Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 531.35

© 1992 г. О. В. Холостова

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО ЧАСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С УПРУГОВЯЗКОЙ МЕМБРАНОЙ НА КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

Рассматривается система, состоящая из несущего твердого тела и упруговязкой круглой мембраны, закрепленной в теле по своему контуру; в недеформированном состоянии система динамически симметрична, причем ось симметрии ортогональна плоскости мембраны. Движение происходит в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите. Исследование проводится в рамках линейной теории упругости. В предположении, что мембрана достаточно жесткая и диссипативные силы малы по сравнению с упругими силами, рассматривается квазистатический режим движения системы. Найдено частное движение системы, когда плоскость мембраны расположена параллельно плоскости орбиты, а система равномерно вращается вокруг оси симметрии с произвольной по величине угловой скоростью. Исследована устойчивость этого движения. Установлено, что наличие в системе упруговязкой мебраны по сравнению с соответствующими результатами для симметричного спутника — твердого тела приводит к сужению областей устойчивости и к возникновению асимптотической устойчивости по части переменных.

1. Рассмотрим систему, состоящую из несущего твердого тела и упруговязкой круглой мембраны, закрепленной в теле по своему контуру. Ось симметрии мембраны совпадает с одной из главных центральных осей инерции системы в недеформированном состоянии и является также осью ее динамической симметрии.

Предполагаем, что система движется в центральном ньютоновском гравитационном поле на круговой орбите и ее движение относительно центра масс не влияет на движение самого центра масс.

Пусть $Ox_1y_1z_1$ и $Gxyz$ — две системы координат с началом соответственно в центре масс O недеформированной и в центре масс G деформированной систем и осями, направленными вдоль и параллельно ее главным центральным осям инерции в недеформированном состоянии. Считаем, что ось z_1 направлена по оси симметрии мембраны.

В рамках линейной теории упругости была получена [1] система уравнений движения рассматриваемой системы (несущее тело и мембрана), когда ее тензор инерции произволен. Часть этих уравнений, описывающая движение системы как целого относительно центра масс (уравнения движения трехгранника $Gxyz$), в случае динамической симметрии имеет вид (всюду далее суммирование ведется от $m = 1$ до $m = \infty$)

$$[A\omega_1^{\cdot} + (C - A)\omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2 (C - A)\gamma_2\gamma_3] + 2l \sum b_m q_{m0}' \times$$
$$\times [\omega_1^{\cdot} - \omega_2\omega_3 + 3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3] + 2l\omega_1 \sum b_m q_{m0}^{\cdot\prime} +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum a_m q_{m1}' [-\dot\omega_3 - \omega_1\omega_2 + 3\omega_0^2\gamma_1\gamma_2] + \sum a_m \ddot q_{m1}'' + \\
&\quad + \sum a_m q_{m1}'' [(\omega_3^2 - \omega_2^2) - 3\omega_0^2 (\gamma_3^2 - \gamma_2^2)] = 0
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&[A\dot\omega_2 - (C - A)\omega_1\omega_3 + 3\omega_0^2 (C - A)\gamma_1\gamma_3] + 2l \sum b_m q_{m0}' \times \\
&\quad \times [\dot\omega_2 + \omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3] + 2l\omega_2 \sum b_m \dot q_{m0}' - \\
&- \sum a_m \ddot q_{m1}' + \sum a_m q_{m1}' [(\omega_1^2 - \omega_3^2) - 3\omega_0^2 (\gamma_1^2 - \gamma_3^2)] + \\
&\quad + \sum a_m q_{m1}'' [-\dot\omega_3 + \omega_1\omega_2 - 3\omega_0^2\gamma_1\gamma_2] = 0
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&C\dot\omega_3 + \sum a_m q_{m1}' [\dot\omega_1 - \omega_2\omega_3 + 3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3] - 2\omega_1 \sum a_m \dot q_{m1}' - \\
&- \sum a_m q_{m1}'' [\dot\omega_2 + \omega_1\omega_3 - 3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3] - 2\omega_2 \sum a_m \dot q_{m1}'' = 0
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Здесь A и C — моменты инерции недеформированной системы относительно осей Ox_1 и Oz_1, ω_1, ω_2, ω_3 и γ_1, γ_2, γ_3 — проекции на оси Gx, Gy, Gz абсолютной угловой скорости $\boldsymbol\omega$ трехгранника $Gxyz$ и единичного вектора $\boldsymbol\gamma$, направленного по радиусу-вектору центра масс G относительно притягивающего центра, ω_0 — среднее движение центра масс по орбите. Обобщенные координаты q_{m0}', q_{m1}', q_{m1}'' $(m = 1, 2, \ldots)$ описаны в [1]. Коэффициенты a_m и b_m вычисляются по формулам

