

УДК 533.6.011.72

© 1992 г. С. А. Егорушкин, А. Г. Куликовский

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Изучается поведение при  $t \rightarrow \infty$  решений линейных гиперболических уравнений в полупространстве  $x > 0$ ,  $-\infty < y_\alpha < \infty$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, r$ , на границе  $x = 0$  которого заданы краевые условия. Предполагается, что уравнения и краевые условия однородны по порядку дифференцирования и все коэффициенты постоянны. Одна задача такого типа была подробно изучена ранее в связи с проблемой устойчивости ударных волн в газовой динамике [1—4], некоторые частные результаты получены также и для магнитогидродинамических ударных волн [5—7].

В общем случае, как показано ниже, возможны те же варианты поведения возмущений при  $t \rightarrow \infty$ , что и в [2, 4]: возмущения могут либо экспоненциально расти (неустойчивость), либо степенным образом убывать (устойчивость), либо] оставаться ограниченными (нейтральная устойчивость). Исследуются способы перехода системы в неустойчивое, устойчивое и нейтрально устойчивое состояние при изменении определяющих параметров задачи и указаны критерии таких переходов. На основании этих критериев в магнитной гидродинамике даже в случае совершенного газа установлено существование нейтрально устойчивых ударных волн, не отмеченное в опубликованных работах [5—7]. Для изучаемых систем в случае устойчивости и нейтральной устойчивости было доказано [8, 9] существование априорной оценки решения.

Ниже показано, что взаимодействие возмущений с границей в случае нейтральной устойчивости приводит к потере гладкости решения, так что априорная оценка [9] не может быть улучшена. Дано элементарное объяснение этого эффекта. Показано, что добавление малых недифференциальных членов к уравнениям и краевым условиям не приводит к появлению некорректности, если параметры, характеризующие исходную краевую задачу, лежат внутри области значений, соответствующей нейтральной устойчивости.

Установлено, что поведение возмущений на границе полупространства описывается решением задачи Коши для некоторой системы уравнений в частных производных высокого порядка при специальных условиях, налагаемых на внешние воздействия и начальные данные, подобно тому, как это имеет место в газовой динамике [10].

Исследование устойчивости решений в областях  $x > 0$  и  $x < 0$ , связанных граничными условиями при  $x = 0$ , может быть проведено аналогично и не требует отдельного рассмотрения.

**1. Формальное построение решения по Фурье — Лапласу.** Для системы линейных гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами

$$E \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B_\alpha \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, r \quad (1.1)$$

( $U$  — столбец,  $E$ ,  $A$ ,  $B_\alpha$  —  $(n \times n)$ -матрицы) в полупространстве  $x > 0$ ,  $-\infty < y_\alpha < \infty$  рассмотрим смешанную краевую задачу

$$t = 0 : U = U_0(x, y_\alpha) \quad (1.2)$$

$$x = 0, \quad t > 0: \mathbf{E}_1 \frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{C} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{D}_\alpha \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} = 0$$

$$t > 0, \quad x \rightarrow \infty: |U| < \infty$$

Здесь  $\mathbf{E}_1$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}_\alpha$  — постоянные  $(m \times n)$ -матрицы,  $m \leq n$ . Число  $m$  краевых условий при  $x = 0$  определяется из соображений корректности [11] (см. ниже).

Для решения задачи (1.1), (1.2) применим к функции  $U(x, y_\alpha, t)$  преобразование Фурье по переменным  $y_\alpha$  и преобразование Лапласа по переменной  $t$ , так что

$$U^L(x, z, k_\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_\alpha y_\alpha} dy_1 \dots dy_r \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y_\alpha, t) e^{-zt} dt$$

Полагая  $z = -ik\Omega$ ,  $k = (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_r^2)^{1/2}$  ( $\Omega$  имеет смысл фазовой скорости распространения волн по направлению перпендикулярного оси  $x$  волнового вектора  $\mathbf{k}$ ), задачу (1.1), (1.2) запишем в виде

$$\mathbf{A} \frac{dU^L}{dx} + ik(\mathbf{B} - \Omega \mathbf{E}) U^L = \mathbf{E} U_0^F(x, k_\alpha), \quad \left( \mathbf{B} = \frac{k_\alpha}{k} \mathbf{B}_\alpha \right) \quad (1.3)$$

$$x = 0: \mathbf{C} \frac{dU^L}{dx} + ik(\mathbf{D} - \Omega \mathbf{E}^1) U^L = \mathbf{E}^1 U_0^F(0, k_\alpha), \quad \left( \mathbf{D}_\alpha = \frac{k_\alpha}{k} \mathbf{D}_\alpha \right) \quad (1.4)$$

$$x \rightarrow \infty: |U^L| < \infty \quad (1.5)$$

где  $U_0^F(x, k_\alpha)$  — фурье-образ функции  $U_0(x, y_\alpha)$ . Дальнейшее рассмотрение проведем при фиксированных значениях компонент вектора  $\{k_\alpha\}$ .

Характеристическая матрица системы уравнений (1.3) имеет вид

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{A}^{-1}(k\mathbf{B} - k\Omega \mathbf{E}) + k\mathbf{L}\mathbf{E}$$

Корни  $\lambda_j$  характеристического уравнения  $\det \mathbf{M}_x = 0$  не зависят от  $k$  в силу однородности системы (1.1) по порядку дифференцирования. Из гиперболичности системы (1.1) следует, что при  $\Omega \rightarrow \infty$  матрица  $\mathbf{M}_x$  имеет  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\mathbf{I}^{(j)}$ , соответствующих корням  $\lambda = \lambda_j$ , принимающим действительные значения при действительных  $\Omega$ . При  $\Omega = 0$  (1) корни  $\lambda_j$  могут становиться комплексными и существует множество изолированных значений  $\Omega_0^0$ , таких, что  $\lambda_i(\Omega_0^0) = \lambda_j(\Omega_0^0)$  и  $\mathbf{I}^{(i)}(\Omega_0^0) \parallel \mathbf{I}^{(j)}(\Omega_0^0)$ . Следовательно, для всех  $\Omega$ , кроме упомянутых, решение системы (1.3), получаемое методом вариации постоянных, записывается в виде

$$U^L = \sum_{j=1}^n c_j^0 \mathbf{I}^{(j)} e^{i\lambda_j k x} + \sum_{j=1}^n \mathbf{I}^{(j)} e^{i\lambda_j k x} R_j(x) \quad (1.6)$$

$$R_j(x) = \int_{x_j}^x [\mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}^{-1} U_0^F]_j e^{-i\lambda_j k \xi} d\xi$$

Здесь  $\mathbf{L}$  —  $(n \times n)$ -матрица, столбцы которой — собственные векторы  $\mathbf{I}^{(j)}$ ,  $c_j^0$  — произвольные постоянные, подлежащие определению из условий (1.4), (1.5). Постоянные  $x_j$  будут выбраны ниже.

