Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 531.36 : 534.1

© 1992 г. А. В. Печенев

ОБ ОСРЕДНЕНИИ СИСТЕМ С ИЕРАРХИЕЙ СКОРОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ФАЗ

Рассматривается система обыкновенных уравнений с вращающимися фазами, частоты (скорости вращения) которых составляют иерархию по степеням малого параметра, а также более сложная, дополнительно содержащая в правых частях слагаемые «с нулевым средним» (при осреднении вдоль траекторий быстрых движений). Описывается схема последовательного использования стандартной процедуры отделения «наиболее быстрых» переменных с определенной степенью точности по малому параметру. Устанавливается степень соответствия между решениями точных и осредненных таким образом уравнений на асимптотически большом интервале времени, на котором «самая медленная» переменная получает приращение порядка единицы.

Подобные системы уравнений с иерархией частот возникают как в силу постановки задачи [1, 2], так и вследствие подчеркнутой в [3, 4] специфики рассмотрения случая простого резонанса в существенно нелинейной системе: при осреднении вдоль резонансных траекторий обнаруживается гамильтоновость уравнений первого приближения (обнаружено для частного случая в [5]). Это ведет к «расслоению» движений на иерархию по скоростям более сложную, чем традиционное разделение на быстрые и медленные.

Эффективность используемого подхода в резонансных случаях определяется тем, что редукция исходной системы оказывается не меньшей, чем в нерезонансном случае. В то же время при традиционном подходе «исследование резонансного случая всегда приводит к осредненным системам более высокой размерности» [6].

Предлагаемая схема осреднения нуждается в обосновании как единого целого, так как применимость отдельных «ступеней» осреднения на достаточном асимптотически большом интервале времени неочевидна. Именно, осреднение по «самой быстрой» переменной (названное в [4] «частичным») обосновывается [6] лишь на интервале времени, недостаточном для приращения «самой медленной» переменной на величину порядка единицы.[1]

Обоснование последовательности осреднений как единого целого приведено [7] для случая иерархии, состоящей из двух вращающихся фаз. Приведенное в [4, 8] обоснование отличается от предлагаемого в работе.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений, в которой частоты (скорости вращения фаз) составляют иерархию по степеням положительного малого параметра ε:

$$x^{\cdot} = \varepsilon^n X, \quad \alpha_{n-1}^{\cdot} = \varepsilon^{n-1} A_{n-1}, \ \ldots, \quad \alpha_0^{\cdot} = A_0 \tag{1.1}$$

где функции X, $A_{n-1}, \ldots, A_0$ вещественных аргументов x, $\alpha_{n-1}, \ldots$ $\ldots, \alpha_0$, ε, определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ в некоторой области D изменения аргумента x, 2π-периодичны по аргументам $\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0$. Функции, стоящие в правых частях (1.1), равномерно относительно x из D и ε из $[0, \varepsilon_0]$ n раз дифференцируемы по x, i раз дифференцируемы по α_i ($i =$

$= n - 1, \ldots, 1$), а также измеримы по α_0. Кроме того, функции A_i равномерно относительно x из D и ε из $[0, \varepsilon_0]$ отделены от нуля.

Строится последовательность из n замен переменных, каждая из которых приводит к отделению уравнения для очередной (в порядке убывания частоты вращения) фазы. Зависимость правых частей остающихся уравнений от отделяемых фаз сохраняется лишь в малых членах порядка ε^{m+1} для самой медленной переменной и порядка $\varepsilon^{m-n+i+1}$ для вращающейся фазы с номером i. Здесь $m \geqslant n$ в конечном итоге определяет точность окончательной осредненной системы.

Например, k-я замена переменных ($k = 1, \ldots, n$)

$$y = z + \varepsilon^{n-k+1}u_n, \quad \beta_{n-1} = \gamma_{n-1} + \varepsilon^{n-k}u_{n-1}, \ \ldots, \quad \beta_k = \gamma_k + \varepsilon u_k \tag{1.2}$$

где u_i ($i = n, \ldots, k$) — равномерно относительно z из D и ε из $[0, \varepsilon_0]$ ограниченные функции от $z, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_{k-1}, \varepsilon$, приводят систему уравнений

$$\begin{aligned}
y^{\cdot} &= \varepsilon^n Y(y, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_{k-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}E_n \\
\beta_{n-1}^{\cdot} &= \varepsilon^{n-1}B_{n-1}(y, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_{k-1}, \varepsilon) + \varepsilon^m E_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\beta_k^{\cdot} &= \varepsilon^k B_k(y, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_{k-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m-n+k+1}E_k \\
\beta_{k-1}^{\cdot} &= \varepsilon^{k-1}B_{k-1}(y, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_{k-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m-n+k}E_{k-1}
\end{aligned}$$

