Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК (531.36 + 539.3) : 534.1

© 1992 г. **В. П. Болдин, С. Б. Маланов, Г. А. Уткин**

ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ НАГРУЗКАМИ И ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ

Исследуется взаимообусловленное динамическое поведение двумерной системы и безотрывно движущейся по ней нагрузки или закрепления. На основании вариационного принципа Гамильтона получена постановка самосогласованной краевой задачи, которая корректно учитывает силы взаимодействия в движущемся контакте, в том числе обусловленные относительным движением и давлением волн. Выведены уравнения переноса энергии и импульса. Показано, что посредником преобразования энергии колебаний двумерной системы в энергию движения одномерного объекта выступает сила давления волн. Приводится пример постановки задачи, описывающей движение балки по пластине модели Кирхгофа.

1. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двумерной упругой полосы, вдоль которой безотрывно движется одномерная нагрузка или закрепление (фиг. 1). Здесь и в дальнейшем под одномерной нагрузкой понимается система, обладающая упругими и инерционными свойствами и достаточно хорошо описываемая одномерной моделью типа струна, балка и т. п. При этом характер колебаний двумерной системы зависит от закона движения нагрузки, а движение последней происходит под действием как внешних сил, так и сил реакции со стороны двумерной системы. Таким образом, возникает задача об описании их согласованного движения.

Пусть x, y — пространственные переменные двумерной системы, t — время, $D = \{(x, y, t)\colon x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ — некоторая область в пространстве xyt, а $D_0 = \{(y, t)\colon y_1 \leqslant y \leqslant y_2, t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$ — проекция области D на плоскость yt. Предположим, что закон движения одномерной нагрузки описывается некоторой обобщенной координатой $l\,(y, t)$ и набором вектор-функций обобщенных координат $\mathbf{v}\,(y, t)$ и $\mathbf{w}\,(y, t)$ размерности n, причем

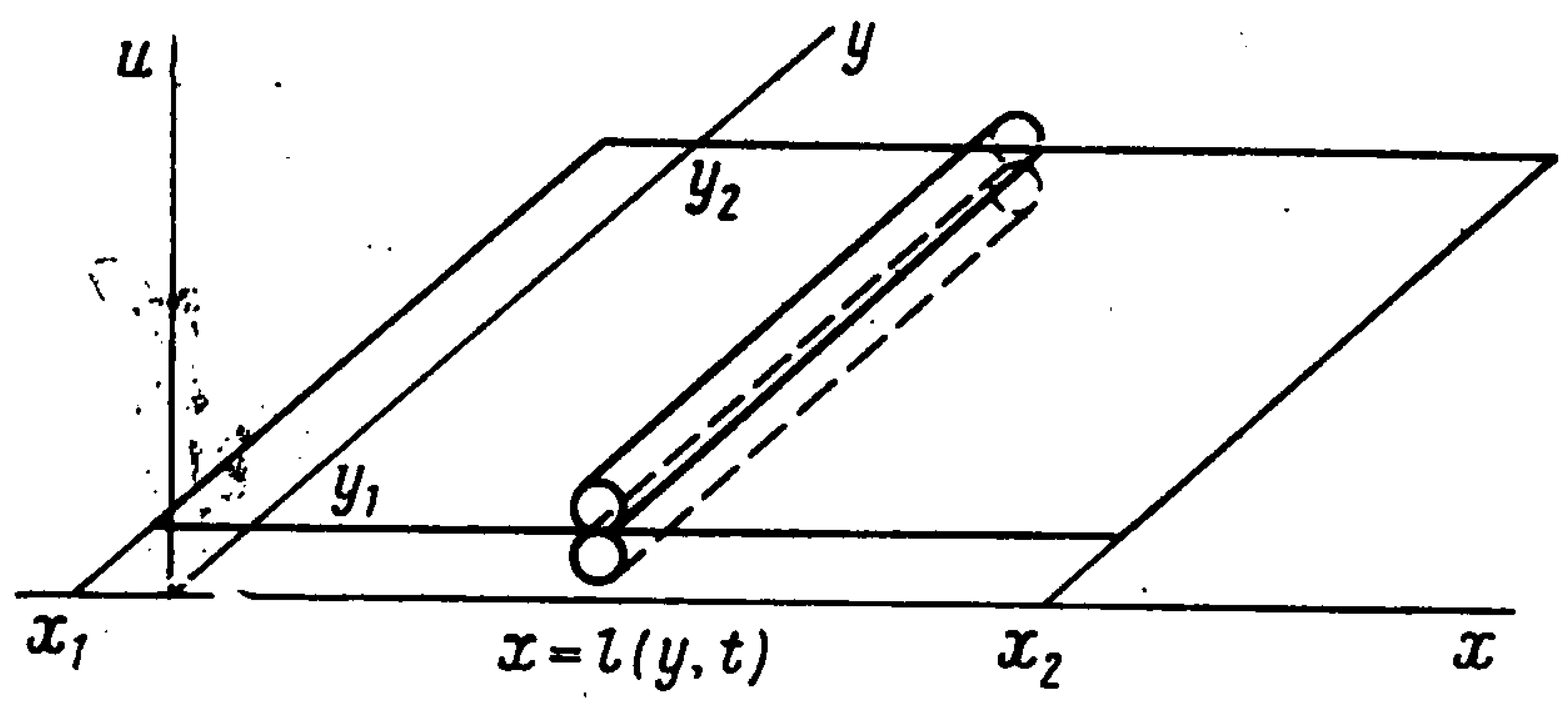
$$l\,(y, t) \in C^2\,(D_0),\ v^k\,(y,\ t) \in C^2\,(D_0)$$