$$
a_m = \pi\sigma c_{m1} \int_0^a J_1 (k_{m1}\rho)\, \rho^2 \,d\rho, \quad b_m = 2\pi c_{m0}\sigma \int_0^a J_0 (k_{m0}\rho)\, \rho \,d\rho \quad (m = 1, 2, \ldots)
$$

где a — радиус мембраны, σ — ее поверхностная плотность, $J_n (k_{mn}\rho)$ — функция Бесселя n-го порядка, параметр k_{mn} — m-й корень уравнения $J_n (ka) = 0$, а величины c_{mn} имеют вид $c_{mn} = (\pi\sigma a^2 J_n'^2 (k_{mn}a)/2)^{-1/2}$ $(n = 0, 1;\ m = 1, 2, \ldots)$. Через l в (1.1), (1.2) обозначено расстояние от центра масс O до центра недеформированной мембраны.

2. Будем рассматривать квазистатический режим движения системы [2, 3], когда упругие колебания мембраны являются вынужденными под действием гравитационных сил и сил инерции. Считаем, что характерное время затухания свободных упругих колебаний мембраны много больше характерного периода упругих колебаний, но много меньше периода T_0 обращения центра масс по орбите. При выполнении этих допущений значения обобщенных координат q_{m0}', q_{m1}', q_{m1}'' $(m = 1, 2, \ldots)$ вычисляются по формулам [1]

$$
q_{mn} = \frac{\varepsilon^2}{\lambda_{mn}^2} [Q_{mn} - 2\chi b \dot Q_{mn}] + O(\varepsilon^4) \qquad (n = 0, 1;\ m = 1, 2, \ldots)
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{m0}' &= b_m l\, [\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_0^2 (1 - 3\gamma_3^2)] \\
Q_{m1}' &= a_m [\dot\omega_2 - \omega_1\omega_3 + 3\omega_0^2\gamma_1\gamma_3] \\
Q_{m1}'' &= -a_m [\dot\omega_1 + \omega_2\omega_3 - 3\omega_0^2\gamma_2\gamma_3]
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Здесь $\varepsilon = \omega_0/\Omega_1$ — малый параметр (полагаем $T_0 \sim 1$), Ω_1 — наименьшая частота свободных упругих колебаний мембраны; χ — безразмерный параметр и b — положительная постоянная, входящие в диссипативную функцию Релея [1]. В силу перечисленных допущений между параметрами ε и χ имеют место неравенства $0 < \chi \ll \varepsilon \ll 1$; при получении (2.1) предполагалось, что $\chi \sim \varepsilon^{\delta+1}$ $(0 < \delta < 1)$. Величина λ_{mn} в (2.1) равна

$\lambda_{mn} = \varepsilon\omega_{mn}$, где ω_{mn} — соответствующая частота свободных упругих колебаний мембраны; последняя связана с параметром k_{mn} соотношением $\omega_{mn} = ak_{mn}$ $(n = 0, 1;\ m = 1, 2, \ldots)$.

3. Введем орбитальную систему координат $GXYZ$, оси GX, GY и GZ которой направлены соответственно по трансверсали к орбите, по бинормали и вдоль радиуса-вектора центра масс G относительно притягивающего центра. Ориентацию системы координат $Gxyz$ относительно $GXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ.

