

УДК 531.36

© 1992 г. А. П. Иванов

О БЕЗУДАРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ В СИСТЕМАХ С НЕУДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

Исследуются свойства безударных периодических движений в системах с неударивающей связью. Для этих движений интервалы напряженного и ослабленного состояния связи чередуются, причем напряжения связи не сопровождаются ударами.

Получены условия существования безударных движений, выяснена их связь с особенностями дифференцируемых отображений. Установлены притягивающие свойства безударных движений: при выполнении некоторых условий они аналогичны полуустойчивым предельным циклам. Полученные результаты иллюстрируются примерами: тело на упругой ноге [1] и связка тел на спутниковой орбите [2].

Практический интерес к безударным движениям обусловлен возможностью совершать «перелеты» между участками напряжения связи без нежелательных эффектов, присущих ударам: перегрузок, вибраций, энергетических потерь и т. п. [1]. Однако общие свойства таких движений пока не изучены, а некоторые имеющиеся частные результаты (например [2]) нуждаются в уточнении.

1. Различные виды движения и их описание. Пусть $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ — обобщенные координаты рассматриваемой механической системы, $q_1 \geq 0$ — наложенная на нее неударивающая связь, $L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ — функция Лагранжа, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (Q_1, \dots, Q_n)$ — обобщенные силы. Будем считать функции Q_i непрерывно дифференцируемыми, L — дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой области G фазового пространства R^{2n} , а неударивающую связь — идеальной. Уравнения Лагранжа имеют в отсутствие ударов о связь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 + R, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

где $R \geq 0$ — реакция связи.

Система (1.1) содержит $n + 1$ неизвестную величину: R, q_1'', \dots, q_n'' , поэтому для ее однозначного решения необходимо некоторое дополнительное соотношение между этими величинами. Такое соотношение между R и q_1'' для идеальной связи имеет вид [3]

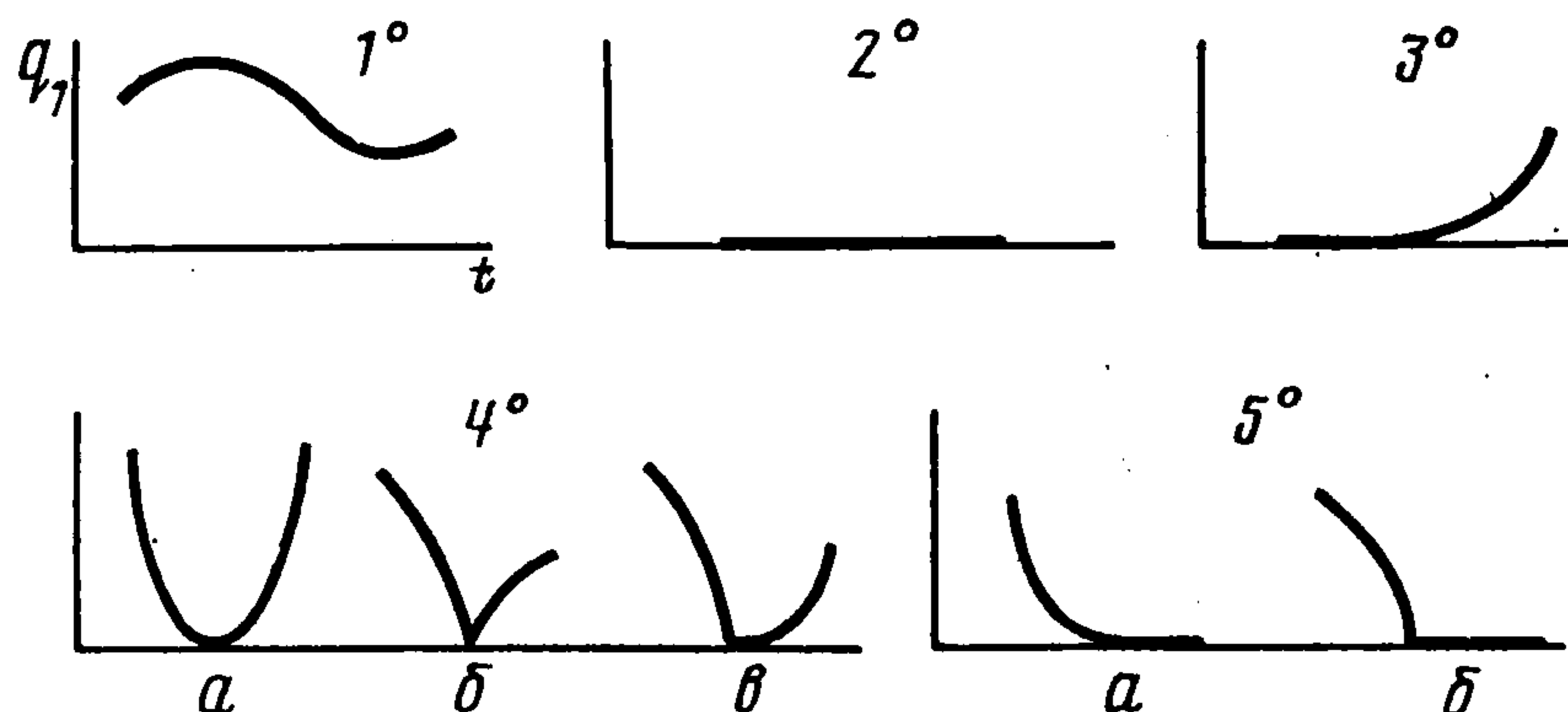
$$R \neq 0 \Rightarrow q_1 = \dot{q}_1 = q_1'' = 0 \quad (1.2)$$

Два основных случая решения системы (1.1) таковы:

- 1°. Неударивающая связь ослаблена $q_1 > 0$, тогда $R = 0$.
- 2°. Связь напряжена $R > 0$, тогда вследствие (1.2) $q_1'' = 0$. В этом случае можно сначала определить величины q_2'', \dots, q_n'' из второй группы уравнений (1.1), а затем подставить найденные значения в первое уравнение для определения реакции R . При этом в силу одностороннего характера связи допустимы лишь значения $R \geq 0$. Если допущение $q_1'' =$

$= 0$ приводит к неравенству $R < 0$, то оно некорректно; при этом $R = 0$, $q_1'' > 0$ и связь ослабляется.

Трудности для исследования представляют такие движения системы (1.1), которые включают в себя два основных вида 1° и 2°. При смене состояния неудерживающей связи в момент $t = t^*$ возможны следующие случаи (фиг. 1).



Фиг. 1

3°. При $t \leq t^*$ связь напряжена, а при $t > t^*$ ослаблена.

4°. При $t < t^*$ и при $t > t^*$ связь ослаблена, а при $t = t^*$ напряжена:

а) если $q_1'(t^* - 0) = 0$, то фазовая кривая $(q(t), q'(t))$ непрерывна в фазовом пространстве R^{2n} и касается плоскости $q_1 = 0$;

б) если $q_1'(t^* - 0) < 0$, то при $t = t^*$ имеет место удар о связь, т. е. скачкообразное изменение обобщенных скоростей за пренебрежимо малый промежуток времени; изменение скорости q_1' описывается при помощи ньютоновского коэффициента восстановления κ :

$$q_1'(t^* + 0) = -\kappa q_1'(t^* - 0), \quad 0 \leq \kappa \leq 1 \quad (1.3)$$

в) в равенстве (1.3) $\kappa = 0$, но при подстановке в уравнения (1.1) при $t = t^* + 0$ значения $q_1'' = 0$ реакция R оказывается отрицательной:

5°. Связь напряжена при $t \geq t^*$ и ослаблена при $t < t^*$:

а) если $q_1'(t_1 - 0) = 0$, то фазовая кривая непрерывна, напряжение связи не сопровождается ударом;

б) если $q_1'(t_1 - 0) < 0$ и в равенстве (1.3) $\kappa = 0$, а при подстановке в (1.1) значения $q_1'' = 0$ получаем $R \geq 0$ — случай пластического удара.

