

УДК 533.6.011.8

© 1992 г. А. И. Бунимович, А. В. Дубинский

### О РАСЧЕТЕ ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИ «ЛОКАЛЬНОМ» ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПОТОКА С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЕЛА

Рассматривается задача расчета вращательных производных (ВП) силовых и моментных характеристик движущихся под углом атаки тел вращения при наличии малой угловой скорости. Для общего класса моделей «локального» взаимодействия потока с поверхностью тела получены и исследованы формулы для вычисления ВП второго порядка.

Результаты исследований в области создания аналитических методов расчета ВП при непоступательном движении тел в свободномолекулярном потоке отражены в [1—3]; развитию соответствующих методов применительно к промежуточной области течения разреженного газа посвящены работы [2, 4, 5]. Был предложен [6] подход, ориентированный на достаточно общий класс «локальных» моделей, описывающих взаимодействие потока с телом при наличии вращения; в рамках реализации этой концепции получены формулы для вычисления ВП первого порядка [6, 7]. Ниже осуществляется дальнейшее развитие указанного подхода применительно к ВП второго порядка.

В изображенной на фигуре связанной системе координат  $x_1, x_2, x_3$  выражение для радиус-вектора точки поверхности тела может быть представлено в виде

$$\mathbf{r} = \Phi(\rho)x_1^0 + \rho \cos \theta x_2^0 + \rho \sin \theta x_3^0$$

где  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  — орты осей; функция  $\Phi(\rho)$  задает форму образующей тела вращения с плоским максимальным миделевым сечением радиуса  $R$ , причем

$$\Phi(0) = 0, \Phi'(0) > 0, \Phi''(\rho) > 0, 0 \leq \rho \leq R, \Phi'(R) < \infty$$

Оси выбраны таким образом, что вектор скорости поступательного движения  $\mathbf{v}_\infty$  лежит в плоскости  $x_1, x_2$ , образуя угол  $\pi - \alpha$  с осью  $x_1$

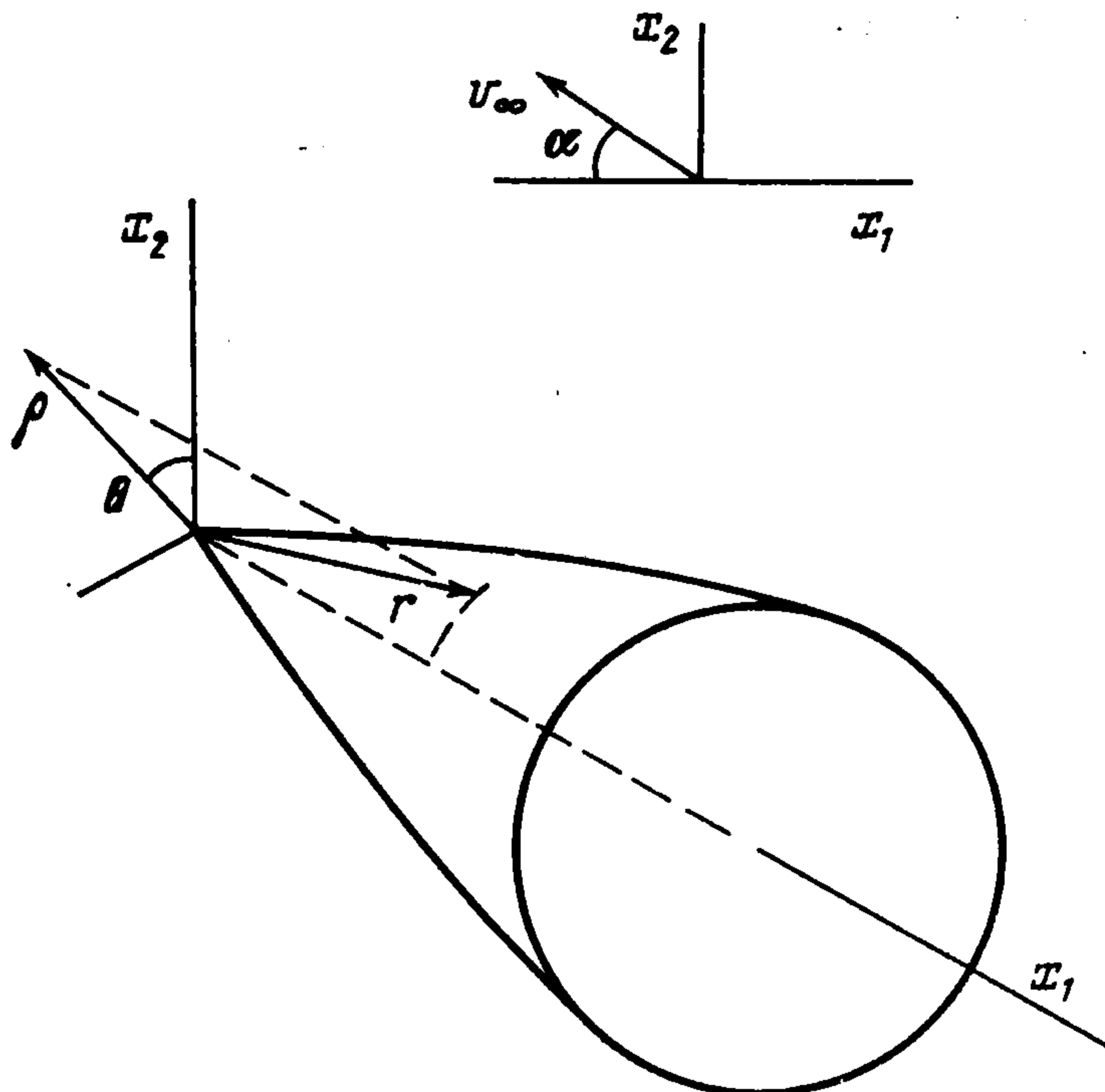
$$\mathbf{v}_\infty = -v_\infty \cos \alpha x_1^0 + v_\infty \sin \alpha x_2^0$$

