omega) = c_e$ и при $\omega \rightarrow \omega_c$ из (5.4) следует $|\gamma| \rightarrow \infty$; геометрически ω_c можно найти из фиг. 1, продолжив линию $c = c_e$ до пересечения с $c = c_g$; в точках $\omega = 0$ и $\omega = \omega_c$ угловые коэффициенты касательных к $k(\omega)$ совпадают).

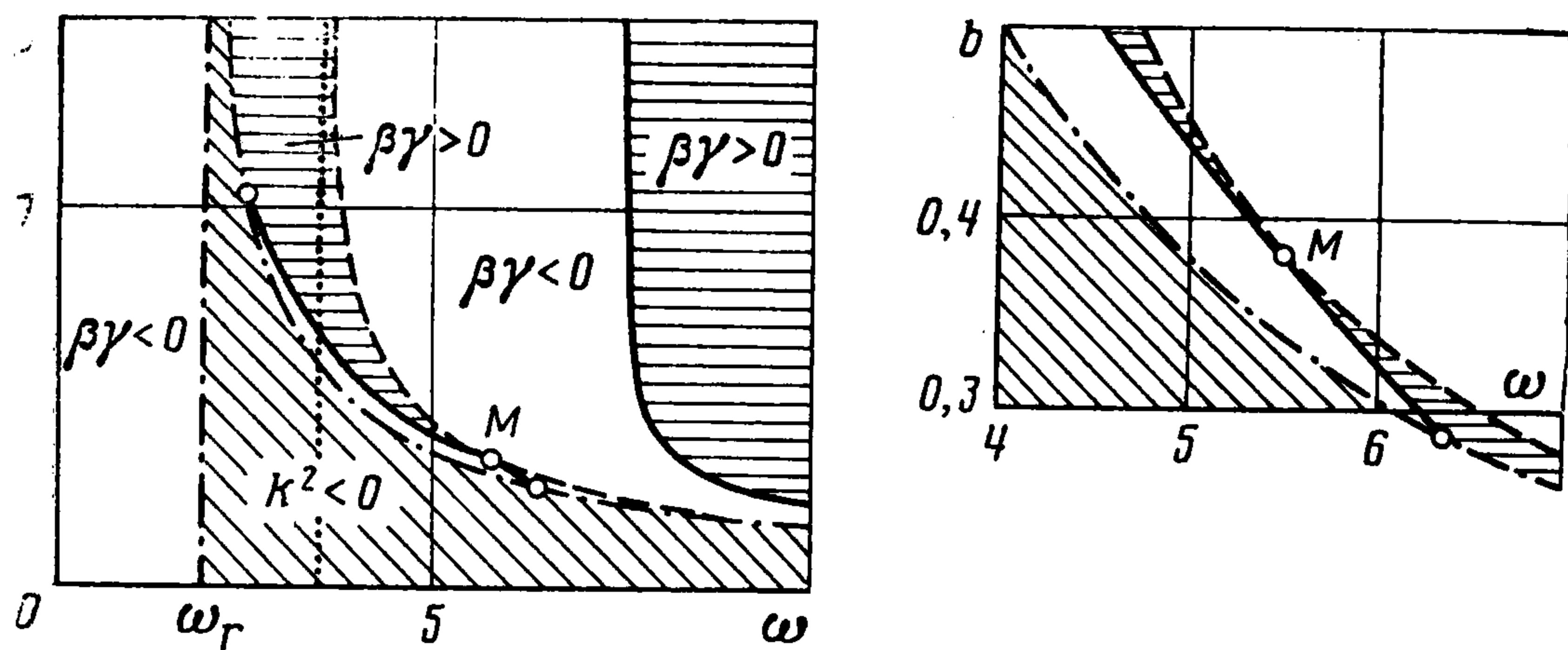
Линии 1 и 2 на фиг. 4 соответствуют $\xi_3 = 1,6$ и $\xi_3 = 3$ при $\xi_2 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = 0,5$ и построены в диапазоне частот $\omega < \omega_{r2} = (3\kappa)^{1/2}$. В первом варианте имеется особенность γ при $\omega = \omega_\Delta$ (вертикальная пунктирная линия), когда $\langle \Lambda_{j1}^{-1}(\omega_\Delta) \rangle = \langle \Lambda_{j2}^{-1}(\omega_\Delta) \rangle$ и $|\gamma| \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \omega_\Delta$ (5.4), во втором варианте особенность такого типа отсутствует (она существует для двухфракционной смеси с $\xi_2 = 1$, $\nu_2 = \nu_3 = 0,5$ только при $0,5 < \xi_3 < 2$). Геометрически (см. фиг. 2) существование указанной особенности эквивалентно существованию прямой $k = \lambda\omega$, пересекающей две ветви дисперсионного соотношения $k = k(\omega)$ соответственно в точках ($\omega = \omega_\Delta$ и $\omega = 2\omega_\Delta$). На фигуре вертикальные штрихпунктирные линии отмечают резонансные частоты фракции крупных пузырьков ($\omega_{r3}^2 = 3\kappa/\xi_3^2$), соответствующие нижним границам низкочастотных диапазонов акустической непрозрачности; верхние грани этих диапазонов можно определить по предельным (конечным) значениям β и γ (стрелки на кривых). Отметим, что качественное поведение β и γ для полидисперсных смесей в области $\omega > \omega_{r2}$ такое же, как и для монодисперсной (фиг. 3).