Кроме перечисленных случаев возможны также бесконечные чередования напряженного и ослабленного состояний связи в окрестности момента $t = t^*$, например случай квазипластического удара [4]. Обсуждаемые безударные движения помимо основных видов 1° и 2° включают в себя случаи 3° и 5° а.

2. Условия существования безударных движений. Рассмотрим условия ослабления связи (случай 3°) и ее безударного напряжения (5° а).

Определение 2.1. Выразим величину q_1'' из уравнений (1.1) через q , q' при $R \equiv 0$. Совокупность решений уравнения

$$q_1''(q, q') = 0 \quad (2.1)$$

назовем поверхностью отрыва в фазовом пространстве R^{2n} и будем обозначать ее J . Область, в которой выполнено неравенство $q_1'' > 0$, обозна]

чим J^+ , а J^- — область, где знак этого неравенства меняется на противоположный.

При сделанных предположениях левая часть равенства (2.1) непрерывно дифференцируема, поэтому множество J замкнуто, а множества J^+ и J^- открыты.

Движение при напряженной связи может происходить лишь в области J^- или на ее границе J . Если при $t > t^*$ связь ослабляется, а фазовая кривая непрерывна, то в соответствии с формулой Тейлора при учете равенств $q_1(t^*) = \dot{q}_1(t^*) = 0$ получим

$$0 < q_1(t) = 1/2 q_1''(\xi)(t - t^*)^2, \quad \xi \in (t^*, t)$$

т. е. изображающая точка при $t = \xi$ лежит в области J^+ . Переходя к пределу при $t \rightarrow t^* + 0$, получим $(q(t^*), \dot{q}(t^*)) \in J^+ \cup J$.

Таким образом, доказано следующее необходимое условие ослабления связи.

Теорема 2.1. Если $q_1 = 0$ при $t \leq t^*$ и $q_1 > 0$ при $t > t^*$, то при $t = t^*$ изображающая точка лежит на поверхности отрыва J .

Замечание. В момент отрыва обращается в нуль также и величина R : так как по определению поверхности J при $R = 0$ получаем $q_1'' = 0$, то предположение $R > 0$ приводит к неравенству $q_1'' > 0$, что противоречит условию (1.2).

Теорема 2.2. Пусть при $t < t^*$ фазовая кривая $(q(t), \dot{q}(t))$ лежит в плоскости $q_1 = 0$ и в области J^- , а при $t = t^*$ она попадает в неособую точку поверхности J и образует с этой поверхностью ненулевой угол. Тогда для достаточно близких к t^* значений $t > t^*$ связь ослаблена, $q_1(t) > 0$.

Доказательство. Так как $R = 0$ при $t = t^*$, как было замечено выше, то, полагая $R \equiv 0$ при $t > t^*$, можно продолжить данную фазовую кривую с сохранением непрерывной дифференцируемости. По условию она пересечет поверхность J и попадет в область J^+ , поэтому при таком продолжении получаем решение системы (1.1). Других непрерывных продолжений решения в силу условия (1.2) нет. Поскольку $q_1'' > 0$ в области J^+ , а $q_1(t^*) = \dot{q}_1(t^*) = 0$, то $q_1(t) > 0$ при $t > t^*$, что и требовалось.

Следствие. При выполнении условий теоремы $q_1'''(t^* + 0) > 0$.

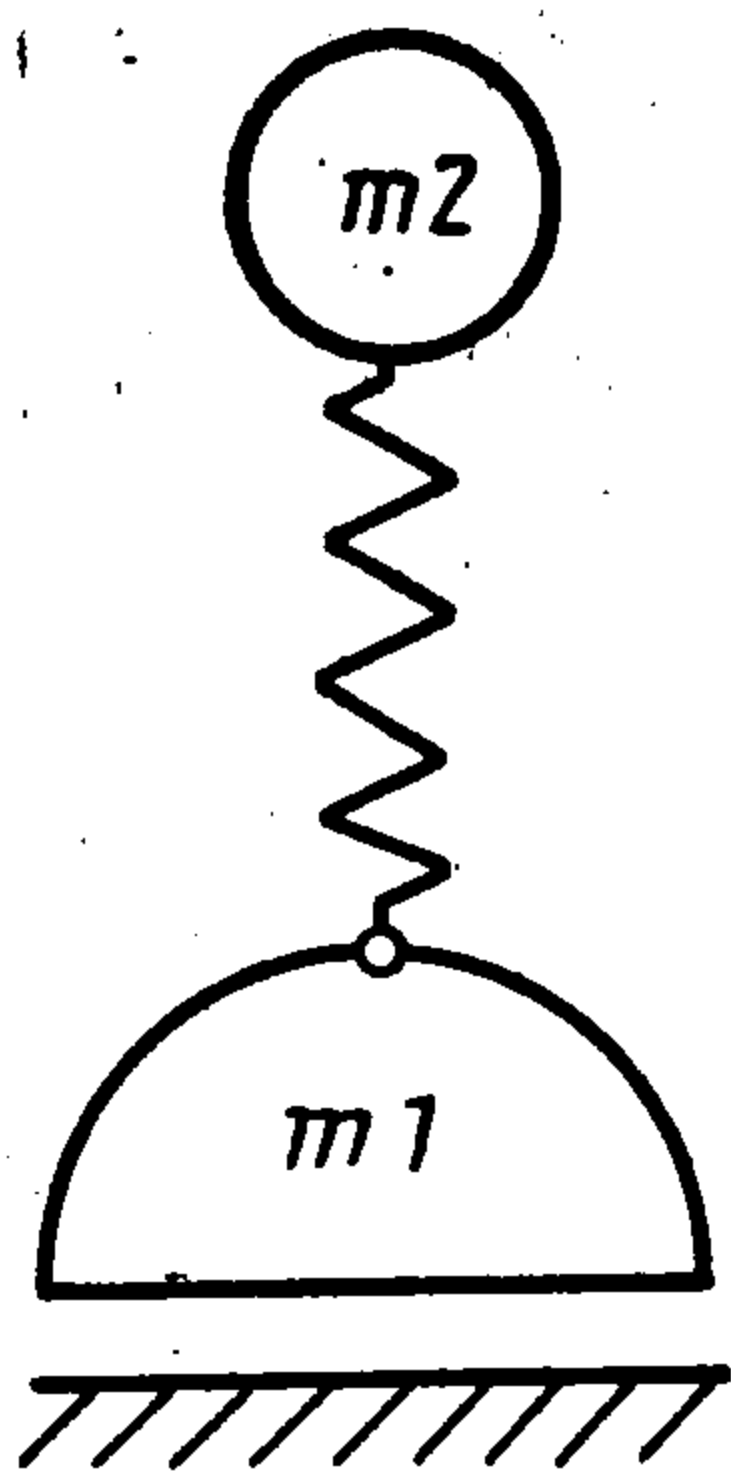
Действительно, существование величины q_1''' при $R \equiv 0$ следует из сделанных предположений о виде системы (1.1). В окрестности точки t^* при $t > t^*$ величина q_1'' имеет порядок $(t - t^*)$, поскольку касательный вектор к фазовой кривой образует ненулевой угол с поверхностью $q_1'' = 0$. Значит, в формуле Тейлора