Тогда при вращении тела с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  выражение для скорости точки поверхности тела  $\mathbf{v}$  запишем в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad \boldsymbol{\omega} = \sum_1^3 \omega_i x_i^0$$

Для класса моделей локального взаимодействия [6] выражения для проекций силы, действующей на элементарную площадку поверхности тела по направлениям внешней нормали  $\mathbf{n}^0$  и касательной  $\boldsymbol{\tau}^0$ , представляются соответственно в виде

$$dF_n = q_* \Omega_n(t) ds, \quad dF_\tau = q_* (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}^0 / v_*) \Omega_\tau(t) ds, \quad q_* = \rho_\infty v_*^2 / 2 \quad (1)$$



где  $v_*$  — некоторая характерная скорость,  $\rho_\infty$  — плотность невозмущенного потока;  $\Omega_n, \Omega_\tau$  — функции, определяющие модель взаимодействия потока с телом.

Переходя к безразмерным параметрам

$$ds/R^2 \rightarrow ds, v/v_* \rightarrow v, v_\infty/v_* \rightarrow v_\infty, \omega R/v_* \rightarrow \omega$$

и отнеся все линейные размеры к  $R$ , можно записать соотношения для «локальных» коэффициентов силы и момента относительно начала координат в виде:

$$d\mathbf{c}_F = (dF_n \mathbf{n}^0 + dF_\tau \boldsymbol{\tau}^0)/(q_* R^2) = [\Omega_1(t) \mathbf{n}^0 + \Omega_2(t) \mathbf{v}] ds, d\mathbf{c}_m = \mathbf{r} \times d\mathbf{c}_F/R$$

$$\mathbf{n}^0 = (-x_1^0 + \Phi' \cos \theta x_2^0 + \Phi' \sin \theta x_3^0)/\mu_1, t = T/\mu_1$$

$$\Omega_1(t) = \Omega_n(t) - t\Omega_\tau(t), \Omega_2(t) = \Omega_\tau(t)$$

$$T(\omega, \rho, \theta) = -\mu_2 \sin \theta \omega_2 + (\mu_3 + \mu_2 \omega_3) \cos \theta + v_\infty \cos \alpha$$

$$\mu_1 = \sqrt{\Phi'^2 + 1}, \mu_2 = \Phi\Phi' + \rho, \mu_3 = v_\infty \sin \alpha \Phi'$$

