ЛИТЕРАТУРА

1. *Гирс И. В., Сретенский Л. Н.* Влияние изменения главных размеров корабля на его волновое сопротивление // ПММ. 1946. Т. 10. Вып. 1. С. 21—32.
2. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977, 815 с.
3. Справочник по теории корабля, т. 1. Л.: Судостроение, 1985. 764 с.
4. *Hong Young Suck.* Numerical calculaton of second — order wave resistance. // J. Ship Res. 1977. V. 21. N 2. P. 94—106.
5. *Bonmarin P.* Geometric properties of deep-water breaking waves // J. Fluid. Mech. 1989. V. 209. P. 405—433.
6. *Амромин Э. Л., Тимошин Ю. С.* Алгоритм и программа вычисления волнового сопротивления катамарана. // Вопросы судостроения. Сер.: Мат. методы. 1974. Вып. 5. С. 57—60.
7. *Амромин Э. Л., Вальдман Н. А., Иванов А. Н.* Нелинейная интерференция волн от источников и стоков, обтекаемых под поверхностью тяжелой жидкости // В кн. Асимптотические методы в теории систем. Иркутск: ВЦ СОАН СССР, 1989. С. 157—164.
8. *Гогиш Л. В., Степанов Г. Ю.* Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979. 367 с.
9. *Shahshahan A., Landweber L.* Boundary-layer Effects on wave Resistance of a Ship Model // J. Ship Res. 1990. V. 34. № 1. P. 29—37.
10. *Григорян С. С.* Механика некоторых крупномасштабных природных процессов // Аннотации докладов. 5 Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике. Алма-Ата: Наука, 1981. С. 125.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 15.III.1991

УДК 539.3

© 1992 г. Т. С. Кагадий, Л. В. Массаковская, А. В. Павленко

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Предлагается обобщение разработанного ранее [1, 2] применительно к упругим материалам асимптотического метода на случай вязкоупругих анизотропных сред. Исследуется вопрос о передаче нагрузки упругими элементами вязкоупругим ортотропным телам, связанный с определением адгезионной прочности волокнистых композиционных материалов.

1. Рассмотрим вязкоупругое тело, материал которого ортотропен в отношении как упругих, так и вязкоупругих свойств. Главные направления анизотропии совпадают с декартовыми осями координат x, y, z. Соотношения между деформациями и напряжениями в этом случае могут быть записаны следующим образом:

$$e_{11} = S_1 - \nu_{12}S_2 - \nu_{13}S_3$$

$$S_i = \frac{1}{E_i}\left(\sigma_{ii} + \int\limits_0^t K_{1i}(t-\tau)\,\sigma_{ii}\,d\tau\right), \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{G_{ij}}\left(\sigma_{ij} + \int\limits_0^t K_n(t-\tau)\,\sigma_{ij}\,d\tau\right)$$

$$(i = 2,\ j = 3,\ n = 1;\ i = 1,\ j = 3,\ n = 2;\ i = 1,\ j = 2,\ n = 3)$$

Для получения e_{22}, e_{33} следует в e_{11} сделать круговую замену индексов. При этом

$$\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2, \quad \nu_{23}E_2 = \nu_{32}E_3, \quad \nu_{31}E_3 = \nu_{13}E_1$$

$$K_{12} = K_{21}, \quad K_{23} = K_{32}, \quad K_{31} = K_{13}$$

Здесь E_i — мгновенные модули упругости, ν_{ij} — коэффициенты Пуассона, G_{ij} — модули сдвига, σ_{ij} — нормальные, $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$, $\sigma_{23} = \sigma_{32}$ — касательные напряжения $K_{ij}(t-\tau)$ — ядра ползучести, для аппроксимации которых используются следующие аналитические выражения [3]:

$$K_{ij}(t-\tau) = k_{ij}(t-\tau)^{\alpha_{ij}-1}\exp[-\beta_{ij}(t-\tau)] \qquad (1.2)$$

$$K_i(t-\tau) = k_i(t-\tau)^{\alpha_i-1}\exp[-\beta_i(t-\tau)] \quad (0<\alpha_{ij},\ \alpha_i \leqslant 1)$$

Компоненты тензора деформаций выражаются через проекции вектора перемещений по формулам

$$e_{11} = u_x,\ e_{22} = v_y,\ e_{33} = w_z,\ e_{23} = v_z + w_y \qquad (1.3)$$

$$e_{13} = u_z + w_x,\ e_{12} = u_y + v_x$$

Индексы x, y, z означают дифференцирование по соответствующим координатам.

Применяя преобразование Лапласа по времени с параметром к соотношениям (1.1) и учитывая (1.3), приходим к интегрированию системы уравнений относительно трансформант компонент вектора перемещений:

$$U_{xx} + \varepsilon U_{yy} + \varepsilon l_1 U_{zz} + \varepsilon m V_{xy} + \varepsilon m_1 l_1 W_{xz} = 0$$

$$\varepsilon V_{xx} + q V_{yy} + \varepsilon l_2 V_{zz} + \varepsilon m_2 U_{xy} + \varepsilon m_3 l_2 W_{yz} = 0 \qquad (1.4)$$

$$\varepsilon l_1 W_{xx} + \varepsilon l_2 W_{yy} + q_1 W_{zz} + \varepsilon m_4 l_1 U_{xz} + \varepsilon m_5 l_2 V_{yz} = 0$$