Все корни характеристического уравнения разделим на две группы: к первой отнесем корни  $\{\lambda_q\}$ :  $\text{Im } \lambda_q > 0$  ( $q = 1, 2, \dots, s$ ), а ко второй — корни  $\{\lambda_i\}$ :  $\text{Im } \lambda_i < 0$  ( $i = s + 1, s + 2, \dots, n$ ). Это разделение про-

ведем при  $\text{Im } \Omega \gg 1$ , т. е. в той части плоскости  $\Omega$ , где проходит путь интегрирования при выполнении преобразования Лапласа. Отметим, что для разделения корней во всей плоскости  $\Omega$ , необходимо провести разрезы  $I_{q,i}$  между точками ветвления корней первой и второй групп. Эти точки образуют множество  $\{\Omega_0\}$  и составляют часть упомянутого выше множества  $\{\Omega_0^0\}$  точек ветвления многозначной функции  $\lambda(\Omega)$ .

Покажем, что множество  $\{\Omega_0\}$  лежит на действительной оси. В силу гиперболичности системы (1.1) и однородности по порядку дифференцирования ее решения обладают свойством устойчивости:  $\text{Im } \lambda \neq 0$  при  $\text{Im } \Omega > 0$ . Поэтому точки ветвления корней разных групп не могут лежать в верхней полуплоскости  $\Omega$ . В силу обратимости задачи по времени, что соответствует одновременному изменению знаков  $\Omega$ ,  $k_\alpha$  и  $\lambda$ , точки ветвления не могут лежать также и в нижней полуплоскости  $\Omega$ .

Подставляя выражения (1.6) в (1.5), найдем, что  $c_i^0 = 0$  ( $i = s + 1, \dots, \dots, n$ ), а постоянные  $c_q^0$  ( $q = 1, \dots, s$ ) определяются из системы (1.5). Поэтому необходимым условием корректности изучаемой задачи служит равенство  $s = m$  [11]. Окончательный результат может быть записан в виде:

$$U^L(x, k_\alpha, \Omega) = \sum_{q=1}^m c_q^0 l^{(q)} e^{i\lambda_q k x} + \sum_{j=1}^n l^{(j)} e^{i\lambda_j k x} R_j \quad (1.7)$$

$$c^0 = W_1^{-1} [W_2 R_0 + iV^0 U_0^F(0, k_\alpha)], \quad c^0 = \{c_q^0\}, \quad q = 1, 2, \dots, m$$

$$(W_1, W_2) \equiv W, \quad W_{qg} = \sum_{j=1}^n G_{qj}^{(g)} l_j^{(g)}, \quad g = 1, 2, \dots, n; \quad q = 1, \dots, m$$

$$G^{(g)} = -\Omega E^1 + \lambda_g C + D, \quad V^0 = -E^1 + VL^{-1}A^{-1}$$

$$V_{qp} = \sum_{j=1}^n C_{qp} l_j^{(p)}, \quad q = 1, 2, \dots, m, \quad p = 1, 2, \dots, n$$

$$R_j(x) = \int_{x_j}^x [L^{-1}A^{-1}U_0^F(\xi, k_\alpha)]_j e^{i\lambda_j k \xi} d\xi$$

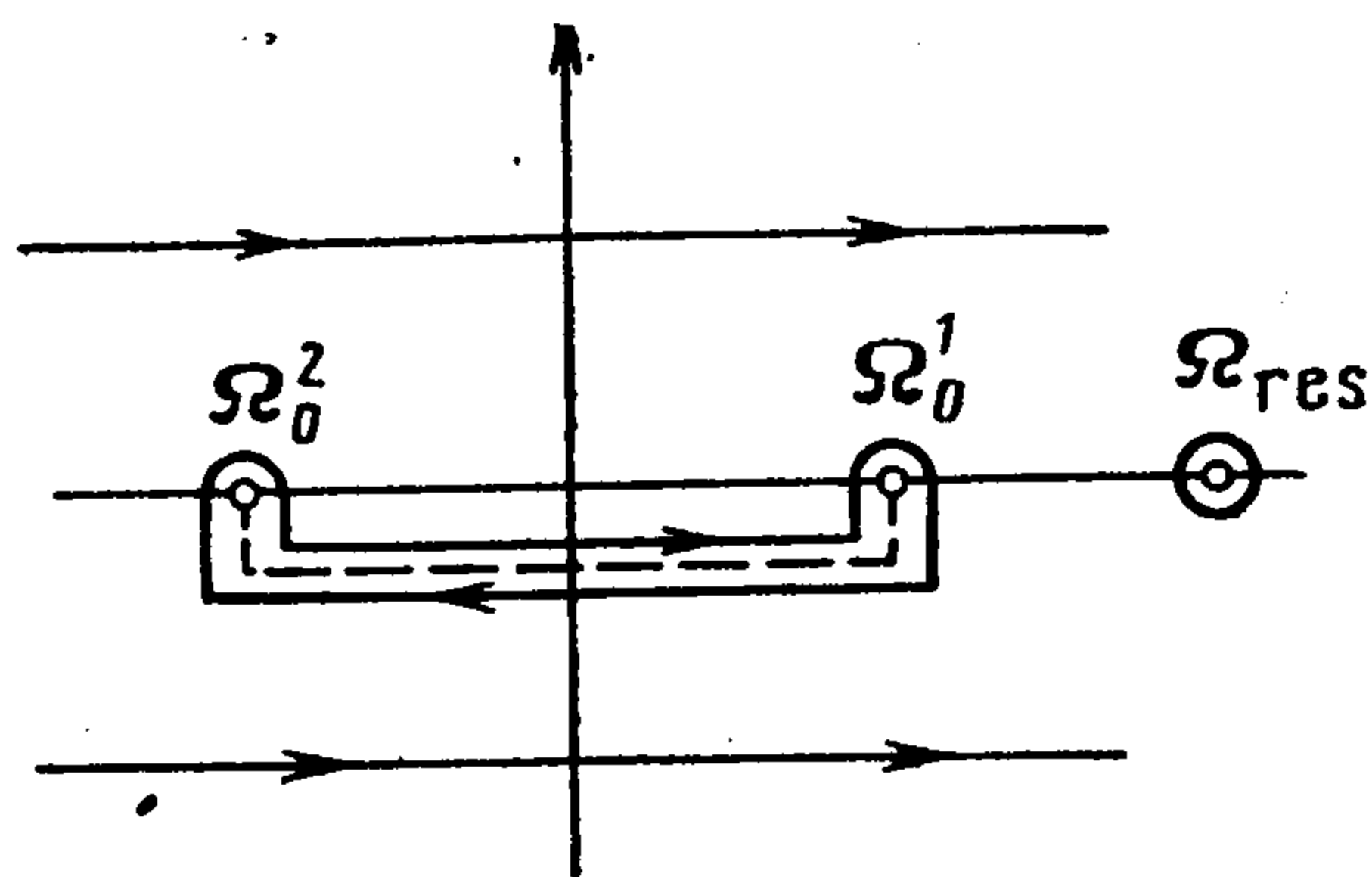
$$R_{0j} = R_j|_{x=0}, \quad x_j = \begin{cases} 0, & j = 1, \dots, m \\ \infty, & j = m + 1, \dots, n \end{cases}$$