$$w^k\,(y, t) \in C^2\,(D_0), \quad (k = 1, \ldots, n)$$

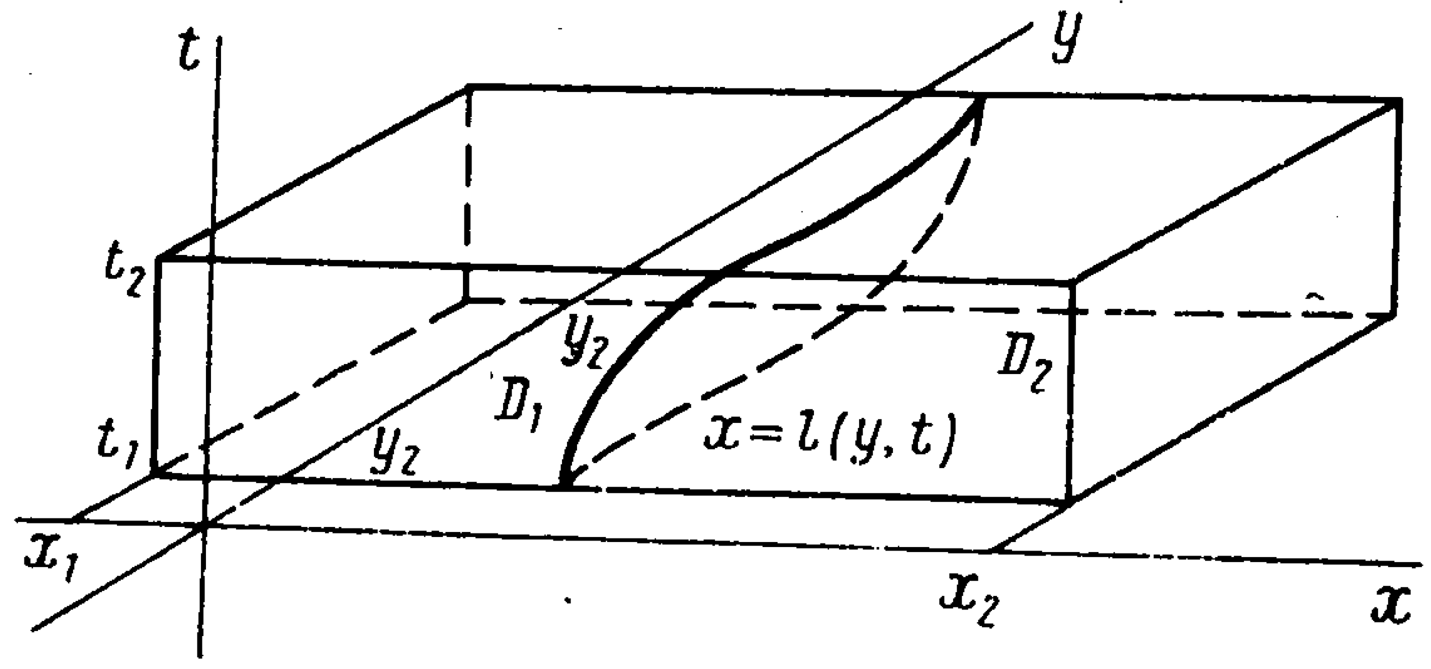
Поверхность $x = l\,(y, t)$, $(y, t) \in D_0$ делит область D на части D_1 и D_2 (фиг. 2). Закон движения двумерной системы описывается вектор-функцией обобщенных координат