Положим в уравнениях (1.1)—(1.3) $\omega_1 = \omega_0 p$, $\omega_2 = \omega_0 q$, $\omega_3 = \omega_0 \beta$, введем параметр $\alpha = C/A$ и перейдем к новой независимой переменной $\tau = \omega_0 t$. Используя кинематические соотношения (точкой по-прежнему обозначаем дифференцирование по независимой переменной)

$$\begin{gathered}\gamma_1 = \sin\varphi\sin\theta,\ \gamma_2 = \cos\varphi\sin\theta,\ \gamma_3 = \cos\theta\\ p = \psi^{\cdot}\sin\theta\sin\varphi + \theta^{\cdot}\cos\varphi + \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta\\ q = \psi^{\cdot}\sin\theta\cos\varphi - \theta^{\cdot}\sin\varphi - \sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta \qquad (3.1)\\ \beta = \psi^{\cdot}\cos\theta + \varphi^{\cdot} - \cos\psi\sin\theta\end{gathered}$$

уравнения (1.1)—(1.3) можно записать в углах Эйлера. Умножая первое из полученных при этом уравнений на $\sin\varphi$, второе на $\cos\varphi$ и складывая их, а также умножая первое из них на $\cos\varphi$, второе на $-\sin\varphi$ и складывая, оставив третье уравнение без изменений, будем иметь систему уравнений

$$\begin{gathered}(1 + P_0)[\psi^{\cdot\cdot}\sin\theta + 2\psi^{\cdot}\theta^{\cdot}\cos\theta - \theta^{\cdot} l_4 - l_3\sin\psi] -\\ - (\alpha - 1 - P_0)\beta l_1 + P_0^{\cdot} l_2 - P_2^{**} + P_1(-\beta^{\cdot} + l_1 l_2) +\\ + P_2(-\beta^2 + 3\cos^2\theta + l_1^2) = 0\\ (1 + P_0)[\theta^{\cdot\cdot} - \psi^{\cdot 2}\sin\theta\cos\theta + \psi^{\cdot} l_4\sin\theta + l_3\cos\psi\cos\theta] +\\ + (\alpha - 1 - P_0)(\beta l_2 - 3\sin\theta\cos\theta) + P_0^{\cdot} l_1 + P_1^{**} +\\ + P_1(\beta^2 - 3\cos 2\theta - l_2^2) - P_2(\beta^{\cdot} + l_1 l_2) = 0 \qquad (3.2)\\ \beta^{\cdot} + P_2^{\cdot}(\beta l_2 - 3\sin\theta\cos\theta) - P_1 l_1 - 2(P_1^* l_2 + P_2^* l_1)/\alpha = 0\\ l_1 = \theta^{\cdot} + \sin\psi,\ l_2 = \psi^{\cdot}\sin\theta + \cos\psi\cos\theta,\ l_3 = \beta + \cos\psi\sin\theta\\ l_4 = l_3 + \cos\psi\sin\theta,\ P_0 = 2l\sum b_m q_{m0}'/A\\ P_1 = \sum(a_m q_{m1}'\sin\varphi + q_{m1}''\cos\varphi)/A,\ P_2 = \sum(a_m q_{m1}'\cos\varphi - q_{m1}''\sin\varphi)/A\\ P_1^* = \sum(a_m q_{m1}^{\cdot\prime}\sin\varphi + q_{m1}^{\cdot\prime\prime}\cos\varphi)/A,\ P_2^* = \sum(a_m q_{m1}^{\cdot\prime}\cos\varphi -\\ - q_{m1}^{\cdot\prime\prime}\sin\varphi)/A\\ P_1^{**} = \sum(a_m q_{m1}^{\cdot\cdot\prime}\sin\varphi + q_{m1}^{\cdot\cdot\prime\prime}\cos\varphi)/A,\ P_2^{**} = \sum(a_m q_{m1}^{\cdot\cdot\prime}\cos\varphi -\\ - q_{m1}^{\cdot\cdot\prime\prime}\sin\varphi)/A\end{gathered}$$

которая после подстановки в нее при помощи (2.1) значений обобщенных координат q_{m0}', q_{mi}', q_{mi}'' $(i = 1, 2, \ldots)$ и их производных описывает движение рассматриваемой системы (несущее тело и мембрана) как целого относительно центра масс. В дальнейшем в этих уравнениях будем пренебрегать величинами порядка ε^4 и выше.