Матрица  $W_1$  образуется первыми  $m$  столбцами матрицы  $W$  и соответствует уходящим от границы волнам. Матрица  $W_2$ , образованная последующими  $n - m$  столбцами  $W$ , соответствует приходящим волнам.

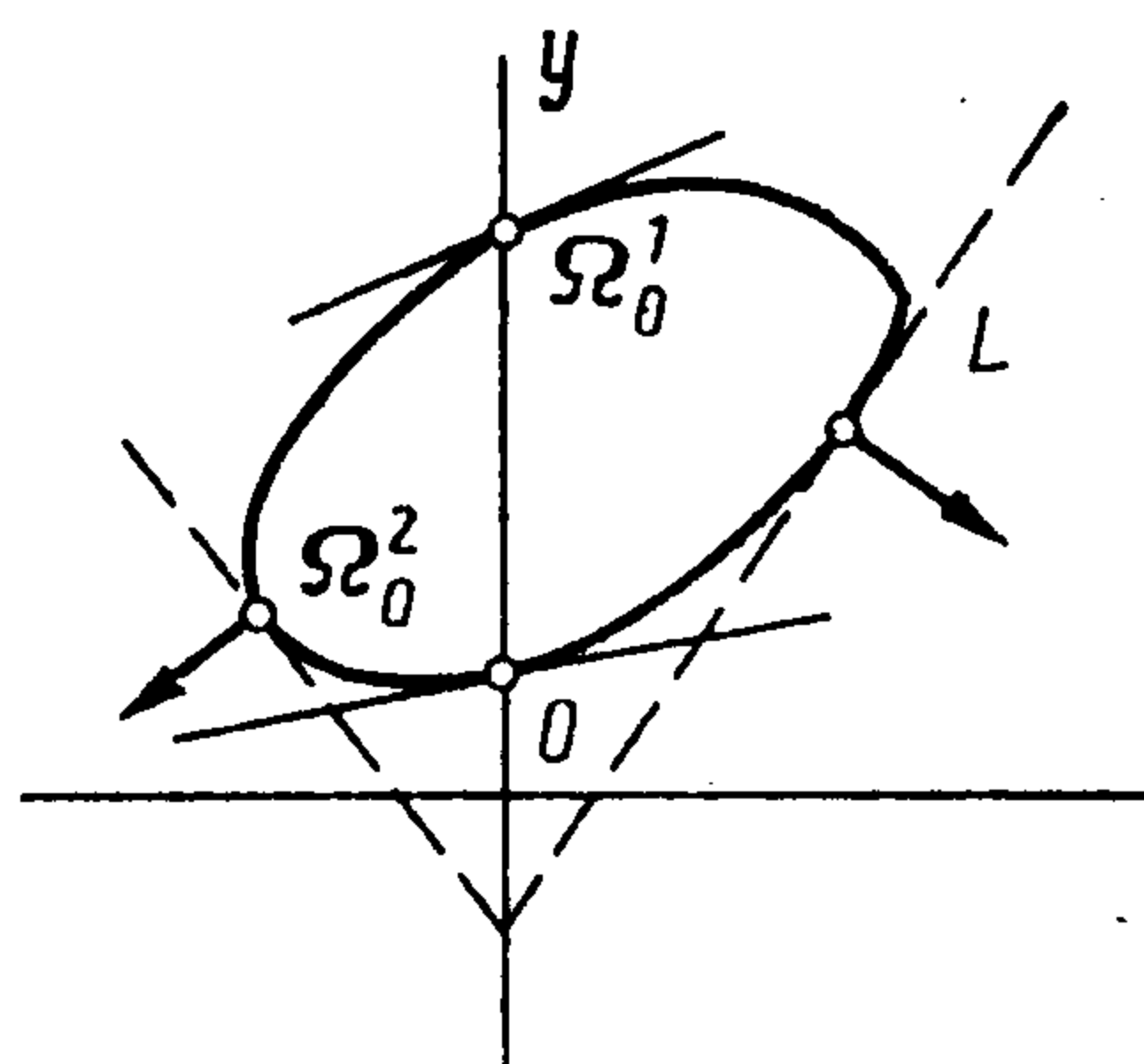
Теперь, выполняя обратное преобразование Лапласа и смещая контур интегрирования по плоскости  $\Omega$  вниз, как показано на фиг. 1, получим асимптотическое выражение для решения при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x = \text{const}$

$$U^F(t, x, k_\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \sum \text{res } U^L e^{-ik\Omega t} + \frac{1}{2\pi i} \sum \int_{I_h} U^L e^{ik\Omega t} d\Omega \quad (1.8)$$