$$\mathbf{u}\,(x, y, t) = (u^1\,(x, y, t), \ldots, u^n\,(x, y, t))$$

$$(u^k\,(x,\ y,\ t) \in C^1\,(D),\ u^k\,(x,\ y,\ t) \in C^4\,(D_i),\ i = 1, 2,\ k = 1, \ldots, n)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть $\lambda(x, y, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_t, \mathbf{u}_{xx}, \mathbf{u}_{xy}, \mathbf{u}_{yy})$ — плотность функции Лагранжа двумерной системы,

$$L(y, t, l, l_y, l_t, l_{yy}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{yy}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_y, \mathbf{w}_t, \mathbf{w}_{yy})$$

— плотность функции Лагранжа одномерной системы, λ, L — дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Функция λ может иметь вид

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_1, & x < l(y, t) \\ \lambda_2, & x > l(y, t) \end{cases}$$

а λ_1 и λ_2 — дважды непрерывно дифференцируемые функции по совокупности своих аргументов. Под безотрывностью движения описываемых объектов будем понимать выполнение равенств

$$v^k(y, t) = u^k(l(y, t), y, t)$$

$$w^k(y, t) = u_x{}^k(l(y, t), y, t), \quad (y, t) \in D_0, \; k = 1, \ldots, n$$

Набор функций $(l(y, t), \mathbf{u}(x, y, t), \mathbf{v}(y, t), \mathbf{w}(y, t))$, удовлетворяющих перечисленным выше условиям, будем называть сильно согласованным [1].

В соответствии с принципом Гамильтона обычными методами вариационного исчисления [1] доказывается

Теорема. Для того чтобы сильно согласованный набор $(l(y, t), \mathbf{u}(x, y, t), \mathbf{v}(y, t), \mathbf{w}(y, t))$ давал стационарное значение функционалу

$$J = \sum_{i=1}^{2} \iiint_{D_i} \lambda \, dx \, dy \, dt + \iint_{D_0} L \, dy \, dt$$

---

[1] *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Крысов С. В., Уткин Г. А.* Самосогласованные задачи динамики одномерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями: Препринт № 159. Горьк. научн.-исслед. радиофиз. ин-т. 1982. 25 с.

функции $\mathbf{u}(x, y, t)$, $l(y, t)$, $\mathbf{v}(y, t)$, $\mathbf{w}(y, t)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\lambda_{u^k} - \frac{\partial}{\partial t}\lambda_{u_t{}^k} - \frac{\partial}{\partial x}\lambda_{u_x{}^k} - \frac{\partial}{\partial y}\lambda_{u_y{}^k} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\lambda_{u^k_{xx}} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\lambda_{u^k_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\lambda_{u^k_{yy}} = -q^k, \quad k = 1, \ldots, n, \quad (x, y, t) \in D_i, \quad i = 1, 2 \tag{1.1}$$