к эквивалентной

$$\begin{aligned}
z^{\cdot} &= \varepsilon^n Z(z, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_k, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}F_n \\
\gamma_{n-1}^{\cdot} &= \varepsilon^{n-1}\Gamma_{n-1}(z, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_k, \varepsilon) + \varepsilon^m F_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_k^{\cdot} &= \varepsilon^k \Gamma_k(z, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_k, \varepsilon) + \varepsilon^{m-n+k+1}F_k \\
\beta_{k-1}^{\cdot} &= \varepsilon^{k-1}\Gamma_{k-1}(z, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_k, \beta_{k-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m-n+k}F_{k-1}
\end{aligned}$$

путем осреднения вдоль траектории β_{k-1}.

Определение заранее неизвестных функций $u_n, \ldots, u_k, Z, \Gamma_{n-1}, \ldots, \Gamma_{k-1}$ не встречает затруднений, если правые части уравнений (1.1) — гладкие функции ε в рассматриваемой области. В конкретизации функций $F_n, \ldots, F_{k-1}$ не возникает нужды.

Что касается уравнений, левые части которых не затрагиваются заменой переменных (1.2), то их правые части разлагаются в ряды Тейлора, оказываясь в результате выраженными взамен старых через вновь вводимые переменные.

В результате n замен переменных вида (1.2) система уравнений (1.1) сводится к эквивалентной

$$\begin{aligned}
\xi^{\cdot} &= \varepsilon^n \Xi(\xi, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}G_n \\
\varphi_{n-1}^{\cdot} &= \varepsilon^{n-1}\Phi_{n-1}(\xi, \varphi_{n-1}, \varepsilon) + \varepsilon^m G_{n-1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_0^{\cdot} &= \Phi_0(\xi, \varphi_{n-1}, \ldots, \varphi_0, \varepsilon) + \varepsilon^{n-m+1}G_0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Наряду с эквивалентной (1.1) системой уравнений (1.3), называемой системой уравнений m-го приближения, рассмотрим так называемую укороченную систему уравнений m-го приближения

$$
\begin{aligned}
\eta^{\cdot} &= \varepsilon^n \Xi\,(\eta, \varepsilon) \\
\psi_{n-1}^{\cdot} &= \varepsilon^{n-1}\Phi_{n-1}\,(\eta, \psi_{n-1}, \varepsilon) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\psi_0^{\cdot} &= \Phi_0\,(\eta, \psi_{n-1}, \ldots, \psi_0, \varepsilon)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Возникает вопрос о целесообразности решения системы уравнений (1.4) для построения приближенного решения исходной системы (1.1).

2. Об обосновании использования укороченных уравнений m-го приближения. В условиях, сформулированных в разд. 1, функции, стоящие в правых частях уравнений (1.4), равномерно относительно η из D и ε из $[0, \varepsilon_0]$ n раз дифференцируемы по η, i раз дифференцируемы по ψ_i, $i = n - 1, \ldots, 0$ (имеются в виду функции, зависящие от ψ_i), а также функция Φ_0 измерима по ψ_0, функции Φ_i отделены от нуля. Кроме того, стоящие в правых частях уравнений (1.3) функции G_i равномерно относительно ξ из D и ε из $[0, \varepsilon_0]$ ограничены.

Лемма. В перечисленных условиях при интегрировании систем уравнений (1.3) и (1.4) с одинаковыми для соответствующих переменных начальными условиями на интервале времени порядка ε^{-n} справедливы оценки (при дополнительном условии, что траектории ξ и η не покидают D)

$$
|\,\xi - \eta\,| = O\,(\varepsilon^{m-n+1}) \tag{2.1}
$$

$$
|\,\varphi_i - \psi_i\,| = O\,(\varepsilon^{m-2n+i+1}), \quad i = n - 1, \ldots, 0 \tag{2.2}
$$

Оценка (2.1) доказывается сравнением первых уравнений систем (1.3) и (1.4) с использованием условия Липшица для функции Ξ и леммы Гронуолла.

Приведем лишь доказательство оценки

$$
|\,\varphi_{n-1} - \psi_{n-1}\,| = O\,(\varepsilon^{m-n}) \tag{2.3}
$$

из числа оценок (2.2), так как доказательство остальных не содержит принципиального отличия.