Суммирование проводится по всем вычетам функции  $U^L(\Omega)$  и всем разрезам  $I_h$ , проведенным между точками ветвления корней разных групп (разрез на фиг. 1 обозначен штрихами). В правой части опущен быстро затухающий со временем интеграл по горизонтальной части контура интегрирования. То, что в (1.8) оставлены интегралы только по разрезам



Фиг. 1



Фиг. 2

между точками ветвления корней разных групп, связано с тем, что эти корни неравноправным образом входят в решение задачи (в матрицу  $W_1$  входят только корни первой группы, а в матрицу  $W_2$  — второй). Поэтому при обходе точки ветвления корней разных групп решение  $U_L$  меняется. Обход же точки ветвления корней одной группы приводит только к изменению нумерации корней внутри этой группы, не меняя значение  $W_L$ .

2. Вклад в асимптотику интегралов по разрезам. Изучим асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$  интегралов по разрезам  $I_R$  в равенстве (1.8). Поскольку асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$  интегралов по разрезам определяется только самыми верхними частями контуров интегрирования, то очевидно, что каждая точка ветвления дает в асимптотику независимый вклад. Если в точке ветвления совпадают два значения функции  $\lambda(\Omega)$ , то подынтегральная функция  $U^L(\Omega)$  (аргументы  $k_\alpha$  и  $x$ , считающиеся здесь постоянными, будем опускать) может быть представлена в виде

$$U^L(\Omega) = U_0^L(\Omega) + U_1^L(\Omega) \sqrt{\Omega - \Omega_0}$$

где  $\Omega_0$  — точка ветвления,  $U_0^L$  и  $U_1^L$  — аналитические функции. В случае общего положения функция  $U_1^L$  принимает при  $\Omega = \Omega_0$  конечное значение (это можно получить из выражения (1.7); для газовой динамики см. [2]), и интегрирование по разрезу в окрестности точки ветвления дает главный член асимптотики вида

$$U^F(t) \sim ct^{-3/2} e^{-ik\Omega_0 t}, \quad c = 2U^L(\Omega_0) \int_0^{-i\infty} e^{-i\xi} \sqrt{\xi} d\xi, \quad \xi = (\Omega - \Omega_0)t$$

Если же функция  $U_1^L(\Omega)$  ведет себя как  $(\Omega - \Omega_0)^{-1}$ , что бывает в особых случаях, когда у функции  $U^L(\Omega)$  совмещены полюс и точка ветвления, то  $|U^F(t)| \sim ct^{-1/2} \exp(-ik\Omega_0 t)$ . Приведенные варианты асимптотического поведения совпадают с найденными [2] для случая газовой динамики.

Отметим без вывода, что если рассматривать асимптотику вдоль лучей  $x/t = \text{const}$ , то асимптотическое поведение решения будет определяться точкой перевала (так же, как и в отсутствие границы) и зависимость от времени главного члена асимптотики в случае общего положения будет типичной для диспергирующих волн:  $|U^F(t)| \sim t^{-1/2}$  (при  $k_\alpha = \text{const}$  волны обладают дисперсией по  $x$ ). Таким образом, можно сделать вывод, что наличие границы вызывает дополнительное затухание волн, распро-

страняющихся вдоль поверхности разрыва, что в общем случае приводит к асимптотике  $|U^F(t)| \sim t^{-3/2}$ .

Объяснение этого эффекта заключается в том, что для возмущений, распространяющихся вдоль границы (а именно они соответствуют точкам  $\Omega_0$ , см. ниже), коэффициент отражения обращается в минус единицу. Последнее связано с совпадением в точке ветвления собственных векторов матрицы  $M_x$ , соответствующих падающей и отраженной волнам. При этом отраженное от границы возмущение в сумме с падающим взаимно уничтожаются в главном члене.

**3. Вклад вычетов в асимптотику.** Вычеты функции  $U^L(\Omega)$ , как это следует из (1.7), совпадают с нулями определителя  $D_w = \det W_1$ . После проведения разрезов  $I_h$  у функции  $D_w(\Omega)$  можно выбрать однозначную ветвь, которая получается продолжением из верхней полуплоскости  $\Omega$ , и в дальнейшем только эта ветвь и будет рассматриваться.

Исследуем ее поведение на действительной оси  $\Omega$ . Из (1.7) следует, что функция  $D_w$  действительна на тех отрезках этой оси, на которых действительны все  $\lambda$ , соответствующие уходящим волнам. С другой стороны, на отрезках действительной оси  $\Omega$ , на которых имеется хотя бы одна пара комплексно-сопряженных корней  $\lambda$  (всегда принадлежащих разным группам, см. разд. 1), функция  $D_w$  принимает комплексные значения.

Это следует из того, что из любой пары комплексно сопряженных корней уходящим волнам соответствует только один корень, который и входит в  $D_w$ . В случае общего положения  $\text{Im } D_w \neq 0$  в силу действительности всех входящих в  $D_w$  коэффициентов.

Как отмечалось выше, из гиперболичности системы следует, что при больших действительных  $\Omega$  все  $\lambda_j$  и  $D_w(\Omega)$  действительны. По теореме Шварца об аналитическом продолжении функция  $D_w(\Omega)$  принимает комплексно-сопряженные значения в комплексно-сопряженных точках. При наличии комплексных корней у этой функции решение  $U^F(t)$  содержит растущую со временем экспоненту, с инкрементом, стремящимся к бесконечности при  $k \rightarrow \infty$ , т. е. задача (1.1), (1.2) некорректна. Если  $D_w(\Omega)$  имеет только действительные корни, то вектор  $U^F(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  остается ограниченным и в общем случае не стремится к нулю (нейтральная устойчивость).