$$L_l - \frac{\partial}{\partial t} L_{l_t} - \frac{\partial}{\partial y} L_{l_y} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L_{l_{yy}} = [F] - q_l, \quad (y, t) \in D_0 \tag{1.2}$$

$$L_{v^k} - \frac{\partial}{\partial t} L_{v_t{}^k} - \frac{\partial}{\partial y} L_{v_y{}^k} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L_{v^k_{yy}} = [N_k{}^1] - q_v{}^k, \quad (y, t) \in D_0$$

$$L_{w^k} - \frac{\partial}{\partial t} L_{w_t{}^k} - \frac{\partial}{\partial y} L_{w_y{}^k} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L_{w^k_{yy}} = [N_k{}^2] - q_w{}^k, \quad (y, t) \in D_0$$

$$v^k(y, t) = u^k(l(y, t), y, t)$$

$$w^k(y, t) = u_x{}^k(l(y, t), y, t) \quad k = 1, \ldots, n, \ (y, t) \in D_0 \tag{1.3}$$

Здесь

$$[A(x, y, t)] = A(l(y, t) + 0, y, t) - A(l(y, t) - 0, y, t) \tag{1.4}$$

$$F = \lambda - \sum_{k=1}^{n} (u_x{}^k N_k{}^1 + u^k_{xx} N_k{}^2)$$

$$N_k{}^1 = \lambda_{u_x{}^k} - \frac{\partial}{\partial x}\lambda_{u^k_{xx}} - \frac{\partial}{\partial y}\lambda_{u^k_{xy}} - l_y\left(\lambda_{u_y{}^k} - 2\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{u^k_{yy}}\right) +$$

$$+ l_{yy}\lambda_{u^k_{yy}} + l_y{}^2\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{u^k_{yy}} - l_t\lambda_{u_t{}^k}$$

$$N_k{}^2 = \lambda_{u^k_{xx}} - l_y\lambda_{u^k_{xy}} + l_y{}^2\lambda_{u^k_{yy}}$$

В правые части уравнений добавлены плотности обобщенных сил q^k, q_l, $q_v{}^k$, $q_w{}^k$, носящих непотенциальный характер.

Дифференциальные уравнения (1.1) описывают динамику двумерной системы, соотношения (1.2), (1.3) являются краевыми условиями согласованного движения, причем (1.2) выступают как дифференциальные уравнения динамики одномерного объекта.

Для окончательной постановки задачи к этим соотношениям необходимо добавить условия на краях объектов и начальные условия.

2. Приведем интерпретацию полученных результатов. Поскольку [2] $p_k = \lambda_{u_t{}^k}$ — плотность обобщенного импульса, соответствующего обобщенной координате $u^k(x, y, t)$ двумерной системы, $\mathbf{T}_k$ — вектор плотности внутренней потенциальной силы, M_k — тензор плотности момента, причем

$$\mathbf{T}_k = \begin{Vmatrix} T_{1k} \\ T_{2k} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_{u_x{}^k} - \frac{\partial}{\partial x}\lambda_{u^k_{xx}} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\lambda_{u^k_{xy}} \\ \lambda_{u_y{}^k} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\lambda_{u^k_{xy}} - \frac{\partial}{\partial y}\lambda_{u^k_{yy}} \end{Vmatrix}$$

$$M_k = (\mathbf{M}_{1k}, \mathbf{M}_{2k}) = \begin{Vmatrix} \lambda_{u^k_{xx}} & \frac{1}{2}\lambda_{u^k_{xy}} \\ \frac{1}{2}\lambda_{u^k_{xy}} & \lambda_{u^k_{yy}} \end{Vmatrix}$$

то для каждой обобщенной координаты $u^k(x, y, t)$ закон движения (1.1) принимает вид

$$\partial p_k/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{T}_k = \lambda_{u^k} + q^k$$

т. е., как обычно, может быть истолкован как уравнение переноса обобщенного импульса.