6. Модуляционная неустойчивость. Вопрос о нелинейной модуляционной устойчивости волновых пакетов в недиссипативной среде может быть исследован на основе анализа знаков коэффициентов НУШ [3, 5]. Так, случай $\beta\gamma < 0$ соответствует устойчивости (нейтральной), а $\beta\gamma > 0$ — неустойчивости Бенджамина — Фейра [3], когда НУШ допускает решения в виде солитонов огибающей волнового пакета.

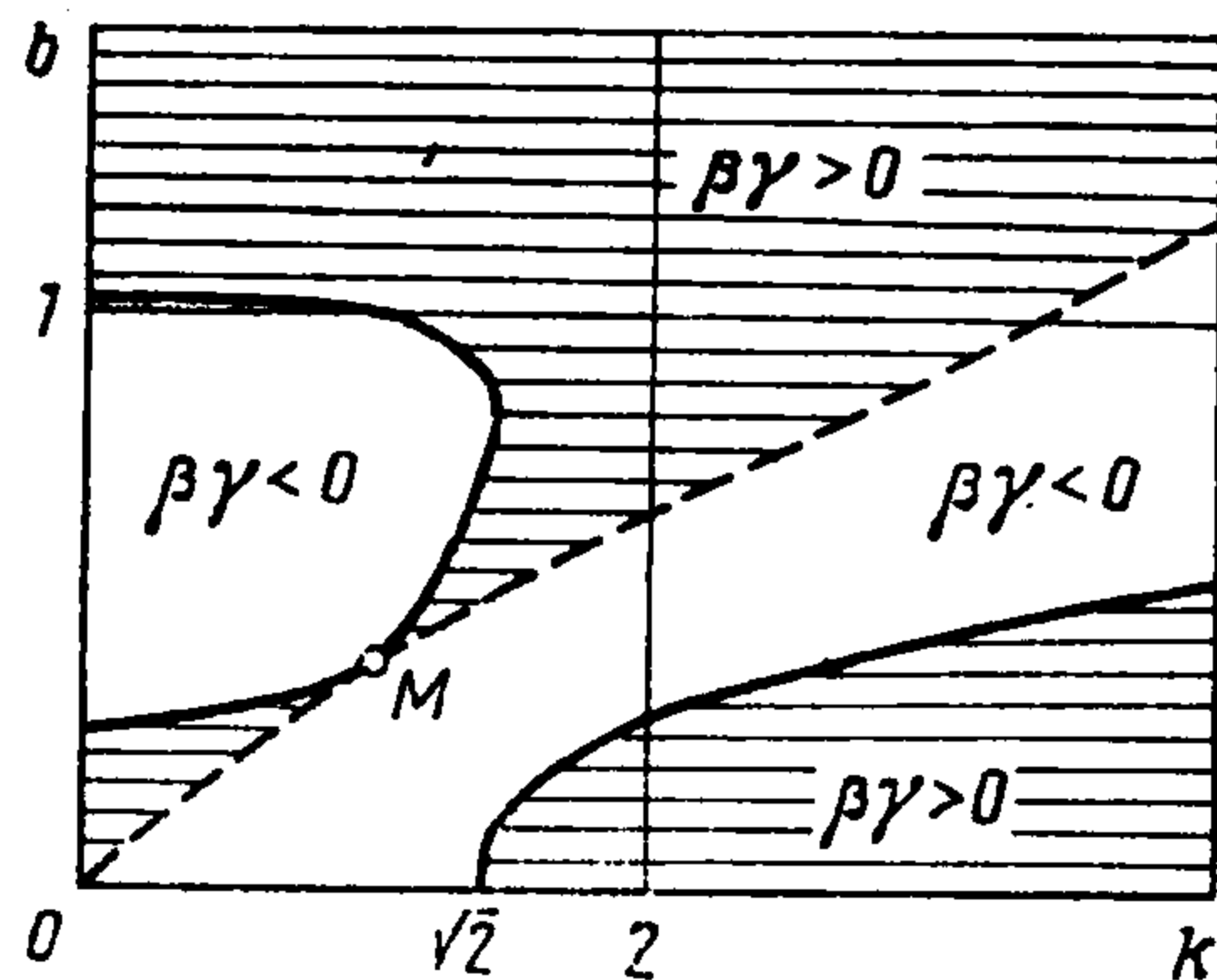
Наибольший интерес, по-видимому, представляют области устойчивости в пространстве параметров. Однако уже для монодисперсной смеси это пространство трехмерно (ω, b, κ) и его размерность увеличивается на 2 с добавлением каждой новой фракции пузырьков (ν_j и ξ_j), в последнем случае существенно возрастает число нулей и особенностей коэффициентов НУШ, отражающее взаимодействие различных ветвей дисперсионного соотношения (см. фиг. 3, 4).