**4. Условия взаимного превращения различных типов асимптотического поведения решений.** Дадим геометрическую трактовку полученных результатов. Для этого рассмотрим диаграмму групповых скоростей, которая описывает картину распространения слабого разрыва, возникшего из точечного источника по прошествии единицы времени.

Пусть этот источник находился в начале координат  $O$  (фиг. 2), ось  $y$  соответствует положению границы  $x = 0$ , а кривая  $L$  — диаграмма групповых скоростей, причем изображена и ее часть, лежащая в области  $x < 0$  (приходящие волны).

Рассмотрим некоторую точку  $y = \Omega$ , лежащую на оси  $y$  достаточно далеко от точки  $O$ . Каждая касательная, проведенная из  $\Omega$  к  $L$ , дает направление распространения волны, соответствующей выбранному  $\Omega$

( $\Omega$  — величина, входящая в уравнение (1.3)). При этом корень характеристического уравнения  $\lambda(\Omega)$ , относящийся к рассматриваемой волне, принимает действительные значения. При комплексном  $\lambda(\Omega)$  построение соответствующей касательной из точки  $\Omega$  к  $L$  становится невозможным. Если точка касания (точка  $\Omega_0^2$  на фиг. 2) лежит справа (слева) от оси  $y$ , то соответствующая волна является уходящей (приходящей) по отношению к границе.

Как уже было сказано, при больших  $\Omega$  все  $\lambda$  действительны, т. е. из точки  $y = \Omega$  можно провести  $n$  касательных к диаграмме групповых скоростей. Точки ветвления функции  $U^L(\Omega)$  возникают только в случае, когда  $\Omega$  совпадает с  $\Omega_0^1$  — точкой пересечения диаграммы групповых скоростей с осью  $y$ .

Действительно, при совпадении корней  $\lambda$  совпадают направления касательных, проведенных из соответствующей точки  $\Omega = \Omega_0^1$ . Если точки касания при этом не совпадают, то в случае общего положения собственные векторы, характеризующие волны, соответствующие этим точкам, будут различны, и в окрестности точки  $\Omega_0^1$  решение  $U_L(\Omega)$  не будет иметь особенностей. Совпадение же точек касания возможно только на оси  $y$ , так как диаграммы групповых скоростей не могут иметь точек перегиба. Последнее утверждение есть следствие того, что у гиперболической системы всем направлениям нормали соответствует одно и то же число характеристических скоростей (равное порядку системы).

Таким образом, на действительной оси  $\Omega$  число действительных корней  $\lambda(\Omega)$  может меняться только в точках  $\Omega = \Omega_0^1$ , соответствующих пересечению диаграммы групповых скоростей с осью  $y$ . Эти точки ограничивают отрезки действительной оси  $\Omega$ , где все  $\lambda(\Omega)$  действительны, и представляют точки ветвления функции  $U^L(\Omega)$ .

Изучим возможные пути перехода на действительную ось комплексных корней  $D_w(\Omega)$  при изменении параметров системы. Момент перехода последнего комплексного корня на действительную ось будет означать и переход системы от неустойчивого в устойчивое или нейтрально устойчивое состояние.

Корень  $D_w(\Omega)$  может попасть на действительную ось либо в бесконечной, либо в конечной точке этой оси. Рассмотрим сначала первый случай. Пусть  $\Omega \rightarrow \infty$  при  $H \rightarrow H^0$ , где  $H$  — вектор в пространстве определяющих параметров системы. Тогда в силу гиперболичности системы (1.1)  $\lambda_j \sim a_j \Omega$ , где  $a_j$  — обратные значения характеристических скоростей, а  $D_w$  превращается в многочлен:

$$D_w(\Omega) \sim b_0 \Omega^m + b_1 \Omega^{m-k} + \dots = 0$$

причем  $b_0 \rightarrow 0$  при  $H \rightarrow H^0$ . Тогда при  $H \rightarrow H^0$  получим  $\Omega^k = -b_1/b_0$ ,  $b_0 \rightarrow 0$ .

В случае общего положения  $\partial b_0 / \partial H_i^0 \neq 0$  при  $H = H^0$  и, следовательно,  $b_0$  меняет знак в окрестности точки  $H^0$  при переходе через поверхность  $\Sigma_0$ , определяемую соотношением  $b_0(H_i^0) = 0$ . Поэтому величина  $\Omega$  остается действительной при  $k = 1$  по обе стороны поверхности  $\Sigma_0$  и перехода комплексно-сопряженного корня на действительную ось не происходит. Если  $k = 2$ , то  $\Omega = \pm i (b_1/b_0)^{1/2}$  при  $b_1/b_0 > 0$  и величина  $\Omega$

действительна при  $b_1/b_0 < 0$ . Таким образом, при  $k = 2$  происходит переход от неустойчивости к нейтральной устойчивости. Поверхность  $\Sigma_0$  при  $k = 2$  служит границей между зонами неустойчивости и нейтральной устойчивости в пространстве определяющих параметров системы. Если  $k \geq 3$ , то независимо от знака  $b_1/b_0$  при  $H$ , близких к  $H^0$ , функция  $D_w(\Omega)$  имеет нуль в верхней полуплоскости, т. е. тип решения не меняется.

Отметим, что случай  $k = 2$  можно было бы считать исключительным, так как в общем случае  $k = 1$ . Однако существует важная для приложений группа задач, в которых имеется инвариантность относительно замены  $y$  на  $-y$  (газодинамические ударные волны и некоторые частные случаи МГД ударных волн). В этих задачах  $D_w(\Omega)$  — четная функция.

Пусть теперь при  $H \rightarrow H^1$  комплексно-сопряженные корни функции  $D_w$  приходят на действительную ось  $\Omega$  в конечной точке  $\Omega_0$ , лежащей вне разрезов  $I_h$ , которые теперь будем считать проведенными по действительной оси  $\Omega$  между точками ветвления. Тогда в этой точке  $D_w(\Omega)$  имеет кратный корень, причем в случае общего положения его кратность равна 2. При дальнейшем изменении параметров корни становятся действительными. Поверхность  $\Sigma_1$  в пространстве  $H$ , на которой это происходит, служит еще одной границей областей неустойчивости и нейтральной устойчивости.