Особенность распределенных систем состоит в том, что им присущ перенос энергии и волнового импульса [3]. Чтобы получить уравнения переноса, умножим скалярно уравнения динамики двумерной системы (1.1) на частные производные вектора обобщенных координат $\mathbf{u}_t$, $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ и преобразуем получившиеся соотношения к виду:

$$\begin{gathered}
\partial h/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\lambda_t + \sum q^k u_t^k, \partial \mathbf{p}^*/\partial t + \operatorname{div} T^* = \mathbf{F}_0 - \sum q^k \nabla u^k \\
h = \sum u_t^k p_k - \lambda, \ \mathbf{S} = \sum (u_t^k \mathbf{T}_k + (\nabla u_t^k, M_k)) \qquad (2.1) \\
\mathbf{p}^* = -\sum p_k \nabla u^k, \ \mathbf{F}_0 = \nabla\lambda = \{\lambda_x, \lambda_y\} \\
T^* = \{\mathbf{T}_1^*, \mathbf{T}_2^*\} = \begin{Vmatrix} \lambda - \Sigma_{1x} & -\Sigma_{1y} \\ -\Sigma_{2x} & \lambda - \Sigma_{2y} \end{Vmatrix} \\
\sum\nolimits_{iz} = \sum (u_z^k T_{ik} + (\nabla u_z^k, \mathbf{M}_{ik})), \ i = 1, 2, \ z = x, y
\end{gathered}$$

Здесь h — плотность функции Гамильтона (обобщенной энергии), $\mathbf{S}$ — вектор плотности потока энергии, $\mathbf{p}^*$ — вектор плотности волнового импульса, T^* — тензор плотности потока волнового импульса (тензор напряжений), $\mathbf{F}_0$ — вектор плотности сил отдачи, возникающих из-за распределенного отражения волн при их распространении в неоднородной упругой системе, суммирование всюду ведется от $k = 1$ до $k = n$.

Аналогичным образом выводятся уравнения переноса обобщенной энергии и импульса для одномерной системы. Пусть $p_{1k} = L_{v_t^k}$, $p_{2k} = L_{w_t^k}$, $p_0 = L_{l_t}$ — плотности обобщенных импульсов, соответствующих обобщенным координатам $v^k(y, t)$, $w^k(y, t)$ $(k = 1, \ldots, n)$, $l(y, t)$ одномерной системы, $T_{1k} = L_{v_y^k} - \partial L_{v_{yy}^k}/\partial y$, $T_{2k} = L_{w_y^k} - \partial L_{w_{yy}^k}/\partial y$, $T_0 = L_{l_y} - \partial L_{l_{yy}}/\partial y$ — внутренние потенциальные силы в сечении y. Тогда соотношения (1.2) можно переписать в форме законов изменения обобщенных импульсов:

$$\begin{gathered}
\partial p_{1k}/\partial t + \partial T_{1k}/\partial y = L_{v^k} + q_v^k - [(\mathbf{n}_1, \mathbf{T}_k) - (\nabla(\mathbf{n}_1, \mathbf{M}_{2k}), \mathbf{n}_2) - l_t p_k] \\
\partial p_{2k}/\partial t + \partial T_{2k}/\partial y = L_{w^k} + q_w^k - [\mathbf{n}_1 M_k \mathbf{n}_1^T] \\
\partial p_0/\partial t + \partial T_0/\partial y = L_l + q_l - [(\mathbf{n}_1, \mathbf{T}_1^*) - l_t p_1^* + (\nabla \{\sum u_x^k (\mathbf{n}_1, \mathbf{M}_{2k})\}, \\
\mathbf{n}_2)], \ \mathbf{n}_1 = (1, -l_y), \ \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} l_y \\ 1 \end{pmatrix}
\end{gathered}$$

где $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ — векторы в плоскости x, y, коллинеарные векторам нормали и касательной к кривой, являющейся сечением поверхности $x = l(y, t)$ плоскостью $t = \text{const}$.