После преобразований выражения для суммарных коэффициентов силы и момента можно записать в виде

$$c_{x_i}(\omega) = x_i^0 \iint_S d\mathbf{c}_F = \iint_\sigma A_i(\omega, \rho, \theta) d\rho d\theta \quad (2)$$

$$m_{x_i}(\omega) = x_i^0 \iint_S d\mathbf{c}_m = \iint_\sigma B_i(\omega, \rho, \theta) d\rho d\theta \quad (3)$$

$$B_i = \rho (A_3 \cos \theta - A_2 \sin \theta) \delta_i^1 + (\rho \sin \theta A_1 - \Phi A_3) \delta_i^2 + (\Phi A_2 - \rho \cos \theta A_1) \delta_i^3 \quad (4)$$

$$A_1/\rho = -\Omega_1(t) + \mu_1 \Omega_2(t) (-v_\infty \cos \alpha + \rho \sin \theta \omega_2 + \rho \cos \theta \omega_3)$$

$$A_2/\rho = \Phi' \cos \theta \Omega_1(t) + \mu_1 \Omega_2(t) (\Phi \omega_3 - \rho \sin \theta \omega_1 + v_\infty \sin \alpha) \quad (5)$$

$$A_3/\rho = \Phi' \sin \theta \Omega_1(t) + \mu_1 \Omega_2(t) (\rho \cos \theta \omega_1 - \Phi \omega_2)$$

«Освещенная» часть поверхности тела  $S$  характеризуется условием  $t \geq 0$ .  $\sigma$  — проекция  $S$  на плоскость  $x_2, x_3$ ,  $\delta_i^v$  — символ Кронекера.

В зависимости от угла атаки и формы тела при малых  $\omega$  реализуется один из трех вариантов структуры «освещенной» области. При  $\text{ctg } \alpha >$

$\gt \Phi' (1)$  боковая поверхность «освещена» полностью. При  $\Phi' (0) < \text{ctg } \alpha < \Phi' (1)$  в окрестности носовой части имеется полностью «освещенная» область (т. е. существует такое значение  $a$ , что отсекаемая плоскостями  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$  часть боковой поверхности «освещена» полностью), переходящая в «частично освещенную» (т. е. существуют такие  $a_1$  и  $a_2$ , что при  $a_1 < a_* < a_2$  окружность, являющаяся пересечением плоскости  $x_1 = a_*$  с поверхностью тела, частично расположена в области аэродинамической тени). При  $\text{ctg } \alpha < \Phi' (0)$  имеется лишь «частично освещенная» область боковой поверхности. В последнем случае, который далее рассматривается подробно, область  $\sigma$  описывается следующим образом:

$$\theta^{(1)}(\omega, \rho) \leq \theta \leq \theta^{(2)}(\omega, \rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

причем функции  $\theta^{(v)}(\omega, \rho)$ , задающие границу области, удовлетворяют уравнению

$$t[\theta^{(v)}(\omega, \rho)] = 0, \quad v = 1, 2 \quad (6)$$

Вращательные производные представляют собой коэффициенты ряда Тейлора (Маклорена) при разложении соответствующей силовой или моментной характеристики, рассматриваемой как функция компонент угловой скорости. Таким образом, знание ВП позволяет исследовать влияние вращения на аэродинамические характеристики при сложном движении тела.

Сложность проблемы вычисления ВП заключается в первую очередь в том, что от компонент угловой скорости  $\omega_i$  зависит не только подынтегральная функция в (2), (3) но и область  $\sigma(S)$ . Поэтому при исследовании задачи применительно к конкретным моделям течения газа обычно вводятся упрощающие допущения [1—3]. Однако, как показано ниже, даже в общем случае модели (1) могут быть найдены точные выражения для ВП.