Если переход корня из комплексной плоскости на действительную ось происходит на каком-либо разрезе  $I_h$ , то при дальнейшем изменении параметров корень уходит с рассматриваемого листа римановой поверхности и уже не дает вклада в решение.

Еще одна возможность появления нуля функции  $D_w(\Omega)$  на действительной оси — это выход его из разреза на действительную ось. В момент выхода нуль (в случае общего положения однократный) совпадает с точкой ветвления корней характеристического уравнения. Совпадение нуля с точкой ветвления может служить границей (в пространстве параметров это некоторая поверхность  $\Sigma_2$ ) между устойчивостью (когда у  $D_w(\Omega)$  нет нулей на рассматриваемом листе римановой поверхности) и нейтральной устойчивостью (когда нули  $D_w(\Omega)$  расположены на действительной оси). Именно в этом случае имеет место рассмотренное в разд. 2 поведение  $|U^F| \sim t^{-1/2}$ .

Из полученных результатов следует, что область нейтральной устойчивости  $O_N$  имеет ту же размерность, что и пространство определяющих параметров задачи (1.1), (1.2). Поэтому для каждой внутренней точки пространства параметров задача (1.1), (1.2) устойчива, т. е. слабые изменения коэффициентов системы (1.1) и граничных условий (1.2) при  $x = 0$ ,  $t \geq 0$  не приводят к возникновению решения нового типа.

**5. О корректности задач, неоднородных по порядку дифференцирования.** Отметим, что, если изменить постановку задачи путем введения в уравнения (1.1) и граничные условия (1.2) дополнительных недифференциальных членов, то это не приведет к некорректности, если параметры исходной задачи лежали внутри области корректности. Действительно, поскольку некорректность может проявляться при больших  $k\Omega$ , когда

добавочные члены малы, то добавка  $\Delta\Omega$  к корню  $\Omega_i$  уравнения  $D_w(\Omega) = 0$  находится из равенства

$$a(\Delta\Omega)^f + bk^{-1} = 0$$

где первый член представляет главную часть приращения  $D_w(\Omega_i + \Delta\Omega) - D_w(\Omega)$  ( $f$  — кратность корня  $\Omega_i$ ), а второй — значение при  $\Omega = \Omega_i$  добавочных членов, которые появляются в уравнении для  $\Omega$  при указанном выше изменении постановки задачи. Множитель  $k^{-1}$  связан с более низким порядком дифференцирования добавочных членов по сравнению с исходными.

Очевидно, переход к некорректности (и к неустойчивости) за счет появления новых членов возможен только в случае, когда  $\Omega_i$  — действительный корень. Если он однократный ( $f = 1$ ), то  $\Delta\Omega$  имеет порядок  $k^{-1}$ , а соответствующий инкремент  $k\Delta\Omega$  ограничен при  $k \rightarrow \infty$ . Таким образом, в данном случае некорректность не возникает, но может возникнуть неустойчивость с ограниченным инкрементом временного роста. Это заключение неверно при  $f \geq 2$ , однако, как было показано выше, наличие кратного действительного корня  $\Omega$  соответствует границе области устойчивости в пространстве параметров.

Другой вариант появления неустойчивости или некорректности может быть связан с перемещением за счет появления недифференциальных членов точки ветвления корней  $\lambda(\Omega)$  с действительной оси в верхнюю полуплоскость. Однако этого не происходит.

Рассмотрим сначала простую точку ветвления  $\Omega_0$ , в которой совпадают значения двух ветвей функции  $\lambda(\Omega)$ . Рассматривая малую окрестность точки  $\Omega_0$  и ограничиваясь малыми изменениями  $\Delta\lambda(\Omega)$ , можно ограничиться рассмотрением квадратного уравнения для  $\Delta\lambda$  с коэффициентами, зависящими от  $\Omega$ . В точке  $\Omega = \Omega_0$  дискриминант должен обратиться в нуль. В простейшем случае в малой окрестности точки  $\Omega_0$  зависимость дискриминанта от  $\Omega$  можно считать линейной. Тогда по одну сторону от точки ветвления оба корня  $\lambda(\Omega)$  действительны, а по другую — оба комплексны. В этом случае учет дополнительных слагаемых, содержащих  $k^{-1}$ , приведет к сдвигу точки ветвления  $\Omega$  на величину  $\Delta\Omega \sim k^{-1}$ , что может привести лишь к ограниченному инкременту временного роста решения, т. е. к неустойчивости, а не некорректности.

Заключение будет неверным, если у исходной задачи дискриминант не содержит линейного члена, а начинается с квадратичного. Однако в этом случае точку  $\Omega_0$  можно рассматривать как результат слияния двух точек ветвления. Из разд. 4 следует, что в этом случае диаграмма групповых скоростей касается границы, т. е. скорость одного из слабых разрывов обращается в нуль в системе координат, связанной с границей. Это соответствует границе области эволюционности (и, следовательно, корректности) разрыва. Случай наличия на действительной оси точек ветвления функции  $\lambda(\Omega)$  с кратностью больше двух здесь не рассматривались.

6. О потере гладкости возмущением при отражении от нейтрально устойчивой границы. Одним из важных свойств решения задачи (1.1), (1.2) в случае нейтральной устойчивости является потеря гладкости, связанная с появлением у функции  $D_w(\Omega)$  одного или нескольких действительных нулей, порождающих действительные полюса решения  $U^L(\Omega)$ . Для этих случаев отсутствуют [8, 9] оценки, обеспечивающие гладкость решения, равную гладкости начальных данных. Ниже будут даны простые, хотя и нестрогие объяснения явления потери гладкости.