$$q_1''(t) = q_1''(t^*) + q_1'''(t^* + 0)(t - t^*) + o(t - t^*) \quad (2.2)$$

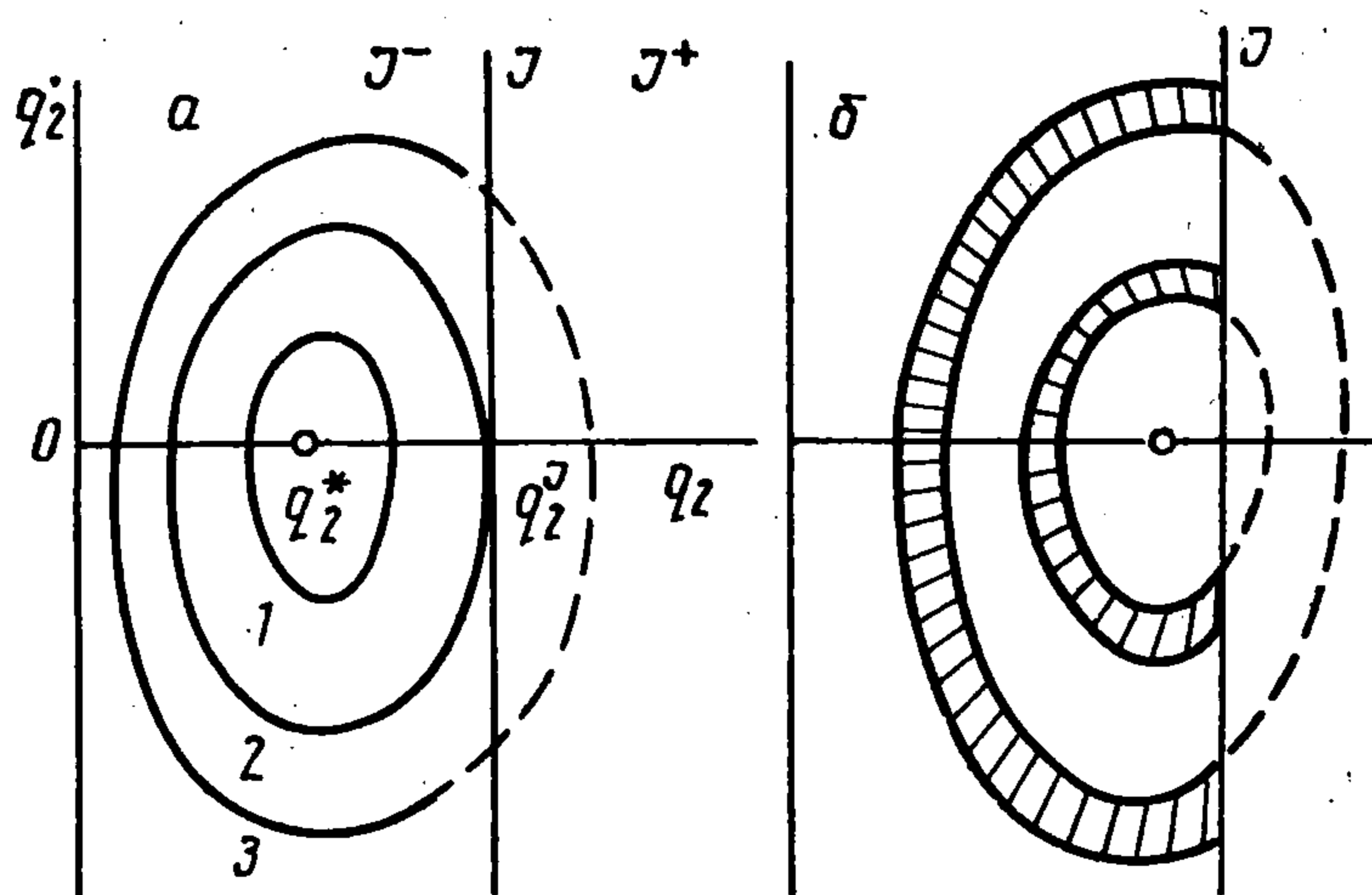
второе слагаемое положительно.

Пример 2.1. Исследуем движение двухмассовой системы [1], состоящей из упруго связанных корпуса и ноги (фиг. 2), по вертикали под действием силы тяжести. Пусть q_1, q_2 — расстояния от ноги и корпуса до опоры; m_1, m_2 — их массы; k — жесткость пружины, масса которой пренебрежимо мала; g — ускорение свободного падения. Функция Лагранжа такова:

$$L = 1/2 m_1 \dot{q}_1^2 + 1/2 m_2 \dot{q}_2^2 - g(m_1 q_1 + m_2 q_2) - 1/2 k (q_2 - q_1 - a)^2, \quad q_1 \geq 0 \quad (2.3)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

где величина a равна разности $q_2 - q_1$ при ненапряженном состоянии пружины. Уравнения (1.1) имеют вид

$$q_1'' + g - km_1^{-1}(q_2 - q_1 - a) = Rm_1^{-1}, \quad q_2'' + g + km_2^{-1}(q_2 - q_1 - a) = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение поверхности J получим, выражая величину q_1'' из первого уравнения (2.4) при $R = 0$:

$$q_1'' = km_1^{-1}(q_2 - q_1 - a) - g = 0 \quad (2.5)$$

Заменяя равенство (2.5) неравенством $>$ или $<$, получим формулы для областей J^+ и J^- соответственно (см. фиг. 3, а).

Движение при напряженной связи (т. е. при контакте ноги с опорой) описывается переменными q_2, \dot{q}_2 и его удобно отобразить на фазовой плоскости (фиг. 3, а). Такое движение характеризуется постоянным значением механической энергии системы

$$h = \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}k(q_2 - a)^2 + m_2gq_2 = \text{const} \quad (2.6)$$

Кривые (2.6), соответствующие различным значениям h , построены на фиг. 3, а. Система имеет единственное положение равновесия при значении $q_2 = q_2^* = a - gm_2k^{-1}$, являющееся центром семейства концентрических эллипсов. Реальным движениям соответствуют лишь те части кривых, которые целиком лежат в области J^- (например, кривая 1 описывает периодическое движение системы). Движение изображающей точки по эллипсу, пересекающему кривую J , по теореме 2.2 оканчивается на этой кривой, а затем связь с опорой ослабляется и фазовая кривая покидает плоскость $q_1 = 0$.

Изучим теперь условия безударного напряжения связи. Если $q_1 > 0$ при $t < t^*$ и $q_1(t^*) = 0$, то вследствие непрерывности фазовой кривой при безударном движении получим, что $q_1'(t^* - 0) \leq 0$.

В случае $q_1'(t^* - 0) < 0$ система испытывает удар о связь, который сводится к одному из видов 4°, б, в или 5°, б, описанных в разд. 1.

Если $q_1'(t^* - 0) = 0$, то величина q_1' непрерывна при $t = t^*$ и удара не происходит (случаи 4°, а или 5°, а). Так как $q_1 > 0$ при $t < t^*$ и $q_1(t^*) = q_1'(t^*) = 0$, то по формуле Тейлора

$$q_1(t) = \frac{1}{2}(t - t^*)^2 q_1''(\xi), \quad t < \xi < t^*$$

откуда $q_1''(\xi) > 0$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \rightarrow t^* - 0$, получим $q_1''(t^* - 0) \geq 0$. Знак строгого неравенства соответствует ослаблению связи при $t > t^*$ (случай 4°, а). Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть $q_1 > 0$ при $t < t^*$ и $q_1 = 0$ при $t \geq t^*$, причем фазовая кривая непрерывна. Тогда $q_1''(t^*) = 0$, т. е. в момент напряжения связи изображающая точка попадает на поверхность отрыва J .