Используя выражения

$$Q_{m0}' = b_m l\omega_0^2 [\psi^{\cdot 2} \sin^2\theta + \theta^{\cdot 2} + 2\psi^{\cdot} \sin\theta\cos\theta\cos\psi + 2\theta^{\cdot}\sin\psi -$$
$$- \cos^2\psi \sin^2\theta + 3\cos^2\theta]$$

$$\dot{q}_{m1}\sin\varphi + \ddot{q}_{m1}\cos\varphi = \frac{a_m\omega_0^2(2-\alpha)\varepsilon^2}{\lambda_{m1}^2}\{(3\sin\theta\cos\theta - \beta l_2) +$$
$$+ 2\omega_0\chi b[\beta^2(\alpha-1)l_1 - 3\theta^{\cdot}\cos 2\theta]\} \tag{3.3}$$
$$\dot{q}_{m1}\cos\varphi - \ddot{q}_{m1}\sin\varphi = \frac{a_m\omega_0^2(2-\alpha)\varepsilon^2}{\lambda_{m1}^2}\{-\beta l_1 + 2\omega_0\chi b[3\beta(\alpha-2)\sin\theta\cos\theta -$$
$$-\beta^2(\alpha-1)l_2 + 3\sin\theta\cos\theta(\psi^{\cdot}\cos\theta - \cos\psi\sin\theta)]\}$$

полученные из (2.1), (3.1) и уравнений (3.2) (с указанной подстановкой) при $\varepsilon = 0$, а также операцию дифференцирования, можно показать, что левые части равенств (3.2) не содержат угол φ.

4. Из (2.1), (3.2) и (3.3) следует, что уравнения движения системы как целого допускают в квазистатическом режиме частное решение

$$\psi = \pi, \quad \theta = \pi/2, \quad \beta = \beta_0 = \text{const} \tag{4.1}$$

которое соответствует такому движению системы, когда плоскость мембраны расположена параллельно плоскости орбиты, а система равномерно вращается вокруг оси симметрии мембраны с произвольной по величине угловой скоростью.