Проще всего заметить потерю гладкости в асимптотической форме решения (1.8). Полюса функции  $U^L(\Omega)$  при вычислении обратного преобразования Лапласа по времени (интегрирование по  $\omega = k\Omega$ ) будут, очевидно, давать вклад, пропорциональный  $k$ :

$$\int \frac{A(k, \omega)}{(\omega/k - \Omega_0)} e^{i\omega t} d\omega = kA(k, k\Omega_0) e^{ik\Omega_0 t}$$

Это приводит к более медленному стремлению к нулю при  $k \rightarrow \infty$  функции, которая соответствует вычету и соответствует отклику границы по сравнению с функцией  $A(k, \omega)$ , представляющей падающие возмущения.

Дадим теперь другую трактовку этого вопроса, позволяющую проследить процесс во времени. Так как каждый полюс выделяет некоторое значение  $\Omega_0$ , а часть решения, связанная с вычетом, получается как интеграл по сколь угодно малой окружности вокруг точки  $\Omega_0$ , то последнее означает, что эта часть решения представляет фактически сумму  $n$  плоских волн, соответствующих действительным  $\lambda(\omega_0)$ .

Предположим, что имеется только одна приходящая ( $u$ ) и одна уходящая ( $v$ ) волны. Это ограничение несущественно и делается ради простоты. Краевое условие на границе  $x = 0$  запишем в виде

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial v}{\partial y} = A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.1)$$

Здесь предположено, что производные по  $x$  исключены из граничных условий при помощи уравнений, которым удовлетворяют  $u$  и  $v$ . Функция  $D_w(\Omega_0)$ , определяемая оператором в левой части равенства (6.1), имеет нуль при  $\Omega = \Omega_0$ . Функция  $u(t, y)$  считается известной. Переходя к системе координат, движущейся вдоль оси  $y$  со скоростью  $\Omega_0$ , из (6.1) получим в этой системе, что частная производная от  $v$  по  $t$  выражается линейно через  $\partial u/\partial t$  и  $\partial u/\partial y$ . Отсюда видно, что гладкость по  $y$  уходящего возмущения  $v$  может оказаться на порядок меньше гладкости приходящего возмущения  $u$ .

Отметим, что аналогичный результат следует и непосредственно из соотношений (1.7), (1.8) после выполнения обратных преобразований Фурье — Лапласа.

**7. О возможности описания возмущений на границе при помощи дифференциального уравнения.** Заметим, что левая часть уравнения  $D_w(\omega, k) = 0$ , где  $\omega = k\Omega$ , определяющего собственные числа задачи (1.1), (1.2), не является многочленом относительно  $\omega$  и  $k$ , так как она содержит величины  $\lambda(\omega, k)$ , сложным образом зависящие от своих аргументов, причем в  $D_w$  входят только  $\lambda$ , соответствующие уходящим волнам. Поэтому приведенному выше уравнению нельзя поставить в соответствие уравнение в частных производных. Однако ему можно сопоставить некоторое псевдодифференциальное уравнение, которому удовлетворяет решение  $U$  на границе

$$D_w^1(\partial/\partial t, \partial/\partial y)u = f(y, t) \quad (7.1)$$

где  $u$  — любая из неизвестных функций,  $f$  описывает влияние приходящих на границу возмущений, а функция  $D_w^1$  не является многочленом

от своих аргументов, т. е. не является дифференциальным оператором, а понимается только в том смысле, что преобразование Фурье — Лапласа от  $D_w^{-1}$  дает  $D_w(\omega, k)$ . Если бы все корни  $\lambda_j$  входили в некоторое выражение симметричным образом, то, воспользовавшись известной теоремой алгебры [12], такие симметричные алгебраические функции от  $\lambda_j$  можно было бы выразить через коэффициенты уравнения, которому удовлетворяют  $\lambda$ , т. е. через многочлены от  $\omega$  и  $k$ . Поэтому, если подействовать на обе части равенства (7.1) произведением операторов  $D_{w_i}^{-1}$ , таких же как и  $D_w^{-1}$ , но в которые входят другие корни  $\lambda_j$  так, чтобы произведение содержало все корни равноправным образом, то получим

$$D(\partial/\partial t, \partial/\partial y) \equiv D_{w_1}^{-1} D_{w_2}^{-1} \dots D_{w_N}^{-1} D_w^{-1} u = D_{w_1}^{-1} D_{w_2}^{-1} \dots D_{w_N}^{-1} f \quad (7.2)$$

где, согласно сказанному выше, оператор  $D(\partial/\partial t, \partial/\partial y)$  — многочлен от своих аргументов, т. е. дифференциальный оператор. Таким образом, исходная смешанная краевая задача (1.1), (1.2) свелась к задаче Коши для одного дифференциального уравнения (7.2) высокого порядка. Подобное заключение для газовой динамики было получено ранее другим методом в [10].

Отметим специальное строение правой части равенства (7.2), которое и обеспечивает соответствие решений уравнений (7.1) и (7.2). Если рассматривается задача с ненулевыми начальными условиями, то эти условия для уравнения (7.2) должны также подчиняться некоторым ограничениям, чтобы решение удовлетворяло и уравнению (7.1).

Можно отметить, что практическое использование уравнения (7.2) затруднительно по двум причинам. Во-первых, порядок получающегося уравнения очень высок — число сомножителей, входящих в  $D$ , равно  $C_n^m$ , где  $m$  — число уходящих от границ волн,  $n$  — порядок системы. Во-вторых, функция  $D(\omega, k)$  может иметь «лишние» нули на других, не нужных при исследовании устойчивости листах римановой поверхности над плоскостью  $\omega$ , которые, однако, не действуют из-за специального вида правой части равенства (7.2).

**8. О нейтрально устойчивых ударных волнах в магнитной гидродинамике.** Рассмотрим в качестве примера применения высказанных выше соображений вопрос о существовании нейтрально устойчивых ударных волн (УВ) в магнитной гидродинамике. Ограничимся рассмотрением быстрых УВ с магнитным полем, перпендикулярным к поверхности УВ с обеих ее сторон. УВ является быстрой, если выполнено неравенство [13]  $A^2 \equiv B^2/(4\pi u^2) < 1$ , где  $B$  — напряженность магнитного поля,  $u$  и  $\rho$  — скорость и плотность газа за УВ.