В качестве примера рассмотрим важный с точки зрения теории случай монодисперсной смеси. При этом фиксируем показатель политропы κ , а ω и b будем считать произвольными (параметр b характеризует отношение сжимаемости несущей фазы к сжимаемости среды за счет пузырьков; так, для несжимаемой несущей фазы ($C_l = \infty$) $b = 0$, для среды без пузырьков ($\alpha_{g0} = 0$) $b = \infty$, см. (1.2)).

Результаты анализа и расчетов областей устойчивости (ω, b) и (k, b) по соотношению (5.4) при $\kappa = 1,4$ представлены на фиг. 5, 6. Области устойчивости $\beta\gamma < 0$ здесь не заштрихованы, на фиг. 5 диапазон акустической непрозрачности ($k^2 < 0$) показан кривой штриховкой. При частотах основного сигнала $\omega < \omega_r$ солитоны огибающей не формируются ($\beta\gamma < 0$), поэтому если исследуется развитие возмущений с заданным волновым числом, то из двух ветвей дисперсионного соотношения (фиг. 1) $\omega_-(k)$, $\omega_+(k)$ нижняя ветвь ($\omega_-(k) < \omega_r$) будет устойчивой при любых k и b . Кривая $\omega = \omega_k$ ($\omega_k^2 = 3(b^{-2} + \kappa)$), изображенная на фиг. 5 штрихпунктиром, соответствует прямой $k = 0$ на фиг. 6 (на фиг. 6 отображаются k , соответствующие верхней ветви



Фиг. 5



Фиг. 6

$\omega_+(k) \geq \omega_k$ дисперсионного соотношения). Штриховой линией (на фиг. 5 с вертикальной асимптотой, обозначенной пунктиром) изображена кривая $\omega = \omega_c$ ($c_g(\omega_c) = c_e$, фиг. 3), имеющая параметрическое уравнение

$$\omega^2 = 3\kappa z^{-1}(1+2z), \quad k^2 = 3z(1+2z)^2(1+z)^{-2}(1-z)^{-1}$$

$$b^2 = \kappa^{-1}(1+z+z^2)(1+z)^{-2}(1-z)^{-1}, \quad 0 < z < 1$$

Особенность коэффициента γ на этой линии устранима только в точке M ($z_M = (3\kappa + 1)^{-1}$, в которой происходит касание штриховой и сплошной, соответствующей нулю коэффициента γ , линий. Вторая сплошная линия, ограничивающая область высокочастотной неустойчивости, соответствует второму нулю коэффициента γ (см. также фиг. 3). Указанная кривая на фиг. 6 имеет предельную точку $k = \sqrt{2}$. Отметим, что неустойчивость, порождаемая в окрестности кривой $\omega = \omega_c$, имеет физический смысл длинно-коротковолнового резонанса Бенни [3].