В связи с тем что полученные ранее [7] формулы для ВП первого порядка нетрудно преобразовать для рассматриваемого случая, сразу перейдем к задаче расчета ВП второго порядка.

Воспользуемся следующей формулой дифференцирования по параметру интеграла от некоторой функции  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \omega_j \partial \omega_k} \int_{\sigma} \psi(\omega, \rho, \theta) d\theta d\rho &= \int_{\sigma} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega_j \partial \omega_k} d\theta d\rho + \\ &+ \int_0^1 \sum_{v=1}^2 (-1)^v \left[ \frac{\partial \psi(\omega, \rho, \theta^{(v)})}{\partial \omega_j} \frac{\partial \theta^{(v)}}{\partial \omega_k} + \frac{\partial \psi(\omega, \rho, \theta^{(v)})}{\partial \omega_k} \frac{\partial \theta^{(v)}}{\partial \omega_j} + \right. \\ &\left. + 2 \frac{\partial \psi(\omega, \rho, \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta^{(v)}} \frac{\partial \theta^{(v)}}{\partial \omega_j} \frac{\partial \theta^{(v)}}{\partial \omega_k} + \psi(\omega, \rho, \theta^{(v)}) \frac{\partial^2 \theta^{(v)}}{\partial \omega_j \partial \omega_k} \right] d\rho \quad (7) \end{aligned}$$

В правой части формулы (7) второй интеграл связан с изменением границ области  $\sigma$ , аналогичным образом можно представить и ВП

$$\begin{aligned} c_i^{jk} &= \partial^2 c_{x_i} / \partial \omega_j \partial \omega_k = C_i^{jk} + \Delta C_i^{jk} \\ m_i^{jk} &= \partial^2 m_{x_i} / \partial \omega_j \partial \omega_k = M_i^{jk} + \Delta M_i^{jk} \end{aligned}$$

где  $\Delta$  указывает на поправку вследствие изменения границы  $\sigma$ .

Далее ВП рассматриваются при  $\omega = 0$  и соответствующие параметры будут отмечаться нижними нулевыми индексами.

С использованием свойств симметрии выражения для ВП компонент силы могут быть представлены в виде

$$C_{oi}^{jk} = \iint_{\Sigma_0} A_{oi}^{jk} d\rho d\theta = 2 \iint_{\Sigma_0} A_{0**i}^{jk} d\rho d\theta \quad (8)$$

$$A_{oi}^{jk} = (\partial^2 A_i / \partial \omega_j \partial \omega_k)_{\omega=0} = A_{0*i}^{jk} + A_{0**i}^{jk} \quad (9)$$

где  $\Sigma_0$  — часть области  $\sigma_0$  при  $x_3 \geq 0$ ; одной и двумя звездочками здесь и далее отмечаются компоненты разложения функции соответственно на нечетную и четную по  $\theta$  составляющие.

Формулы для  $A_{0*i}^{jk}$ ,  $A_{0**i}^{jk}$  могут быть получены непосредственно дифференцированием из (4) с учетом соотношений:

$$(\partial \Omega_v / \partial \omega_j)_{\omega=0} = \mu_4 \Omega_{0v}' (-\sin \theta \delta_2^j + \cos \theta \delta_3^j)$$

$$(\partial^2 \Omega_v / \partial \omega_j \partial \omega_k)_{\omega=0} = \mu_4^2 \Omega_v'' (\sin^2 \theta \delta_2^{jk} + \cos^2 \theta \delta_3^{jk} - \sin \theta \cos \theta \delta_{2,3}^{jk}), \quad \mu_4 = \mu_2 / \mu_1$$

$$\Omega_{0v}' = d\Omega_v [t(\omega, \rho, \theta)] / dt |_{\omega=0}, \quad \Omega_{0v}'' = d^2 \Omega_v [t(\omega, \rho, \theta)] / dt^2 |_{\omega=0}$$