Переходя в первых двух уравнениях систем (1.3) и (1.4) к монотонно изменяющимся вместе со временем независимым переменным соответственно φ_{n-1} и ψ_{n-1}, получим уравнения в стандартной форме

$$
d\xi/d\varphi_{n-1} = \varepsilon f\,(\xi, \varphi_{n-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m-n+2}H \tag{2.4}
$$

$$
d\eta/d\psi_{n-1} = \varepsilon f\,(\eta, \psi_{n-1}, \varepsilon) \tag{2.5}
$$

где H — равномерно относительно ξ из D и ε из $[0, \varepsilon_0]$ ограниченная функция. Используя применительно к уравнениям (2.4) и (2.5) оценки метода осреднения [9], получим оценку

$$
|\,\xi\,(\varphi_{n-1} = s) - \eta\,(\psi_{n-1} = s)\,| = O\,(\varepsilon^{m-n+1}) \tag{2.6}
$$

справедливую для значений s из интервала изменения от $s_0 = \varphi_{n-1}(t = 0) = \psi_{n-1}\,(t = 0)$ до s_*, $|\,s_* - s_0\,| = O\,(\varepsilon^{-1})$. Отметим, что изменение переменных φ_{n-1} и ψ_{n-1} на величину порядка ε^{-1} происходит за время порядка ε^{-n}.

Оценка (2.6) не вполне аналогична оценке (2.1). Именно, она описывает близость переменных ξ и η, изменяющихся вдоль траекторий быстрых движений соответственно φ_{n-1} и ψ_{n-1}.

Разделив почленно вторые уравнения систем (1.3) и (1.4) и интегрируя вдоль траекторий φ_{n-1} и ψ_{n-1}, получим

$$
\int\limits_{s_0}^{\psi_{n-1}(t)} [\Phi_{n-1}\,(\eta, \psi_{n-1}, \varepsilon)]^{-1}\,d\psi_{n-1} = \int\limits_{s_0}^{\varphi_{n-1}(t)} [\Phi_{n-1}\,(\xi, \varphi_{n-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m-n+1}G_{n-1}]^{-1}\,d\varphi_{n-1}
$$

где t — некоторое конкретное значение времени из интервала $[0, t_*]$, $t_* = O(\varepsilon^{-n})$.

Полагаем для определенности, что конкретному значению t соответствует $\psi_{n-1}(t) \in [s_0, \varphi_{n-1}(t)]$ (в противном случае ход доказательства принципиально не меняется). Разлагая $\Phi_{n-1}(\eta, \psi_{n-1}, \varepsilon)$ в ряд Тейлора вблизи $\eta = \xi$, при учете (2.6) получим

$$\int\limits_{s_0}^{\psi_{n-1}(t)} [\Phi_{n-1}(\xi(\psi_{n-1}), \psi_{n-1}, \varepsilon) + O(\varepsilon^{m-n+1})]^{-1}\, d\psi_{n-1} =$$
$$= \int\limits_{s_0}^{\varphi_{n-1}(t)} [\Phi_{n-1}(\xi, \varphi_{n-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m-n+1} G_{n-1}]^{-1}\, d\varphi_{n-1}$$

Оценивая входящие в это соотношение интегралы на общем для них обоих (в силу предположения) участке интегрирования $[s_0, \psi_{n-1}(t)]$, при учете отделенности функции Φ_{n-1} от нуля получим

$$[\psi_{n-1}(t) - s_0] \times O(\varepsilon^{m-n+1}) = \int\limits_{\psi_{n-1}(t)}^{\varphi_{n-1}(t)} [\Phi_{n-1}(\xi, \varphi_{n-1}, \varepsilon) + \varepsilon^{m-n+1} G_{n-1}]^{-1}\, d\varphi_{n-1}$$

откуда при учете отделенности функции Φ_{n-1} от нуля и интервалов изменения переменных φ_{n-1} и ψ_{n-1} порядка ε^{-1} получим оценку (2.3).]

Теорема 1. В перечисленных в разд. 1 условиях на интервалах времени порядка ε^{-n} справедливы оценки

$$|x - x^\circ| = O(\varepsilon^{m-n+1})$$
$$|\alpha_i - \alpha_i^\circ| = O(\varepsilon^{m-2n+i+1}), \quad i = n-1, \ldots, 0$$

где x° и α_i° ($i = n-1, \ldots, 0$) — приближенные решения исходной системы уравнений (1.1), полученные с учетом замен переменных вида (1.2) в результате интегрирования укороченной системы уравнений (1.4) взамен точной (1.3) с соответствующими начальными условиями. При этом дополнительно предполагается, что траектория η вместе со своей определенной окрестностью порядка ε^{m-n+1} лежит в D.