Законы переноса энергии и волнового импульса одномерной системы можно получить, умножая уравнения динамики (1.2) на соответствующие частные производные первого порядка обобщенных координат $\mathbf{v}(y, t)$, $\mathbf{w}(y, t)$, $l(y, t)$, и представить их в виде:

$$\partial h_0/\partial t + \partial S_0/\partial y = -L_t + l_t q_l + \sum (v_t^k q_v^k + w_t^k q_w^k) - [(\mathbf{n}_1, \mathbf{S}) -$$

$$- l_t h - (\nabla \{\textstyle\sum u_t^k (\mathbf{n}_1, \mathbf{M}_{2k})\}, \mathbf{n}_2\}]$$

$$\partial p_0^*/\partial t + \partial T_0^*/\partial y = L_y - (l_y q_l + \textstyle\sum (v_y^k q_v^k + w_y^k q^k{}_w)) - [(\mathbf{n}_1, \mathbf{T}_2^*) -$$

$$- l_t p_2^* + (\nabla \{\textstyle\sum u_y^k (\mathbf{n}_1, \mathbf{M}_{2k})\}, \mathbf{n}_2)]$$

$$h_0 = l_t p_0 + \textstyle\sum (v_t^k p_{1k} + w_t^k p_{2k}) - L$$

$$S_0 = l_t T_0 + l_{yy} L_{l_{yy}} + \textstyle\sum (v_t^k T_{1k} + w_t^k T_{2k} + v_{yt}^k L_{v_{yy}^k} + w_{yt}^k L_{w_{yy}^k})$$

$$p_0^* = - l_y p_0 - \textstyle\sum (v_y^k p_{1k} + w_y^k p_{2k})$$

$$T_0^* = L - (l_y T_0 + l_{yy} L_{l_{yy}}) - \textstyle\sum (v_y^k T_{1k} + w_y^k T_{2k} + v_{yy}^k L_{v_{yy}^k} + w_{yy}^k L_{w_{yy}^k})$$

Здесь h_0 — плотность функции Гамильтона, S_0 — плотность потока энергии, p_0^* — плотность волнового импульса, T_0^* — плотность потока волнового импульса.

Наряду с локальными законами переноса представляют интерес глобальные законы изменения энергии и волнового импульса. Интегрируя соотношения (2.1) по области $D^* = \{(x, y): x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\}$, получим:

$$\frac{dH}{dt} = \iint\limits_{D^*} \Big(\sum u_t^k q^k - \lambda_t\Big) dx\, dy - \oint\limits_{\Gamma} (\mathbf{n}, \mathbf{S})\, dl + \int\limits_{y_1}^{y_2} [(\mathbf{n}_1, \mathbf{S}) - l_t h]\, dy \tag{2.2}$$

$$\frac{d\mathbf{P}^*}{dt} = \iint\limits_{D^*} \Big(\mathbf{F}_0 - \sum q^k \nabla u^k\Big) dx\, dy - \oint\limits_{\Gamma} (\mathbf{n}, T^*)\, dl + \int\limits_{y_1}^{y_2} [(\mathbf{n}_1, T^*) - l_t \mathbf{p}^*]\, dy$$

$$H(t) = \iint\limits_{D^*} h(x, y, t)\, dx\, dy, \qquad \mathbf{P}^*(t) = \iint\limits_{D^*} \mathbf{p}^*(x, y, t)\, dx\, dy$$

где Γ — граница области D^*, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к ней, $\mathbf{n}_1 = (1, -l_y)$.

Так, для системы с постоянными параметрами ($\lambda_t = 0$) в отсутствие непотенциальных сил ($q^k = 0$) изменение полной энергии $H(t)$ обусловлено потоком энергии S через границы Γ и $x = l(y, t)$. Например, для случая абсолютно жесткого закрепления ($u = 0$, $\partial u/\partial \mathbf{n} = 0$) упругой полосы на границах $y = y_1$, $y = y_2$, $x = x_1$, $x = l(t)$ равенство (2.2) при учете соотношений (1.4) запишем в виде

$$\frac{dH(t)}{dt} = - l^{\boldsymbol\cdot}(t) F_g, \qquad F_g = \int\limits_{y_1}^{y_2} F(l(t) - 0, y, t)\, dy$$

где F_g — сила давления волн на движущееся закрепление, т. е. сила давления волн выступает посредником преобразования энергии колебаний в энергию поступательного движения и наоборот.