Сформулируем достаточные условия безударного напряжения связи.

Теорема 2.4. Пусть при $t < t^*$ фазовая кривая лежит в областях $q_1 > 0$ и J^+ , а при $t = t^*$ изображающая точка попадает на пересечение плоскости $q_1 = q_1' = 0$ и поверхности J в неособой точке последней, причем кривая и поверхность образуют ненулевой угол. Тогда $q_1 = 0$ при $t > t^*$, причем фазовая кривая непрерывно дифференцируема.

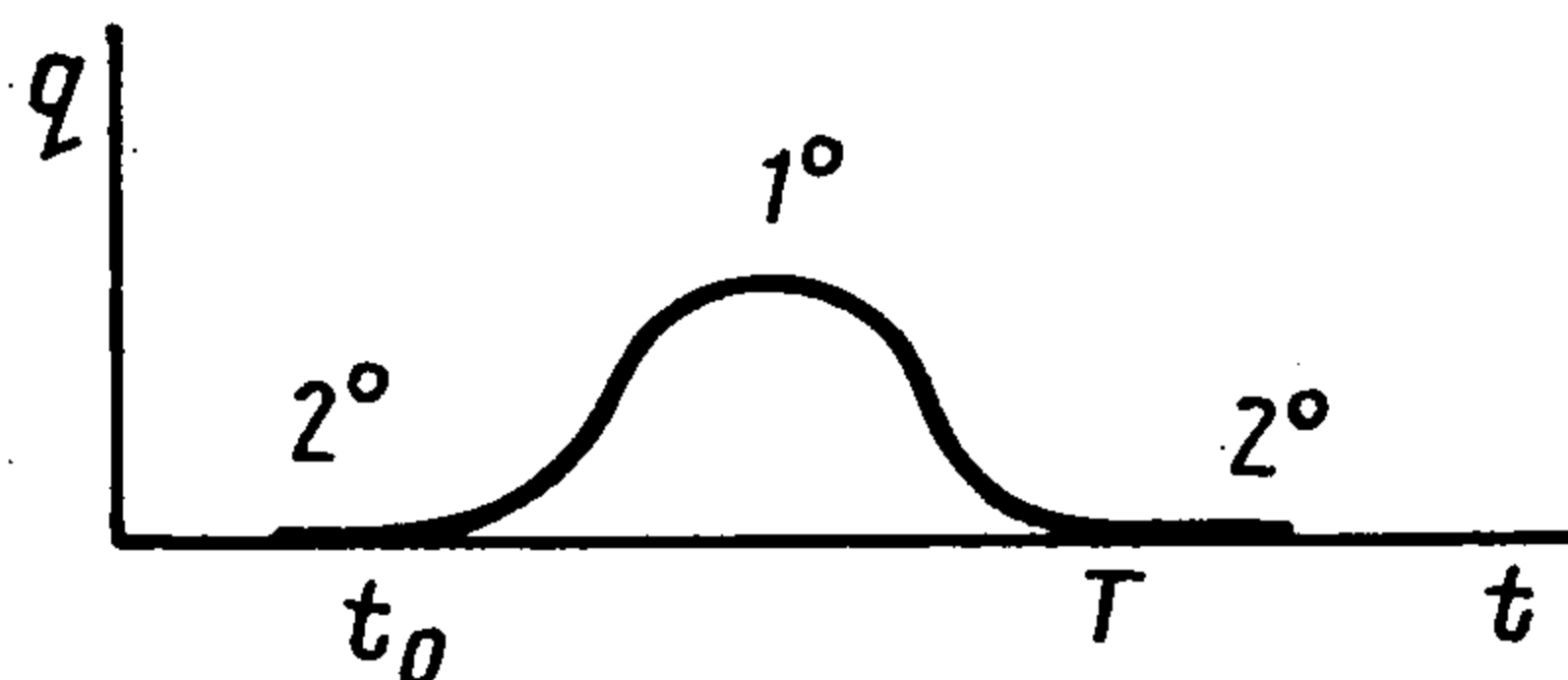
Доказательство. При сделанных предположениях $q_1(t^* - 0) = 0 = q_1'(t^* - 0) = q_1''(t^* - 0)$. Положим $q_1 \equiv 0$ при $t > t^*$, а значения переменных $q_2(t), \dots, q_n(t)$ определим из решения уравнений (1.1). Продолженная таким образом кривая непрерывно дифференцируема, поэтому при $t > t^*$ она попадает в область J^- , так что в (1.1) $R > 0$ и эти уравнения удовлетворяются. Единственность решения следует из того, что изменение величины R приводит к нарушению одного из условий $q_1 \geq 0$ или (1.2).

Следствие. При выполнении условий теоремы $q_1'''(t^* - 0) < 0$.

Доказательство аналогично доказательству следствия из теоремы 2.2.

Пример 2.2. Для двухмассового прыгуна необходимое условие безударного приземления означает, что в момент касания ногой опоры ее скорость равна нулю, а высота корпуса над опорой равна $q_2^J = a + m_1 g k^{-1}$. Достаточные условия теоремы 2.4 означают, что помимо этого скорость корпуса q_2' отрицательна.

3. Построение движений с безударными перелетами. Будем искать движения системы (1.1), включающие в себя участки различных типов, чередующиеся по схеме $2^\circ - 3^\circ - 1^\circ - 5^\circ, a - 2^\circ$. Примерный вид зависимости $q_1(t)$ для таких движений представлен на фиг. 4; участок 1° будем называть перелетом между двумя интервалами напряжения связи 2° .



Фиг. 4

Согласно теореме 2.1, ослабление связи происходит в одной из точек поверхности J ; последующее движение 1° -го типа описывается формулами

$$q = q(t, q^\circ, q^{\circ'}) \quad (3.1)$$

где $q^\circ, q^{\circ'}$ — значения переменных в момент $t = t^\circ$ ослабления связи. Функции (3.1) являются решением системы (1.1), где $R \equiv 0$.

При достаточно близких к t° значениям $t > t^\circ$ величина q_1 в формулах (3.1) положительна. Допустим, что $q_1 > 0$ при $t^\circ < t < T$ и $q_1(T) = 0$.

Определим отображение Φ той части поверхности J , где $q_1 = q_1' = 0$, в плоскость $q_1 = 0$ следующим образом:

$$\Phi(u^\circ) = u(T), \quad u = (q, q'), \quad u^\circ = (q^\circ, q^{\circ'}) \quad (3.2)$$

Отображение Φ можно также задать неявно формулами (3.1), полагая в них $t = T$ и добавляя равенство

$$q_1(T, \mathbf{q}^\circ, \mathbf{q}'^\circ) = 0 \quad (3.3)$$

В зависимости от характера напряжения связи аналитические свойства отображения Φ различны, как показано ниже.

Теорема 3.1. 1°. Траекториям, для которых напряжение связи сопровождается ударом (случаи 4°, б, 4°, в или 5°, б на фиг. 1), соответствуют точки дифференцируемости отображения Φ .

2°. Безударному напряжению связи (случай 5°, а) с последующим попаданием изображающей точки в область J^- соответствуют точки, в которых отображение Φ непрерывно, но недифференцируемо.