Ранее было показано [5], что наличие магнитного поля не влияет на критерии неустойчивости такой УВ: уравнение для собственных частот возмущений не зависит от  $B$  и имеет вид

$$[2M^2 - \delta - 1 - (\delta - 1)\sigma M^2]z^2 - 2(\delta - M^2)z + (\delta - 1)(\sigma - 1) = 0$$

$$z = \omega/\lambda - 1 \quad (8.1)$$

Здесь  $z$  — отнесенная к  $\lambda$  частота возмущений в системе координат, связанной с газом за УВ,  $\sigma \equiv \rho/\rho_0 > 1$  — отношение плотностей на УВ,  $\delta = -(\rho u)^2(\partial 1/\rho/\partial p)_H$  — безразмерная производная вдоль ударной адиа-

баты,  $M < 1$  — число Маха за УВ. В качестве характерной взята скорость газа  $u$ .

Для совершенного газа

$$\delta = \frac{1}{M_\infty^2}, \quad \sigma = \frac{(\gamma + 1) M_\infty^2}{2 + (\gamma - 1) M_\infty^2}, \quad M^2 = \frac{2 + (\gamma - 1) M_\infty^2}{2\gamma M_\infty^2 - \gamma + 1} \quad (8.2)$$

где  $M_\infty$  — число Маха набегающего потока. Отметим также, что величина  $z$  удовлетворяет дисперсионному уравнению для магнитозвуковых волн

$$z^4 - \left(A^2 + \frac{1}{M^2}\right) \left(1 + \frac{k_y^2}{\lambda^2}\right) z^2 + \frac{A^2}{M^2} \left(1 + \frac{k_y^2}{\lambda^2}\right) = 0 \quad (8.3)$$

Как было показано выше, переход от устойчивости к нейтральной устойчивости происходит, когда уравнение для собственных частот (8.1) (функция  $D_w$ ) имеет корень, соответствующий возмущению, разделяющему приходящие и уходящие волны, т. е. возмущению,  $x$ -компонента групповой скорости которого в системе координат, связанной с УВ, равна нулю:

$$\partial\omega/\partial\lambda = 0 \quad (8.4)$$

Исключая из соотношений (8.2), (8.3) и  $z = \omega/\lambda - 1$  величину  $k_y/\lambda$ , получим

$$\begin{aligned} \left(A^2 + \frac{1}{M^2}\right) z^5 + \left(\frac{1}{M^4} + \frac{A^2}{M^2} + A^4\right) z^4 - \frac{2A^2}{M^2} z^3 - \\ - \frac{2A^2}{M^2} \left(A^2 + \frac{1}{M^2}\right) z^2 + \frac{A^4}{M^4} = 0 \end{aligned} \quad (8.5)$$

При  $A^2 = 0$  уравнение (8.5) имеет корень  $z = -1/M^2$ , соответствующий газодинамическим возмущениям и четырехкратный корень  $z = 0$ . Поскольку изучаемая УВ — быстрая, она может взаимодействовать только с быстрыми магнитозвуковыми возмущениями, которые непрерывным образом получают из газодинамических при увеличении  $A^2$ . При малых  $A^2$  для представляющего интерес корня из (8.5) получим

$$z = -M^{-2} (1 + \alpha), \quad \alpha = M^4 (1 - M^2) A^4 \ll 1 \quad (8.6)$$

Условием перехода от устойчивости к нейтральной устойчивости является совпадение полученного решения с корнем уравнения (8.1). Подставляя (8.6) в (8.1), найдем значение  $\delta = \delta_1$ , соответствующее границе устойчивых и нейтрально устойчивых УВ

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_0 + c\alpha \quad (8.7) \\ \delta_0 = \frac{\sigma M^2 + M^2 - 1}{\sigma M^2 + 1 - M^2}, \quad c = \frac{2M^2}{\sigma M^2 + 1 - M^2} \end{aligned}$$

Из (8.7) следует, что магнитное поле увеличивает область нейтральной устойчивости по сравнению со случаем  $B = 0$ , когда она расположена левее точки  $\delta = \delta_0$ .

Подставляя соотношение (8.2) в (8.7), найдем, что в совершенном газе сильная ( $M_\infty \gg 1$ ) УВ переходит в состояние нейтральной устойчивости при напряженности магнитного поля

$$B \geq a_\infty \sqrt{\rho_\infty M_\infty} f(\gamma), \quad f(\gamma) = \frac{8\pi\gamma^2}{(\gamma - 1) \sqrt{3\gamma^2 + 2\gamma - 1}}$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. № 3. С. 288—295.
2. Иорданский С. В. Об устойчивости плоской стационарной ударной волны // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 465—472.
3. Канторович В. М. К вопросу об устойчивости ударных волн // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. № 6. С. 1525—1526.
4. Erpenbeck J. J. Stability of step shocks // Phys. Fluids. 1962. V. 5. No 10. P. 1181—1187.
5. Gardner C. S., Kruskal M. D. Stability of plane magnetohydrodynamic shocks // Phys. Fluids. 1964. V. 7. № 5. P. 700—706.
6. Филиппова О. Л. Устойчивость плоских МГД-ударных волн // Аннот. докл. 6-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Ташкент, 1986. Ташкент: Фан, 1986. С. 616.
7. Блохин А. М., Дружинин И. Ю. Корректность некоторых линейных задач об устойчивости сильных разрывов в магнитной гидродинамике // Сиб. мат. ж. 1990. Т. 31. № 2. С. 3—8.
8. Kreiss H.-O. Initial Boundary Value Problems for Hyperbolic Systems // Commun. Pure and Appl. Math. 1970. V. 23. No 3. P. 277—296.
9. Majda A., Osher S. Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary // Commun. Pure and Appl. Math. 1975. V. 28. No 5. P. 607—675.
10. Михайлов Ю. Я., Чинилов А. Ю. Построение решения линейной задачи об устойчивости ударной волны // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 130—138.
11. Соболев С. Л. О смешанных задачах для уравнений в частных производных с двумя неизвестными переменными // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122. № 4. С. 555—558.
12. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975. 431 с.
13. Куликовский А. Г., Любимов Г. Л. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.

Москва

Поступила в редакцию  
25.XII.1990