3. Система уравнений со скрытой иерархией скоростей вращения фаз. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = \varepsilon S_n + \varepsilon^n X \tag{3.1}$$
$$\dot{\alpha}_{n-1} = \varepsilon S_{n-1} + \varepsilon^{n-1} A_{n-1}, \ \ldots, \ \dot{\alpha}_1 = \varepsilon A_1, \quad \dot{\alpha}_0 = A_0$$

Стоящие в правых частях функции $X, A_{n-1}, \ldots, A_0$ (от $x, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0, \varepsilon$) обладают теми же свойствами, что и одноименные в разд. 1, а функции $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_2$ (также от $x, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_0, \varepsilon$) обладают теми же свойствами, что и функции $X, A_{n-1}, \ldots, A_2$, стоящие в соответствующих уравнениях, за исключением отделенности от нуля.

Пусть функции S_i ($i = n, \ldots, 2$) обладают таким свойством, что при их последовательном осреднении вдоль траекторий быстрых движений (начиная с самого быстрого) порядок малости результата каждый раз изменяется на единицу, так что после $i-1$ осреднения итоговый результат оказывается порядка ε^{i-1}. Тогда существует последовательность из n замен переменных, приводящая систему уравнений (3.1) к эквивалентной ей системе уравнений m-го приближения (1.3), причем k-я замена имеет вид

$$y = z + \varepsilon u_n, \ \beta_{n-1} = \gamma_{n-1} + \varepsilon u_{n-1}, \ \ldots, \ \beta_k = \gamma_k + \varepsilon u_k \tag{3.2}$$

где функции $u_n, \ldots, u_k$ (от $z, \gamma_{n-1}, \ldots, \gamma_{k-1}, \varepsilon$) равномерно относительно z из D и ε из $[0, \varepsilon_0]$ ограничены.

Теорема 2. В перечисленных условиях на интервале времени порядка ε^{-n} справедливы оценки

$$| x - x^\circ | = O(\varepsilon), \quad | \alpha_i - \alpha_i^\circ | = O(\varepsilon^j), \quad i = n-1, \ldots, 1$$
$$j = \min\{1, m - 2n + i + 1\}, \quad | \alpha_0 - \alpha_0^\circ | = O(\varepsilon^{m-2n+1})$$

для случая $m < 2n - 1$, а для случая $m \geqslant 2n - 1$ — оценки

$$| x - x^\circ | = O(\varepsilon^{m-2n+2}), \quad | \alpha_i - \alpha_i^\circ | = O(\varepsilon^{m-2n+2})$$
$$i = n-1, \ldots, 1; \quad | \alpha_0 - \alpha_0^\circ | = O(\varepsilon^{m-2n+1})$$

где x° и α_i° — приближенные решения системы уравнений (3.1), полученные при учете замен переменных вида (3.2) в результате интегрирования укороченной системы уравнений (1.4) взамен точной (1.3) с соответствующими начальными условиями. При этом дополнительно предполагается, что траектория η вместе со своей определенной окрестностью порядка ε^j, $j = \max\{1, m - 2n + 2\}$ лежит в D.

Примером использования теоремы 2 может служить обоснование [10] последовательности осреднений в случае резонанса в существенно нелинейной системе. В этой задаче от исходной постановки можно перейти к системе уравнений

$$x^{\cdot} = \varepsilon S(x, \alpha_1, \alpha_0, \varepsilon) + \varepsilon^2 X(x, \alpha_1, \alpha_0, \varepsilon)$$
$$\alpha_1^{\cdot} = \varepsilon A_1(x, \alpha_1, \alpha_0, \varepsilon)$$
$$\alpha_0^{\cdot} = A_{00}(x, \alpha_1, \varepsilon) + \varepsilon A_{01}(x, \alpha_1, \alpha_0, \varepsilon)$$

удовлетворяющей условиям теоремы 2 (за тем исключением, что переменная x — не скаляр, а вектор, состоящий из двух компонент). Функция $S(x, \alpha_1, \alpha_0, \varepsilon)$ разлагается в ряд Фурье по α_0 с нулевым центральным членом, и построение замен переменных вида (3.2) не составляет труда.

Результаты леммы, теоремы 1 и теоремы 2 без изменений могут быть перенесены на случай, когда самая медленная переменная не скаляр, а вектор произвольной размерности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черноусько Ф. Л.* О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 474—483.
2. *Белецкий В. В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
3. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
4. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНИТИ, 1985. 304 с.
5. *Чириков Б. В.* Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс // Докл. АН СССР. 1959. Т. 125. № 5. С. 1015—1018.
6. *Журавлев В. Ф., Климов Д. М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 326 с.
7. *Печенев А. В.* Осреднение систем с иерархией скоростей вращения фаз на существенно больших интервалах времени // Докл. АН СССР. 1990. Т. 315. № 1. С. 28—31.
8. *Нейштадт А. И.* О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 2. С. 301—304.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
10. *Печенев А. В.* О движении колебательной системы с ограниченным возбуждением вблизи резонанса // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 1. С. 27—31.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
27.VII.1990