3°. Если $\mathbf{u}(t) \in J^+ \cup J$ при $t > T$ (как в случае 4°, а), то отображение Φ в данной точке \mathbf{u}° терпит разрыв.

Доказательство. 1°. В данном случае выполнено условие

$$\frac{\partial q_1}{\partial t}(t, \mathbf{u}^\circ)|_{t=T} = q_1'(T) < 0$$

и по теореме о неявной функции равенство (3.3) определяет в окрестности точки \mathbf{u}° дифференцируемую функцию $T = T(\mathbf{u}^\circ)$. Подставляя T в формулы (3.1) вместо t , получим явный вид дифференцируемого отображения Φ .

2°. Так как $\mathbf{u}(t) \in J^-$ при $t > T$, то при этом в формулах (3.1) $q_1(t, \mathbf{u}^\circ) < 0$. В силу непрерывности функций (3.1) кривая $\mathbf{u}(t, \mathbf{u}^\circ + \Delta \mathbf{u}^\circ)$ также пересекает плоскость $q_1 = 0$, причем в точке, близкой к $\Phi(\mathbf{u}^\circ)$, что и означает непрерывность Φ .

Недифференцируемость следует из теоремы Линделефа о характере зависимости решения системы

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(t^\circ) = \mathbf{u}^\circ$$

от начальных условий [5]: при любом $t > t^\circ$ якобиан $|\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{u}^\circ|$ отличен от нуля. Так как

$$\frac{\partial q_1}{\partial t}(t, \mathbf{u}^\circ)|_{t=T} = 0$$

то хотя бы одно из отношений $\Delta T / \Delta u_j^\circ$ ($j = 1, \dots, 2n$) неограничено в окрестности точки \mathbf{u}° .

Поскольку точка $\Phi(\mathbf{u}^\circ)$ не является положением равновесия, то хотя бы одна из величин $\partial u_s / \partial t$ ($s = 1, \dots, 2n$) при $t = T$ отлична от нуля. Тогда частная производная $\partial u_s / \partial u_j^\circ$ не существует.

3°. В данном случае фазовая кривая описывается формулами (3.1) не только для значений $t^\circ < t < T$, но и при $t > T$, так как в области $J \cup J^+$ величина R равна нулю. Векторное поле $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ в окрестности особой точки $\Phi(\mathbf{u}^\circ)$ диффеоморфно постоянному векторному полю [5]; при этом диффеоморфизме плоскость $q_1 = 0$ переходит в некоторую гладкую поверхность. Так как невозмущенная кривая $\mathbf{u}(t, \mathbf{u}^\circ)$ касается этой поверхности, не пересекая ее, а кривые $\mathbf{u}(t, \mathbf{u}^\circ + \Delta \mathbf{u}^\circ)$ ей параллельны, то некоторые из этих кривых не имеют с поверхностью общих точек в окрестности значения $t = T$. Следовательно, $\Delta \Phi \not\rightarrow 0$ при $\Delta \mathbf{u}^\circ \rightarrow 0$.

Доказанная теорема в совокупности с результатами разд. 2 позволяет разработать алгоритм построения движений с безударными перелетами: аналитически или численно находим точки пересечения образа отображения Φ с плоскостью $q_1 = q_1' = 0$ и поверхностью J , а затем проверяем условия теоремы (2.5).

Пример 3.1. Для двухмассового прыгуна формулы (3.1) легко получить, решая линейную систему (2.4) при $R = 0$:

$$\begin{aligned} q_1 &= g\omega^{-2} (1 - \cos v - \frac{1}{2}v^2 + \alpha v - \alpha \sin v) \\ q_2 &= q_2^{\circ} + g\omega^{-2} [\alpha v - \frac{1}{2}v^2 + (m_1/m_2) (\alpha \sin v + \cos v - 1)] \\ v &= \omega t, \quad \alpha = \frac{\omega m_2}{Mg} q_2^{\circ}, \quad M = m_1 + m_2, \quad \omega^2 = \frac{kM}{m_1 m_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Необходимые условия безударного приземления $q_1 = q_1' = q_1'' = 0$ при учете (3.4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha (v - \sin v) &= \cos v - 1 + \frac{1}{2}v^2, \quad \alpha (1 - \cos v) = v - \sin v, \quad \alpha \sin v = 1 - \\ & - \cos v \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решения системы (3.5) описываются формулами

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha, \quad v = 2\alpha \quad (3.6)$$

Достаточные условия, помимо равенств (3.6), сводятся к неравенству $q_2^{\circ} < 0$, откуда при учете формул (3.4) получаем $\alpha > 0$. Уравнение (3.6) имеет бесчисленное множество положительных корней, минимальный из которых лежит в интервале $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Каждому корню соответствует безударный перелет между точкой

$$q_2^{\circ} = q_2^J, \quad q_2^{\circ} = \frac{Mg}{\omega m_2} \alpha \quad (3.7)$$

и точкой, симметричной с ней относительно оси q_2 .

Зависимость v от α в конце перелета задается первой из формул (3.5), как следует из этой формулы,

$$\alpha = \frac{\cos v - 1 + \frac{1}{2}v^2}{v - \sin v}, \quad \frac{d\alpha}{dv} = \frac{(v \cos \frac{1}{2}v - 2 \sin \frac{1}{2}v)^2}{(v - \sin v)^2} \geq 0 \quad (3.8)$$

Из соотношений (3.8) видно, что функция $v(\alpha)$ непрерывна и монотонно возрастает при $\alpha > 0$, но недифференцируема в тех точках, где $v = 2\operatorname{tg} \frac{1}{2}v$, при этом $\alpha = \operatorname{tg} \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}v$. Таким образом, в соответствии с выводами теоремы (3.1), потеря дифференцируемости происходит как раз на безударных движениях (3.6).

4. Периодические безударные движения и их финальные свойства. Если силы, действующие на систему, потенциальны, то на интервалах безударного движения ее механическая энергия сохраняется. Однако при неабсолютно упругих ударах (в (1.3) $\kappa < 1$) происходит диссипация энергии, поэтому система не консервативна. Следовательно, если периодические движения существуют, то они безударны.

Если для некоторого периодического движения связь все время ослаблена, $q_1 > 0$, то она не оказывает влияния и на достаточно близкие к нему движения, так что для исследования устойчивости можно применять обычные методы теории возмущений.

В случае, когда периодические движения содержат участки напряже-

ния связи ($q_1 = 0$), возмущенное движение в общем случае сопровождается ударами о связь. Поэтому такой случай требует особого изучения. Некоторые вопросы устойчивости систем с абсолютно упругими ударами ($\kappa = 1$) рассмотрены в [6, 7]. В данной работе обсуждается случай $\kappa < 1$ в системе с двумя степенями свободы.

Будем считать, что функция Лагранжа имеет вид

$$L = 1/2 (a_{11}q_1'^2 + a_{22}q_2'^2) + a_1q_1' + a_2q_2' + L_0(q), \quad q_1 \geq 0 \quad (4.1)$$

где коэффициенты зависят от q , а $Q_1 = Q_2 \equiv 0$. Отсутствие в формуле (4.1) слагаемого $a_{12}q_1'q_2'$ не ограничивает общности, а лишь предполагает специальный выбор обобщенных координат [8]. Если в некоторой системе координат q_1^* , q_2^* квадратичная часть лагранжиана такова:

$$L_2^* = 1/2 (a_{11}^*q_1'^{*2} + 2a_{12}^*q_1'q_2'^* + a_{22}^*q_2'^{*2})$$

то к виду (4.1) приводит замена переменных [8]

$$q_1 = q_1^*, \quad q_2^* = \varphi(q_1, q_2), \quad \partial\varphi/\partial q_1 = -a_{12}^*/a_{22}^*, \quad \varphi(0, q_2) = q_2 \quad (4.2)$$

Существование обратимой замены (4.2) при всех $q_1 > 0$ следует из вышеупомянутой теоремы Линделефа, а ее явный вид для приложений несуществен, так как результаты качественного анализа инвариантны выбору координат.