и представлены в виде:

$$A_{0*1}^{jk} = (\mu_4^2 \Omega_{01}'' + \mu_2 \mu_4 v_\infty \cos \alpha \Omega_{02}'' + 2\mu_2 \rho \Omega_{02}') \rho \sin \theta \cos \theta \delta_{2,3}^{jk}$$

$$A_{0*2}^{jk} = (-\mu_4^2 \Phi' \cos^2 \theta \Omega_{01}'' - \mu_2 \mu_4 v_\infty \sin \alpha \cos \theta \Omega_{02}'' - \mu_2 \Phi \Omega_{02}') \rho \sin \theta \delta_{2,3}^{jk} - \mu_2 \rho^2 \sin \theta \cos \theta \Omega_{02}' \delta_{1,3}^{jk}$$

$$A_{0*3}^{jk} = (\mu_4^2 \Phi' \sin^2 \theta \Omega_{01}'' + 2\mu_2 \Phi \Omega_{02}') \rho \sin \theta \delta_2^{jk} + \mu_4^2 \Phi' \Omega_{01}'' \sin \theta \cos^2 \theta \rho \delta_3^{jk} - \mu_2 \rho^2 \Omega_{02}' \sin \theta \cos \theta \delta_{1,2}^{jk}$$

$$A_{0**1}^{jk} = -\rho (\mu_4^2 \Omega_{01}'' + \mu_2 \mu_4 v_\infty \cos \alpha \Omega_{02}'' + 2\mu_2 \rho \Omega_{02}') (\delta_2^{jk} \sin^2 \theta + \delta_3^{jk} \cos^2 \theta)$$

$$A_{0**2}^{jk} = (\mu_4^2 \cos \theta \Omega_{01}'' + \mu_2 \mu_4 v_\infty \sin \alpha \Omega_{02}'') \rho \sin^2 \theta \delta_2^{jk} + (\mu_2 \mu_4 v_\infty \sin \alpha \cos \theta \Omega_{02}'' + 2\mu_2 \Phi \Omega_{02}' + \mu_4 \Phi' \cos \theta \Omega_{01}'') \rho \cos \theta \delta_3^{jk} + \mu_2 \rho^2 \sin^2 \theta \Omega_{02}' \delta_{1,2}^{jk}$$

$$A_{0**3}^{jk} = (\mu_4^2 \Phi' \sin^2 \theta \Omega_{01}'' - \mu_2 \Phi \Omega_{02}') \rho \cos \theta \delta_{2,3}^{jk} + \mu_2 \rho^2 \cos^2 \theta \Omega_{02}' \delta_{1,3}^{jk}$$

где  $\delta_v^{jk} = 1$ , если  $j = k = v$ , и  $\delta_v^{jk} = 0$  в противном случае;  $\delta_{v,\mu}^{jk} = 1$ , если  $j = v$  и  $k = \mu$  либо  $\mu = j$  и  $k = v$ , и  $\delta_{v,\mu}^{jk} = 0$  в остальных случаях.

Воспользовавшись соотношением (4) и представлением, аналогичным (9), формулы для ВП моментных характеристик можно записать в виде

$$M_{oi}^{jk} = 2 \iint_{\Sigma_0} B_{0**i}^{jk} d\rho d\theta \quad (10)$$

$$B_{0**i}^{jk} = \rho (A_{0**3}^{jk} \cos \theta - A_{0*2}^{jk} \sin \theta) \delta_i^1 + (\rho A_{0*1}^{jk} \sin \theta - \Phi A_{0**3}^{jk}) \delta_i^2 + (\Phi A_{0**2}^{jk} - \rho \cos \theta A_{0**1}^{jk}) \delta_i^3$$

Поправки  $\Delta C_{oi}^{jk}$ ,  $\Delta M_{oi}^{jk}$  даются вторыми интегралами в выражении (7), вычисленными соответственно для  $\psi = A_i$  и  $\psi = B_i$  при  $\omega = 0$ . Требующиеся при этом формулы для  $\theta^{(v)}$  и их производных могут быть