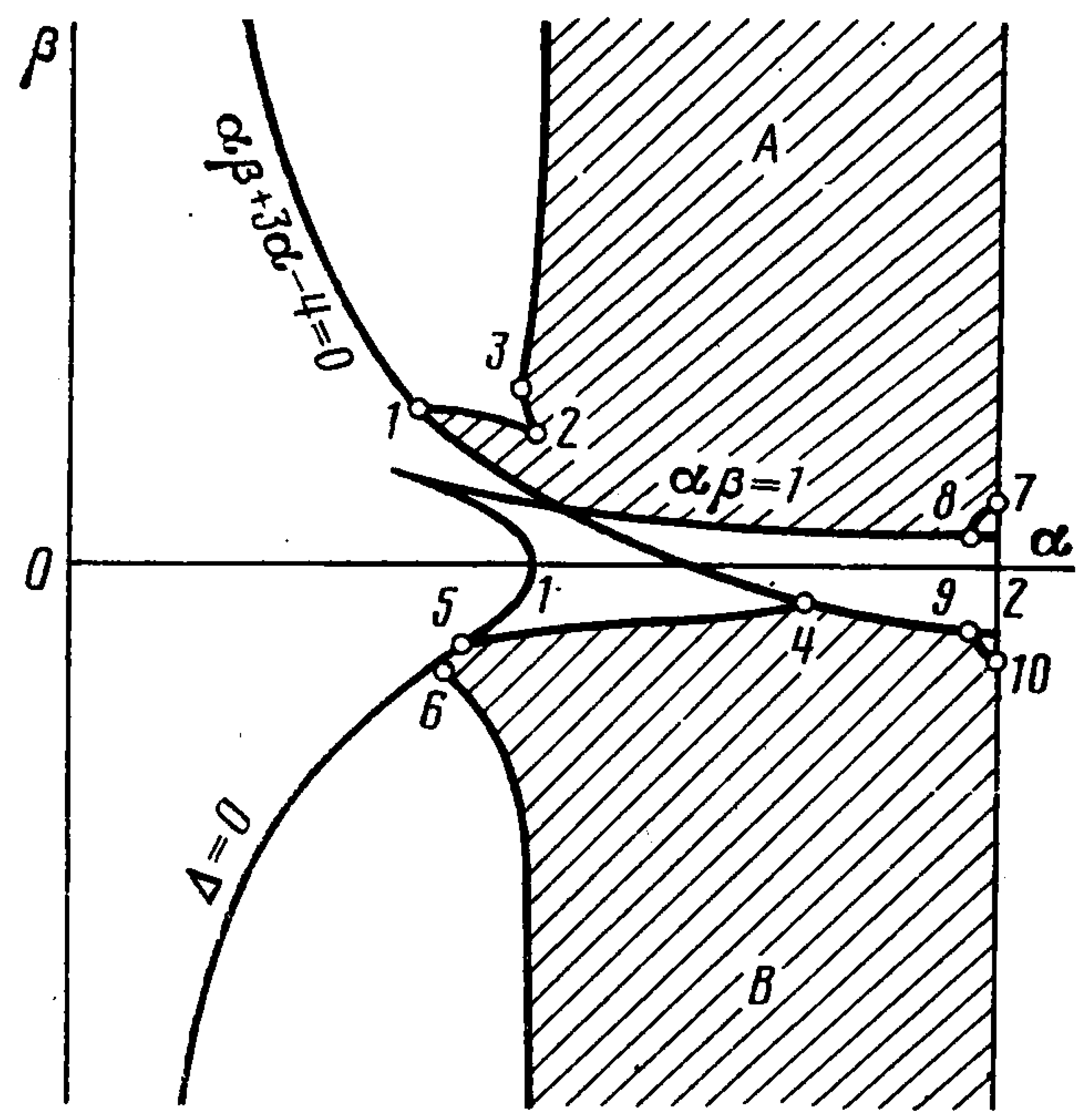
Исследуем устойчивость этого частного решения по отношению к возмущениям величин ψ, θ, $\psi^{\cdot}$, $\theta^{\cdot}$, β, полагая $\psi = \pi + x_1$, $\theta = \pi/2 + x_2$, $\beta = \beta_0 + x_3$. Характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений (3.2), полученной при учете соотношений (3.3), записывается в виде

$$\lambda(a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4) = 0 \tag{4.2}$$
$$a_0 = 1 + O(\varepsilon^2), \quad a_2 = \alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha - 1 + O(\varepsilon^2)$$
$$a_4 = (\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 3\alpha - 4) + O(\varepsilon^2)$$
$$a_1 = Lb_1, \quad a_3 = Lb_3, \quad L = 2\varkappa_1 b\omega_0^3(2-\alpha)\varepsilon^2\chi/A > 0$$
$$b_1 = 2(\alpha-1)\beta^4 + 3(2-\alpha)[(\alpha+1)\beta^2 - 2\beta + 3]$$
$$b_3 = 2(\alpha+2)\beta^4 - 6(4-\alpha)\beta^3 + 3(3-\alpha)(\alpha+2)\beta^2 + 3(2-\alpha)\times$$
$$\times(3\alpha-2)\beta - 9(2-\alpha), \quad \varkappa_1 = \sum a_m^2/\lambda_{m1}^2$$

Оно имеет один нулевой и две пары комплексно-сопряженных корней.