Отличительной особенностью уравнений движения системы (4.1) является независимость величины q_2'' от реакции связи.

На промежутках безударного движения фазовые кривые лежат на поверхностях постоянной механической энергии:

$$h = L_2 - L_0 = \text{const} \quad (4.3)$$

Участки напряжения связи можно представить на фазовой плоскости (q_2, q_2') , изображая на ней кривые (4.3) при значениях $q_1 = q_1' = 0$. Если такая кривая замкнута, целиком лежит в области J^- и не содержит положений равновесия системы, то она описывает такое периодическое движение, для которого связь все время напряжена (на фиг. 3, а к такому типу принадлежит кривая 1). Тем же свойством обладают кривые, соответствующие достаточно близким значениям механической энергии h .

Второй тип периодических движений описывается кривыми (4.3), имеющими общие точки с поверхностью J , но не пересекающимися с J^+ (кривая 2 на фиг. 3, а).

Наконец, третий тип периодических движений соответствует линиям (4.3), пересекающим поверхность J (кривая 3 на фиг. 3, а). В этом случае изображающая точка движется по кривой лишь до тех пор, пока та расположена в области $J^- \cup J$. При пересечении J фазовая кривая покидает плоскость $q_1 = 0$, так что изобразить следующий участок движения на плоскости (q_2, q_2') нельзя. При безударном возобновлении контакта изображающая точка возвращается на плоскость $q_1 = q_1' = 0$, оставаясь на той же поверхности (4.3), а согласно теореме (2.4) она при этом пересекает поверхность J . Заметим, что для существования периодических движений данного типа не требуется, чтобы уравнение (4.3) описывало на плоскости (q_2, q_2') замкнутую кривую, эта кривая лишь должна соединять точки возобновления контакта и его последующего прекращения.

Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма 4.1. Пусть вектор-функции $q(t)$, $x(t)$ удовлетворяют системам дифференциальных уравнений второго порядка

$$q'' = F(q, q'), \quad x'' = F(0, x_2, 0, x_2') \quad (4.4)$$

$$x(t^0) = q(t^0) = q^0, \quad x'(t^0) = q'(t^0) = q'^0$$

$$x, q \in R^2, \quad F \in C_1(\Omega), \quad t^0 \leq t \leq t^0 + \Delta t$$

где $\Omega \subset R^4$ — ограниченная замкнутая область.

Тогда выполняется оценка

$$\|q - x\| = o(\|x_1^0\|) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

$$\|x\| = \max_t [x^2(t) + x_2'^2(t)]^{1/2}$$

Доказательство. Преобразуем уравнения (4.4) к интегральной форме и вычтем одно из другого:

$$q(t) - x(t) = Aq(t) \quad (4.6)$$

$$Aq(t) = \int_{t^0}^t d\tau \int_{t^0}^{\tau} [F(q(s), q'(s)) - F(0, x_2(s), 0, x_2'(s))] ds$$

Считая в (4.6) $x(t)$ известной функцией времени, определим $q(t)$ методом последовательных приближений. Полагая

$$q^0(t) = (0, x_2(t)), \quad q^m(t) = x(t) + Aq^{m-1}(t) \quad (4.7)$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad q(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} q^m(t)$$

можно построить решение уравнения (4.6) в случае, если A — сжатое отображение [9]. Поскольку

$$\|Aq' - Aq''\| \leq C(\Delta t)^2 \|q' - q''\|, \quad C = \max_{\Omega} \|dF\|$$

то условие сжатости выполнено, если величина $\lambda = C(\Delta t)^2$ меньше 1.

Учитывая, что в силу равенств (4.6), (4.7) $q^1 = x$, получим

$$\|q - x\| = \|q - q^1\| = \|Aq - Aq^0\| \leq \lambda \|q - q^0\| \leq \lambda (\|q - x\| + \|q^1 - q^0\|)$$

откуда при учете условия $\lambda = o(\Delta t)$ получаем оценку (4.5).

Применим лемму 4.1 к исследованию уравнений движения системы (4.1). Вспомогательная система, определенная в (4.4), такова:

$$x_1'' = a_{11}^{-1} (\partial L / \partial x_1 - a_1) |_{x_1=x_1^0} \quad (4.8)$$

$$x_2'' = a_{22}^{-1} (\partial L / \partial x_2 - a_2 x_2' - a_2) |_{x_1=x_1^0}$$

Второе из уравнений (4.8) определяет зависимость $x_2(t)$, после его решения можно получить и решение первого уравнения:

$$x_1'' = f(t), \quad x_1' = q_1'^0 + \int_{t^0}^t f(t) dt \quad (4.9)$$

$$x_1 = q_1^0 + (t - t^0) q_1'^0 + \int_{t^0}^t du \int_{t^0}^u f(s) ds$$

Лемма 4.2. Пусть переменная $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = O(\delta) \text{ при } \delta \rightarrow 0, \quad f \in C_1(R)$$

τ — промежуток времени, в течение которого $y > 0$. Тогда справедливы оценки:

1°. Если $f(0) = -c < 0$, то $\tau = O(\delta)$; $y = O(\delta^2)$, $y' = O(\delta)$ при $0 \leq t \leq \tau$ и $y'(\tau) = -y'(0) + O(y'^2(0))$.

2°. Если $f(0) = O(\delta^{1/2}) \geq 0$, $f'(0) = -c_1 < 0$, то $\tau = O(\delta^{1/2})$, $f(\tau) = O(\delta^{1/2}) < 0$, $y'(\tau) = O(\delta)$.

3°. Если $f(0) = O(\delta^{1/2}) < 0$, $f'(0) = -c_1 < 0$, то $\tau = O(\delta^{1/2})$, $y'(\tau) = -2y'(0) - \frac{1}{2}f'(0)\tau + o(\delta)$.

Доказательство. 1°. В данном случае

$$y'' = -c + O(\tau), \quad y' = y'(0) - c\tau + O(\tau^2), \quad y = \tau(y'(0) - \frac{1}{2}c\tau + O(\tau^2))$$

Приравнявая величину y к нулю, получаем $\tau = 2\delta c^{-1} + o(\delta)$, откуда следуют и остальные утверждения.

2°. Соотношения (4.9) в этом случае таковы:

$$\begin{aligned} y'' &= f(0) - c_1\tau + O(\tau^2), \quad y' = y'(0) + \tau f(0) - \frac{1}{2}c_1\tau^2 + O(\tau^3) \\ y &= \tau(y'(0) + \frac{1}{2}\tau f(0) - \frac{1}{6}c_1\tau^2 + O(\tau^3)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Величину τ определяем из уравнения

$$\frac{1}{6}c_1\tau^3 - \frac{1}{2}f'(0)\tau - y'(0) + O(\tau^3) = 0$$

откуда $\tau = O(\delta^{1/2})$, $y'(\tau) = -2y'(0) - \frac{1}{2}\tau f'(0) + O(\tau^2)$ и т. д.