получены из (6); результирующие выражения таковы:

$$\begin{aligned}\theta_0^{(2)} &= \theta_0(\rho), & \theta_0^{(1)} &= -\theta_0(\rho), & \sin \theta_0 &= \frac{\mu_5}{\Phi'}, & \cos \theta_0 &= -\frac{\text{ctg } \alpha}{\Phi'} \\ \frac{\partial \theta^{(v)}(\omega, \rho)}{\partial \omega_j} \Big|_{\omega=0} &= \theta_{0**}^j + (-1)^v \theta_{0*}^j, & \frac{\partial^2 \theta^{(v)}}{\partial \omega_j \partial \omega_k} \Big|_{\omega=0} &= \theta_{0**}^{jk} + (-1)^v \theta_{0*}^{jk} \\ \theta_{0**}^j &= -\frac{\mu_2}{\mu_3} \delta_2^j, & \theta_{0*}^j &= -\frac{\mu_2}{\mu_3 \mu_5} \text{ctg } \alpha \delta_3^j \\ \theta_{0*}^{jk} &= -\frac{\mu_2^2 \text{ctg } \alpha}{\mu_3^2 \mu_5^3} [\mu_5^2 \delta_2^{jk} - \mu_3 (2\Phi'^2 - \text{ctg}^2 \alpha) \delta_3^{jk}] \\ \theta_{0**}^{jk} &= \frac{\mu_2^2}{\mu_3^2} \left( \delta_{2,3}^{jk} - \frac{\mu_3}{\mu_2 \mu_5^2} \text{ctg}^2 \alpha \delta_{1,3}^{jk} \right), & \mu_5 &= \sqrt{\Phi'^2 - \text{ctg}^2 \alpha}\end{aligned}$$

При учете свойств симметрии имеем

$$\begin{aligned}\Delta C_{0i}^{jk} &= 2 \int_0^1 [\theta_{0**}^k A_{0*i}^j + \theta_{0**}^j A_{0*i}^k + \theta_{0*}^k A_{0**i}^j + \theta_{0*}^j A_{0**i}^k + 2(\theta_{0*}^k \theta_{0**}^j + \theta_{0*}^j \theta_{0**}^k) \times \\ &\times A_{0**i}^\theta + 2(\theta_{0**}^k \theta_{0**}^j + \theta_{0*}^k \theta_{0*}^j) A_{0*i}^\theta + \theta_{0**}^{jk} A_{0*i} + \theta_{0*}^{jk} A_{0**i}] d\rho \quad (11)\end{aligned}$$

Выражения для  $\Delta M_{0i}^{jk}$  получаются заменой в формуле (11) символа  $A$  на символ  $B$ , причем:

$$\begin{aligned}A_{0i}^\theta &= (\partial A_i / \partial \theta)_{\omega=0} = A_{0*i}^\theta + A_{0**i}^\theta, & B_{0i}^\theta &= B_{0*i}^\theta + B_{0**i}^\theta \\ A_{0*1}^\theta &= \mu_7 \rho (\Omega_{01}' + \mu_1 \nu_\infty \cos \alpha \Omega_{02}') \sin \theta, & A_{0**1}^\theta &= 0 \\ A_{0*2}^\theta &= -\rho (\Phi' \Omega_{01}' + \mu_7 \Phi' \cos \theta \Omega_{01}' + \mu_3 \nu_\infty \sin \alpha \Omega_{02}') \times \\ &\times \sin \theta, & A_{0**2}^\theta &= 0 \\ A_{0*3}^\theta &= 0, & A_{0**3}^\theta &= \rho \Phi' (\cos \theta \Omega_{01} - \mu_7 \sin^2 \theta \Omega_{01}') \\ B_{0*1}^\theta &= 0, & B_{0**1}^\theta &= \rho [(A_{0**3}^\theta + A_{0**2}^\theta) \cos \theta + \\ &+ (A_{0*2}^\theta - A_{0*3}^\theta) \sin \theta] \\ B_{0*2}^\theta &= 0, & B_{0**2}^\theta &= \rho (A_{0**1}^\theta \cos \theta + A_{0*1}^\theta \sin \theta) - \Phi A_{0**3}^\theta \\ B_{0*3}^\theta &= \Phi A_{0*2}^\theta - \rho \sin \theta A_{0**1}^\theta - \rho \cos \theta A_{0**1}^\theta, & B_{0**3}^\theta &= 0 \\ A_{0*1} &= 0, & A_{0**1} &= -\rho (\Omega_{01} + \mu_1 \nu_\infty \cos \alpha \Omega_{02}) \\ A_{0*2} &= 0, & A_{0**2} &= \rho (\Phi' \cos \theta \Omega_{01} + \mu_1 \nu_\infty \sin \alpha \Omega_{02}) \\ A_{0*3} &= \rho \Phi' \sin \theta \Omega_{01}, & A_{0**3} &= 0 \\ B_{0*i} &= \rho (\cos \theta A_{0*3} - \sin \theta A_{0**2}) \delta_i^1 + (\rho \sin \theta A_{0**1} - \\ &- \Phi A_{0*3}) \delta_i^2, & B_{0**i} &= (\Phi A_{0**2} - \rho \cos \theta A_{0**1}) \delta_i^3\end{aligned} \quad (12)$$