В случае симметричного спутника — твердого тела ($\varepsilon = 0$) в плоскости параметров (α, β) имеются две области (фигура) A и B, где комплексные корни уравнения (4.2) чисто мнимые. Эти области ограничены кривыми $\alpha\beta = 1$, $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$, $\Delta = (\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha - 1)^2 - 4(\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 3\alpha - 4) = 0$, проведенными жирными линиями, и задаются системами неравенств: $\alpha\beta > 1$, $\alpha\beta + 3\alpha - 4 > 0$, $\Delta > 0$ для области A и $\alpha\beta < 1$, $\alpha\beta + 3\alpha - 4 < 0$, $\Delta > 0$ для области B. Как показывают исследования соответствующей нелинейной задачи [4—6], в области A рассматриваемое частное решение устойчиво, в области B устойчивость имеет место всюду, за исключением двух участков кривой резонанса четвертого порядка и, возможно, еще одной точки области. За пределами областей A и B характеристическое уравнение (4.2) (при $\varepsilon = 0$) имеет пару корней с положительной вещественной частью, и решение (4.1) неустойчиво.

При малых, но отличных от нуля значениях ε уравнение (4.2) вне областей A и B также будет иметь пару корней с положительной вещественной частью, и решение (4.1) неустойчиво. Рассмотрим вопрос об устойчивости этого решения в областях A и B.



Анализируя структуру уравнений (3.2) при учете (2.1), (3.3), можно показать, что имеющий здесь место критический случай является особенным [7], что позволяет применить теорему Ляпунова — Малкина. При выполнении условий критерия Рауса — Гурвица

$$b_1 > 0,\ b_3 > 0,$$
$$b_3 (b_1 a_2 - a_0 b_3) - a_4 b_1^2 > 0 \qquad (4.3)$$

вещественные части комплексных корней уравнения (4.2) отрицательны, и решение (4.1) при достаточно малых ε устойчиво относительно переменных ψ, θ, $\psi^\bullet$, $\theta^\bullet$, β, причем относительно переменных ψ, θ, $\psi^\bullet$, $\theta^\bullet$ имеет место асимптотическая устойчивость.

Исследование неравенств (4.3) в областях A и B проводилось на ЭВМ. Полученные области устойчивости указаны на фигуре штриховкой.

Кривая внутри области A, разделяющая области устойчивости и неустойчивости, пересекается с гиперболой $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$ в точке 1 с координатами (0,7335; 2,4533), имеет точку возврата 2 (1; 2), вертикальную касательную в точке 3 (0,9714; 2,4457) и вертикальную асимптоту $\alpha = 1$ при $\beta \to +\infty$. Кривая, являющаяся границей области устойчивости внутри области B, также имеет вертикальную асимптоту $\alpha = 1$ при $\beta \to -\infty$; она пересекается с гиперболой $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$ в точке 4 (1,5846; —0,4757), касается кривой $\Delta = 0$ в точке 5 (0,8235; —1,2313) и имеет вертикальную касательную в точке 6 (0,8047; —1,439). Вблизи границы $\alpha = 2$ областей A и B в окрестности соответственно кривых $\alpha\beta = 1$ и $\alpha\beta + 3\alpha - 4 = 0$ имеются небольшие области неустойчивости. Координаты их характерных точек, указанных на фигуре, таковы: точка 7 (2; 1), точка 8 (1,9529; 0,5121); точка 9 (1,9737; —0,9733), точка 10 (2; —1,1083).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Холостова О. В.* О движении твердого тела с упруговязкой мембраной в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1992. № 1. С. 3—13.
2. *Черноусько Ф. Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34—42.
3. *Маркеев А. П.* К динамике упругого тела в гравитационном поле // Космич. исследования. 1989. Т. 27. Вып. 2. С. 163—175.
4. *Черноусько Ф. Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 155—157.
5. *Маркеев А. П.* Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космич. исследования. 1967. Т. 5. Вып. 3. С. 365—375.
6. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости одного случая регулярной прецессии твердого тела в центральном гравитационном поле // Науч. тр. МАИ. 1978. № 460.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Москва

Поступила в редакцию 19.III.1991