3°. Здесь также справедливы формулы (4.10), в которых уже $f(0) < 0$. Отсюда получаем доказываемые утверждения, а также неравенство

$$y'(\tau) + 2y'(0) > 0 \quad (4.11)$$

Рассмотрим периодические движения первого типа.

Теорема 4.1. Если периодическое движение описывается замкнутой кривой Π , целиком лежащей в области J^- на плоскости $q_1 = q_1' = 0$, то оно орбитально устойчиво.

Доказательство. Утверждение теоремы означает, что для любого положительного числа ε найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что если при $t = t^0$ точка u^0 удалена от Π меньше чем на величину δ , то проходящая через эту точку фазовая кривая для всех $t > t^0$ удалена от Π меньше чем на ε .

Так как $\Pi \subset J^-$, то и $u^0 \in J^-$ для достаточно малых δ , поэтому через промежуток времени порядка δ фазовая кривая пересекает плоскость $q_1 = 0$. В случае, если $\kappa = 0$, изображающая точка останется в этой плоскости (случай 5°, б), двигаясь по одной из замкнутых кривых (4.3), которая переходит в Π при $\delta \rightarrow 0$.

Если $0 < \kappa < 1$, то удар при $t = t_1$ приводит к последующему ослаблению связи (случай 4°, б) и повторным ударами. Пусть величина v_k равна значению q_1' после k -го удара. Тогда применяя лемму 4.2 (случай 1°) получим, что перед $(k+1)$ -м ударом величина $y^0 = x_1^0$ будет равна $-v_k + O(v_k^2)$. Отсюда по лемме 4.1 имеем $v_{k+1} = \kappa v_k + O(v_k^2)$ и для достаточно малых начальных возмущений δ получаем неравенство

$$v_{k+1} \leq \kappa' v_k, \quad \kappa \leq \kappa' < 1 \quad (4.12)$$

Следовательно, повторные удары затухают за время порядка δ (см. [4]), при этом суммарная диссипация энергии также стремится к нулю вместе с δ . После затухания ударов изображающая точка будет лежать на замкнутой кривой Π^* в плоскости $q_1 = q_1' = 0$, сливающейся с Π при $\delta \rightarrow 0$.

Перейдем к рассмотрению третьего типа периодических безударных движений. Пусть траектория Π складывается из двух частей:

а) часть кривой между точками P_1 и P_2 описывается на фазовой плоскости (q_2, \dot{q}_2) соотношением (4.3):

б) часть кривой между точками P_1 и P_2 не лежит в плоскости $q = q_1 = 0$, она описывается формулами

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(h, t), \quad \mathbf{u}(h, 0) = P_1, \quad \mathbf{u}(h, T) = P_2, \quad \mathbf{u} = (q, \dot{q}) \quad (4.13)$$

(см. фиг. 5). В соответствии с теоремами 2.2, 2.4 точки P_1 и P_2 лежат на поверхности отрыва J .

Теорема 4.2. Пусть выполнены следующие условия.

1°. Кривая Π в точках P_1 и P_2 пересекает поверхность под ненулевым углом.

2°. В формуле (4.13) $\partial q_1(h, T)/\partial h \neq 0$.

3°. Коэффициент восстановления κ меньше $1/2$.

Тогда траектория Π полуустойчива, т. е. лежит на границе областей притяжения и отталкивания в фазовом пространстве R^4 .

Доказательство. При выполнении условий теоремы траектория возмущенного движения Π^* пересекает плоскость $q_1 = 0$ в некоторой точке P_2^* , близкой к P_2 (не обязательно $P_2^* \in J$, см. фиг. 5). Предшествующее удару движение описывается первой из формул (4.13). Как следует из теоремы 2.4 и условия 2°, в окрестности точки P_2 уравнение $q_1(h, T) = 0$ можно записать в виде

$$q_1(h, T) = b\Delta h + e(\Delta T)^3 + o(|\Delta h| + |\Delta T|^3) = 0 \quad (4.14)$$

$$b = \frac{\partial q_1(h, T)}{\partial h} \neq 0, \quad e = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 q_1(h, T)}{\partial t^3} < 0$$

Решая уравнения (4.14), получим оценку

$$\Delta T = -b^{1/3}e^{-1/3}\mu + o(\mu), \quad \mu = (h^* - h)^{1/3} \quad (4.15)$$

где h^* — энергия возмущенной системы на участке перелета. Дифференцируя равенство (4.14) по времени, получим при учете (4.15)

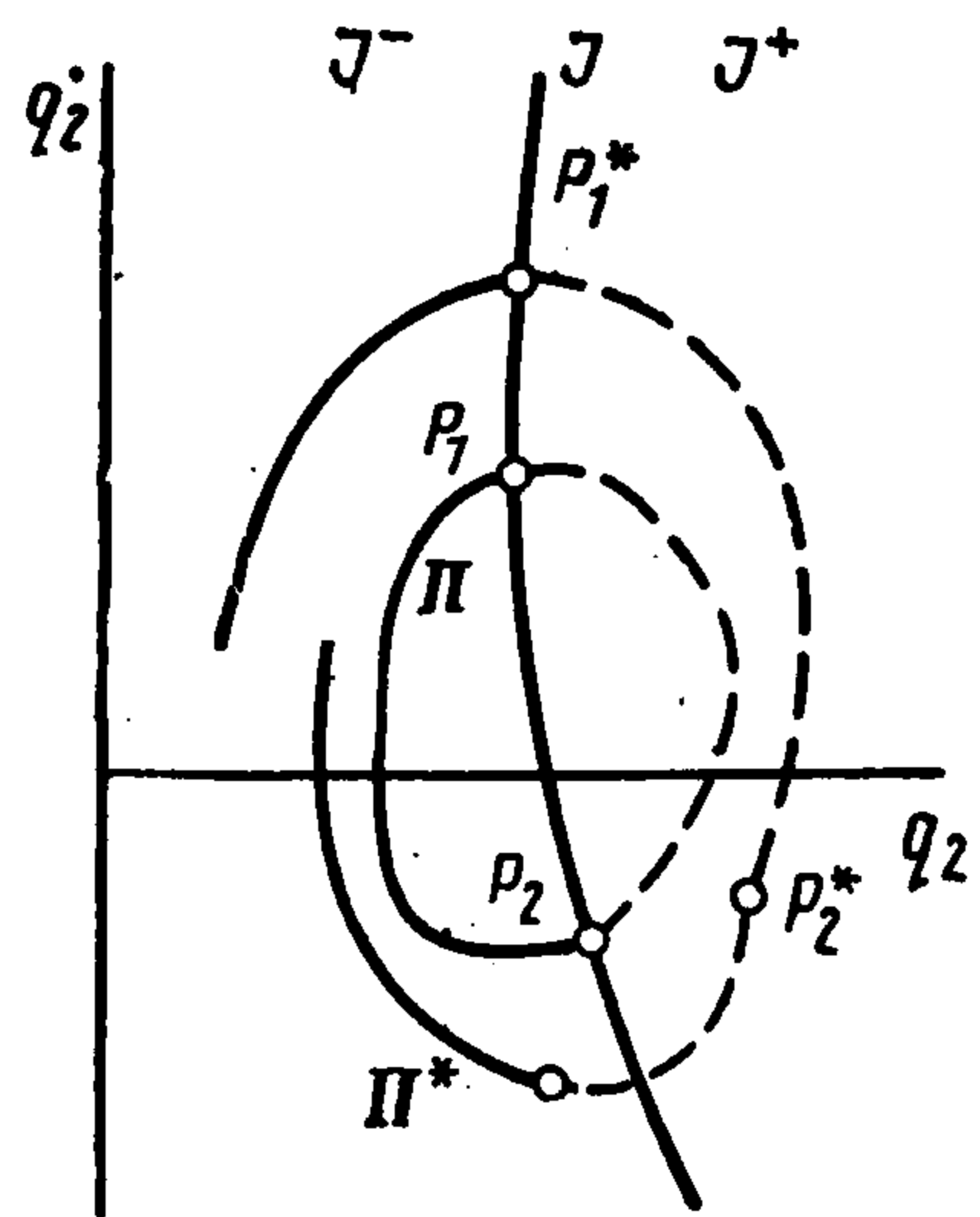
$$\dot{q}_1(h, T) = 3e(\Delta T)^2 + o(\Delta T)^2 = 3b^{2/3}e^{2/3}\mu^2 + o(\mu^2) \quad (4.16)$$

$$\Delta h_1 = 1/2(1 - \kappa^2) a_{11} \dot{q}_1^{-2}(h, T) = 1/2(1 - \kappa^2) a_{11} b^{4/3} e^{2/3} \mu^4 + o(\mu^4)$$