Некоторый общий результат для моно- и полидисперсных смесей можно получить, рассмотрев главные члены низко- и высокочастотных асимптотик коэффициентов НУШ (5.4)

$$\beta |_{\omega \rightarrow 0} \sim -1/2 \kappa^{-2} c_e^4 \omega^{-1} \langle \xi_j^2 \rangle, \quad \gamma |_{\omega \rightarrow 0} \sim 1/4 \kappa^{-2} (\kappa + 1)^2 c_e^2 \omega^{-1} \langle \xi_j^2 \rangle^{-1} \quad (6.1)$$

$$\beta |_{\omega \rightarrow \infty} \sim 3/2 c_f^4 \omega^{-3} \langle \xi_j^{-2} \rangle, \quad \gamma |_{\omega \rightarrow \infty} \sim 1/2 \kappa^{-1} c_f^2 \omega^{-3} (\langle \xi_j^{-4} \rangle - \langle \xi_j^{-2} \rangle^2) \quad (c_f = b^{-1})$$

Для монодисперсной смеси ($\xi_j \equiv 1$) асимптотика γ при $\omega \rightarrow \infty$ имеет вид $\gamma \sim 9/4 c_f^2 \omega^{-5}$. Поскольку в силу неравенства Гельдера $\langle \xi_j^{-4} \rangle \geq \langle \xi_j^{-2} \rangle^2$, то для моно- и полидисперсных смесей из (6.1) следует $\beta\gamma < 0$ при $\omega \rightarrow 0$ и $\beta\gamma > 0$ при $\omega \rightarrow \infty$, что означает устойчивость низкочастотных волн и неустойчивость высокочастотных.

7. Учет малой диссипации. Уравнение Ландау — Гинзбурга. Обратимся к исходной системе уравнений (1.1). В случае учета вязкости жидкости

в межфазном взаимодействии и тепловой диссипации, которая может быть найдена из решения внутренней задачи теплопроводности в газе [7], уравнения Релея — Ламба и политропных колебаний преобразуются [7] в следующие:

$$\rho_l [a_j d_t^2 a_j + 3/2 (d_t a_j)^2] + 4\mu_l a_j^{-1} d_t a_j = p_j - p \quad (7.1)$$

$$p_j^{-1} d_t p_j + 3\gamma_g a_j^{-1} d_t a_j = -3(\gamma_g - 1) a_j^{-1} p_j^{-1} q_j, \quad q_j = -\lambda_g (\partial_r T_j)_{r=a_j} \quad (7.2)$$

Здесь q_j — тепловой поток на межфазной границе, T_j — поле температур внутри пузырька j -й фракции (r — радиальная координата, отсчитываемая от центра пузырька), μ_l , λ_g — коэффициенты динамической вязкости жидкости и теплопроводности газа.

Рассмотрим типичную ситуацию, когда характерные частоты колебаний ω_* таковы, что характерная толщина нестационарного теплового пограничного слоя в пузырьках $\delta_T = (v_g^{(T)}/\omega_*)^{1/2}$ ($v_g^{(T)}$ — температуропроводность) много меньше их размеров ($\delta_T \ll a_{j0}$) и колебания пузырьков близки к адиабатическим ($\kappa = \gamma_g$). Оценим порядки членов в уравнении (7.2). В левой части оба члена имеют одинаковый порядок ($\varepsilon\omega_*$), в то время как член в правой части $\sim \varepsilon a_{j0}^{-1} p_0^{-1} \lambda_g T_0 \delta_T^{-1}$ ($q_j \sim \varepsilon \lambda_g \delta_T^{-1} T_0$). Отношение последнего к первому имеет порядок $\delta_T/a_{j0} \ll 1$ ($v_g^{(T)} = \lambda_g/(\rho_{g0} c_{pg})$, $p_0 = \rho_{g0} R_g T_0$, $R_g/c_{pg} = 1 - \gamma_g^{-1}$; ρ_g , R_g , c_{pg} — плотность, газовая постоянная и теплоемкость при постоянном давлении). Таким образом, если $\delta_T/a_{j0} \sim \varepsilon^m \ll 1$, то вплоть до $(m+1)$ -го приближения по ε можно использовать значение q_j , найденное из решения линеаризованной задачи теплопроводности, и линеаризовать правую часть уравнения (7.2)

$$\partial_t T_j = v_g^{(T)} r^{-2} \partial_r (r^2 \partial_r T_j) + (\rho_{g0} c_{pg})^{-1} d_t p_j, \quad T_j|_{r=a_{j0}} = T_0 \quad (7.3)$$

(для газа в пузырьке принято условие гомобаричности $\partial_r p_j = 0$ [7]). Решение задачи (7.3) хорошо известно и в случае $\delta_T/a_{j0} \ll 1$ имеет вид

$$q_j = \left(\frac{v_g^{(T)}}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-1/2} d_\tau p_j(\tau) d\tau \quad (7.4)$$