Полученные выше выражения (8), (10)–(12) дают «свернутое» представление для ВП; если раскрыть соответствующие формулы, то окажется, что многие ВП равны нулю и их матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}C_{01}^{jk} &: \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{vmatrix}, & C_{02}^{jk} &: \begin{vmatrix} 0 & + & 0 \\ + & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{vmatrix} \\ C_{03}^{jk}, & m_{01}^{jk}, & m_{02}^{jk} &: \begin{vmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & 0 \end{vmatrix}, & m_{03}^{jk} &: \begin{vmatrix} 0 & + & 0 \\ + & * & 0 \\ 0 & 0 & + \end{vmatrix}\end{aligned}$$

где символы «плюс» и «звездочка» указывают на ненулевые значения ВП, причем звездочка отмечает наличие ненулевой (в общем случае) поправки, связанной с учетом изменения «освещенной» поверхности; анализ показал, что учет таких поправок не приводит к появлению дополнительных ненулевых ВП. Сопоставление с результатами работы [3], в которой в приближенной постановке рассматривалось свободномолекулярное обтекание, дает совпадение перечней нулевых производных.

Необходимо подчеркнуть один из существенных моментов, связанных с переходом к рассмотрению общего класса моделей локального взаимодействия: показано, что при изменении условий обтекания в широких пределах в рамках модели (1) ряд ВП сохраняют нулевые значения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Белецкий В. В., Яншин А. М.* Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. Киев: Наук. думка, 1984. 187 с.
2. *Галкин В. С., Зворыкин Л. Л.* Вращательные производные тел в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Тр. ЦАГИ. 1984. Вып. 2220. С. 3—15.
3. *Иванов С. Г., Яншин А. М.* Нелинейные эффекты при нестационарном вращении тел в разреженном газе // Гидродинамика и тепломассообмен летательных аппаратов. Киев, 1988. С. 114—117.
4. *Бунимович А. И., Сазонова Н. И.* Аналитический метод определения аэродинамических сил и моментов при нестационарном движении тел в газе различной разреженности // Газовая и волновая динамика. М.: Изд-во МГУ, 1979. Вып. 2. С. 32—43.
5. *Пономарев В. Я., Серегин В. С.* Расчеты на основе гипотезы локального взаимодействия аэродинамических характеристик типовых тел при их стационарном и нестационарном движении в разреженном газе // Тр. 4-й Всесоюз. конф. по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М.: ЦАГИ, 1977. С. 392—398.
6. *Бунимович А. И., Дубинский А. В.* Об аэродинамическом расчете вращающихся в потоке тел на основе моделей локального взаимодействия // Космич. исследования. 1985. Т. 23. Вып. 4. С. 574—578.
7. *Бунимович А. И., Дубинский А. В.* Аэродинамические характеристики произвольно вращающихся тел в газе различной разреженности // Космич. исследования. 1989. Т. 27. Вып. 2. С. 180—185.

Москва

Поступила в редакцию  
2.VII.1991