3. В качестве примера приведем постановку задачи об изгибных колебаниях $u(x, y, t)$ пластины Кирхгофа [4] при

$$\lambda = {}^1/_2\, (\rho u_t^2 - D\, \{(u_{xx} + u_{yy})^2 + 2(1 - \nu)(u_{xy}^2 - u_{xx}u_{yy})\})]$$

$$D = Eh^3/(12(1 - \nu))$$

когда вдоль пластины безотрывно движется балка

$$L = {}^1/_2\, (\rho_0 (u_t^{02} + l_t^2 + J_0 \varphi_t^{02}) - E_0 J (u_{yy}^{02} + l_{yy}^2) - G_0 J_0 \varphi_y^{02} - k_0 u^{02})$$

со вершающая изгибные $u^0(y, t)$, $l(y, t)$ и крутильные $\varphi^0(y, t)$ колебания. Здесь D — цилиндрическая жесткость, E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, ρ — поверхностная плотность, h — толщина пластины, E_c, G_0 — модули Юнга и сдвига, ρ_0 — погонная плотность, J_0, J — полярный момент инерции и момент инерции поперечного сечения относительно осей, перпендикулярных оси стержня, k_0 — коэффициент упругой постели. Изгибные колебания пластины определяются решением уравнения (1.1)

$$\rho u_{tt} + D(u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}) = q$$

удовлетворяющим при $x = l(y, t)$ условиям непрерывности и отсутствия излома (1.3)

$$u^0(y, t) = u(l(y, t) - 0, y, t) = u(l(y, t) + 0, y, t)$$
$$\varphi^0(y, t) = u_x(l(y, t) - 0, y, t) = u_x(l(y, t) + 0, y, t)$$

Уравнения баланса изгибающих моментов и поперечных сил (1.2) имеют вид

$$\rho_0 J_0 \varphi_{tt}{}^0 - G_0 J_0 \varphi_{yy}{}^0 = [N^2] + q_\varphi$$
$$\rho_0 u_{tt}{}^0 + E_0 J u_{yyyy}{}^0 + k_0 u^0 = [N^1] + q_u$$

Здесь

$$N^2 = D(u_{xx} + \nu u_{yy} - 2(1-\nu) l_y u_{xy} + l_y{}^2 (u_{yy} + \nu u_{xx}))$$
$$N^1 = \rho l_t u_t + D(-u_{xxx} - (2-\nu) u_{xyy} + l_y (\nu u_{xxy} +$$
$$+ u_{yyy}) + l_{yy}(\nu u_{xx} + u_{yy}) + l_y{}^2 (\nu u_{xxx} + u_{xyy}))$$

Уравнение движения балки $l(y, t)$ таково:

$$\rho_0 l_{tt} + E_0 J l_{yyyy} = [F] + q_l$$
$$F = -\lambda - u_x N^1 - u_{xx} N^2$$

где F — сила давления волн.

Ряд других примеров постановок конкретных краевых задач приведен в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Вывод естественных граничных условий для одномерных задач динамики упругих систем с движущимися закреплениями и нагрузками // Дифференциальные и интегральные уравнения. Горьк. ун-т, 1982. Вып. 6. С. 75—80.
2. *Весницкий А. И., Каплан Л. Э., Уткин Г. А.* Законы изменения энергии и импульса для одномерных систем с движущимися закреплениями и нагрузками // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 5. С. 863—866.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
4. Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
5. *Болдин В. П., Весницкий А. И.* Краевые задачи динамики двумерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями // Машиноведение. 1989. № 1. С. 70—75.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию 24.X.1990