Поскольку при учете вышесказанного $p_j/p_0 = (a_j/a_{j0})^{-3\gamma_g} [1 + O(\delta_T/a_{j0})]$, то, производя соответствующую замену в (7.4) и интегрируя уравнения (7.2) с линеаризованной правой частью, получим

$$\frac{p_j}{p_0} = \left(\frac{a_j}{a_{j0}} \right)^{-3\gamma_g} \left[1 + \frac{9\gamma_g(\gamma_g-1)}{a_{j0}} \left(\frac{v_g^{(T)}}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-1/2} \left[\frac{a_j}{a_{j0}} - 1 \right] d\tau \right] \quad (7.5)$$

Окончательно можно записать уравнение Релея — Ламба, учитывающее в линейном приближении вязкую и тепловую диссипацию, в безразмерных переменных (1.2) (см. (1.3))

$$\begin{aligned} \xi_j^2 [(1+a_j) \partial_t^2 a_j + 3/2 (\partial_t a_j)^2] - (1+a_j)^{-3\gamma_g} + p + 1 = \\ = -\alpha_\mu \partial_t a_j + \frac{\alpha_T}{\xi_j \pi^{-1/2}} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{-1/2} a_j(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\alpha_\mu = 4\mu_l/(p_0 t_*), \quad \alpha_T = 9\gamma_g(\gamma_g-1)(v_g^{(T)} t_*/a_*^2)^{1/2}$$

Рассмотрим теперь процедуру получения амплитудных уравнений. Для того чтобы диссипация проявлялась лишь в третьем приближении следует формально положить $\alpha_\mu = \varepsilon^2 \alpha_\mu^{(0)}$, $\alpha_T = \varepsilon^2 \alpha_T^{(0)}$; $\alpha_\mu^{(0)}$, $\alpha_T^{(0)} = O(1)$. Тогда изменение произойдет только в функции h_{j3} (см. (5.1)), причем в правой части (6.6) следует считать $t = t_0$, $a_j = a_{j1}$. Учитывая, что $a_{j1} = (a_{j11}^0 \exp(i\theta) + \text{с.с.})$, и вычисляя интеграл (интеграл Френеля), найдем дополнительное слагаемое (за счет диссипации) к первой гармонике h_{j31}^0 в (5.2)

$$h_{j31}^{0(d)} = [i\omega\alpha_\mu^{(0)} + (1+i)\xi_j^{-1}(2\omega)^{-1/2}\alpha_T^{(0)}]a_{j11}^0$$

Используя соотношение (3.1), определим отсюда и из условия существования решений (2.9) дополнительное слагаемое в НУШ (5.5), которое превращает последнее в уравнение Ландау — Гинзбурга (УГЛ) [3]

$$i\partial_{t_2}A + \alpha A + \beta\partial_{\eta_1}^2A + \gamma A |A|^2 = 0, \quad \alpha = \alpha_R + i\alpha_I \quad (7.7)$$

$$\alpha_R = \frac{3}{2\sqrt{2}}\omega^{1/2}c_p c_g \alpha_T^{(0)} \langle \xi_j^{-1} \Lambda_{j1}^{-2} \rangle, \quad \alpha_I = \frac{3}{2}\omega^2 c_p c_g \alpha_\mu^{(0)} \langle \Lambda_{j1}^{-2} \rangle + \alpha_R$$

При высоких частотах имеем

$$\alpha_R |_{\omega \rightarrow \infty} \sim \frac{3}{2\sqrt{2}} c_f^2 \alpha_T^{(0)} \omega^{-7/2} \langle \xi_j^{-5} \rangle, \quad \alpha_I |_{\omega \rightarrow \infty} \sim \frac{3}{2} c_f^2 \alpha_\mu^{(0)} \omega^{-2} \langle \xi_j^{-4} \rangle + \alpha_R$$

Сравнение с формулами (6.1) показывает, что при высоких частотах доминирующую роль начинает играть вязкость жидкости, которая должна подавлять высокочастотную нелинейную неустойчивость.

В заключение отметим, что теория УЛГ разработана в значительно меньшей степени, чем теория НУШ, поскольку в общем случае УЛГ относится к неинтегрируемому типу [3]. Тем не менее УЛГ, как и НУШ, возникает при описании многих физических систем [3] и представляет собой важный объект для исследований, аналогий и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кедринский В. К. Распространение возмущений в жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1968. № 4. С. 29—34.
2. Шагапов В. Ш. Распространение малых возмущений в жидкости с пузырьками // ПМТФ. 1977. 1. С. 90—101.
3. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
4. Гаврилюк С. Л. Уравнения модуляций для пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой // ПМТФ. 1989. № 2. С. 86—92.
5. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989. 233 с.
6. Иорданский С. В. Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102—110.
7. Низматулин Р. И. Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
8. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.