где Δh_1 — диссипация энергии при ударе в точке P_2^* .

Послеударное движение изображающей точки зависит от величины κ , а также от расположения точки P_2^* по отношению к поверхности J . Если $\kappa = 0$, $P_2^* \in J^- \cup J$, то после удара (случай 5°, б) изображающая точка продолжит движение в плоскости $q_1 = q_1 = 0$ до следующего пересечения с поверхностью J в окрестности точки P_1 , затем после перелета следует удар в некоторой точке P_2^{**} , лежащей в окрестности P_2 и т. д. Вышеупомянутые области притяжения и отталкивания задаются в окрестности Π неравенствами

$$h^* > h + \Delta h_1, \quad h^* < h \quad (4.17)$$



Фиг. 5

где величина Δh_1 определена в (4.16): в первом приближении условие притяжения имеет вид

$$h < h^* < h + \frac{8}{729} a_{11}^{-3} b^{-4} e^{-2} \quad (4.18)$$

В случае $\kappa = 0$, $P_2^* \in J^+$ изображающая точка после удара покидает фазовую плоскость (q_2, q_2') (случай 4°, в): так как движение по траектории Π происходит с ненулевой скоростью в сторону области J^- , то можно применить второе утверждение леммы 4.2. В результате получим, что система совершит перелет продолжительностью $\tau = O(\delta^{1/2}) = O(\mu)$, в конце которого величина $y' = x_1'$ будет порядка $O(\mu^2)$. В силу леммы 4.1 того же порядка будет и величина q_1' , причем изображающая точка попадет в область J^- .

Диссипация энергии при втором ударе Δh_2 будет величиной порядка μ^4 , а затем движение продолжается в плоскости (q_2, q_2') . Следовательно, и в этом случае область притяжения, задаваемая неравенством

$$h^* > h + \Delta h_1 + \Delta h_2$$

непуста.

Аналогично разбирается случай $\kappa \in (0, 1/2)$. В этом случае возмущенная траектория Π^* состоит из участков, лежащих на фазовой плоскости (q_2, q_2^*) , сменяющихся перелетами при пересечении поверхности J и сериями повторных затухающих ударов в окрестности точки P_2 . Затухание ударов за время порядка δ доказывается так же, как в теореме 4.3, при этом условие затухания (4.12) при $\kappa < 1/2$ следует из неравенства (4.11). Суммарная диссипация энергии при квазипластическом ударе

$$\Delta h_\Sigma = \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots$$

оказывается величиной порядка μ^4 , так что область притяжения

$$h^* > h + \Delta h_\Sigma$$

и в этом случае непуста, а область отталкивания описывается вторым из неравенств (4.17).

Пример 4.1. Для двухмассового прыгуна периодические безударные движения первого типа описываются кривыми (2.6), целиком лежащими в полосе $0 < q_2 < q_2^J$ (по физическому смыслу, $q_2 > 0$). По теореме (4.3) эти движения орбитально устойчивы.

Движения третьего типа задаются условиями (3.6); при учете неравенства $q_2 > 0$ заключаем, что число таких движений конечно и зависит от параметров системы. Значениям $h^* > h$ соответствует $\Delta\alpha > 0$, как следует из формул (3.4), при этом точка P_2^* лежит в области J^- . Область притяжения в случае $\kappa = 0$ задается неравенством (4.18), откуда при учете формул (3.4)–(3.8) получаем

$$\Delta\alpha < \frac{2M^6}{81\alpha^3 m_1^3 m_2^3 \sin^8 \alpha}$$

(часть области притяжения, лежащая на фазовой плоскости, заштрихована на фиг. 3, б).

Пример 4.2 Функция Лагранжа связки двух тел на спутниковой орбите такова [12]:

$$L = 1/2 (r'^2 + r^2 \varphi'^2) - r^2 \varphi + 3/2 r^3 \sin^2 \varphi, \quad r \leq 1$$

а поверхность отрыва задается уравнением

$$\varphi'^2 - 2\varphi + 3 \sin^2 \varphi = 0$$

(знак «больше» в этом неравенстве соответствует области J^-).

Формулы (3.4), описывающие фазу полета, имеют вид

$$\begin{aligned}\eta &= r \sin \varphi = B_0 + B_2 \cos t + B_3 \sin t \\ \zeta &= r \cos \varphi = A_0 - \frac{3}{2}B_0 t + 2B_3 \cos t - 2B_2 \sin t \\ A_0 &= \zeta_0 - 2\eta_0, \quad B_0 = 2(2\eta_0 + \zeta_0), \quad B_2 = -3\eta_0 - 2\zeta_0, \quad B_3 = \eta_0\end{aligned}$$

Периодические движения с безударными перелетами можно построить, полагая

$$\eta(T) = \eta_0, \quad \zeta(T) = -\zeta_0, \quad \eta'(T) = -\eta_0, \quad \zeta'(T) = \zeta_0$$

откуда получим условия

$$B_3 \cos \frac{1}{2}T = B_2 \sin \frac{1}{2}T, \quad A_0 = \frac{3}{4}B_0 T \quad (4.19)$$

Уравнения (4.19) имеют бесчисленное множество решений; им соответствуют, в терминологии данной статьи, периодические движения третьего типа. Эти движения были получены и исследованы [2] численно при $\kappa = 0$. В итоге был сделан вывод о возможности их реализации лишь на множестве начальных условий нулевой меры.

Результаты теоремы 4.2 свидетельствуют о существовании в случае $0 \leq \kappa \leq \frac{1}{2}$ области притяжения для каждого из периодических движений. Необнаружение этих областей при численном анализе в данном случае можно объяснить недостаточной точностью вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schiehlen W., Gao J. Simulation des Stossfreien Hüpfens // ZAMM. 1989. Bd. 69. H. 5. S. 302—303.
2. Белецкий В. В. Об относительном движении связки двух тел на орбите // Космич. исследования. 1969. Т. 7. № 6. С. 827—840.
3. Сулов Г. К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 655 с.
4. Нагаев Р. Ф. Механические процессы с повторными затухающими соударениями. М.: Наука, 1985. 200 с.
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
6. Иванов А. П. Об устойчивости в системах с неударивающими связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 725.
7. Иванов А. П. О сохранении устойчивости механической системы при ослаблении неударивающей связи // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 539—548.
8. Иванов А. П., Маркеев А. П. О динамике систем с односторонними связями // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 632—636.
9. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.X.1990