$$q = \frac{E_2F_{22}(p)}{E_1F_{11}(p)},\quad q_1 = \frac{E_3F_{33}(p)}{E_1F_{11}(p)},\quad \varepsilon = \varepsilon_1\frac{F_3(p)}{F_{11}(p)},\quad \varepsilon_1 = \frac{G_{12}}{E_1},\quad l_1 = \frac{G_{13}F_2(p)}{G_{12}F_3(p)}$$

$$l_2 = G_{23}F_1(p)/G_{12}F_3(p),\ m = 1+\mu,\ m_i = 1+\mu_i,\ \mu = \nu_{12}\varepsilon^{-1}F_{12}(p)$$

$$\mu_1 = \nu_{13}F_{13}(p)(\varepsilon l_1)^{-1},\ \mu_2 = \nu_{21}F_{21}(p)q\varepsilon^{-1},\ \mu_3 = \nu_{23}F_{23}(p)q(\varepsilon l_2)^{-1}$$

$$\mu_4 = \nu_{31}F_{31}(p)q_1(\varepsilon l_1)^{-1},\ \mu_5 = \nu_{32}F_{32}(p)q$$

при соответствующих граничных условиях.

Здесь

$$F_{ii}(p) = [1 + f_{ii}(p)]^{-1},\ F_{ij}(p) = [1 + f_{ij}(p)]F_{jj}(p)\ (i \neq j)$$

$$F_i(p) = [1 + f_i(p)]^{-1},\ f_{ij}(p) = k_{ij}\Gamma(\alpha_{ij})(p+\beta_{ij})^{-\alpha_{ij}}$$

$$f_i(p) = k_i\Gamma(\alpha_i)(p+\beta_i)^{-\alpha_i}\ (i, j = 1, 2, 3)$$

Уравнения (1.4) аналогичны уравнениям равновесия в перемещениях упругого ортотропного тела. Поэтому и здесь может быть применен асимптотический метод [2], если в качестве малого параметра использовать величину ε. Она действительно оказывается малой, так как параметр ε_1 для реальных ортотропных материалов мал, а функция $F_3(p)/F_{11}(p)$ для ядер (1.2) не превосходит единицы при произвольных значениях параметра p. При этом, как и в [2], удается расщепить напряженно-деформированное состояние вязкоупругого ортотропного тела на три составляющие, определение каждой из которых сводится к последовательному решению задач теории потенциала. Это дает возможность исследовать многие вопросы механики деформируемого твердого тела, которые другими методами разрешить не удается.

2. Остановимся на некоторых задачах, связанных с определением адгезионной прочности волокнистого композита.

Пусть в вязкоупругое ортотропное полубесконечное тело помещен и непрерывно с ней связан упругий полубесконечный стержень прямоугольного поперечного сечения, площадь которого F_c (толщина стержня h, полуширина b, предполагается $h/b \ll 1$). Средняя линия включения перпендикулярна к ограничивающей полупространство плоскости и совпадает с осью x. Требуется определить закон распределения контактных напряжений между стержнем и полупространством, когда в концевой точке стержня действует сосредоточенная сила P_0, направленная по оси стержня, приложенная в начальный момент времени и затем остающаяся постоянной.

В пространственных задачах для тел с упругими включениями малого поперечного сечения модель одномерного упругого континуума включения в сочетании с моделью контакта по линии непосредственно неприменима [4]. Как и в [2, 4], будем полагать, что имеет место модель одномерного упругого включения в сочетании с моде лью контакта по площади для полупространства, когда закон распределения контактных напряжений дается формулой

$$\sigma_{12}(x, z) = \tau(x)/(\pi\sqrt{b^2 - z^2})$$

где $\tau(x)$ — напряжение на единицу длины включения, подлежащее определению.

В такой постановке после применения преобразования Лапласа (трансформанты обозначаются звездочкой) приходим к интегрированию уравнения относительно трансформанты перемещения U_1 точек средней линии стержня

$$U_{1xx} = [P_0\delta(x)/p - \tau^*(x)]/(E_cF_c) \tag{2.1}$$

и уравнения равновесия для полупространства ($q = q_1 = 1$, $l_1 = l_2 = 1$)

$$\omega^2 U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0 \quad (\omega^2 = \varepsilon^{-1}) \tag{2.2}$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} U_x = 0 \text{ при } x = 0 \\ U_y = \tau^*(x)/(2\pi G F_1(p)\sqrt{b^2 - z^2}) \text{ при } y = 0,\ |z| < b \\ U = U_1 \text{ при } y = 0,\ z = 0 \end{gathered} \tag{2.3}$$

На бесконечности все функции обращаются в нуль.

Здесь E_c — модуль упругости материала включения, $\delta(x)$ — функция Дирака. Касательное напряжение $\sigma_{12}^*(x, z)$ определяется лишь функцией U_y, так как $V = 0$ ($V_x = 0$) при $y = 0$, причем $\sigma_{12}^* = 2GF_1(p)U_y$, где $G = G_{12}$.

Решение задачи (2.1)—(2.3) можно получить при помощи преобразований Фурье. Выполняя эти преобразования и находя их обращения, получим

$$U_1(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{P_0}{pE_cF_c}\int_0^\infty \frac{M(\theta)\cos xs}{\Delta}\,ds$$

$$N^*(x) = \frac{2}{\pi}\frac{P_0}{p}\int_0^\infty \frac{sM(\theta)\sin xs}{\Delta}\,ds, \quad \tau^*(x) = \frac{2P_0\varphi(p)}{\pi p}\int_0^\infty \frac{\cos xs}{\Delta}\,ds \tag{2.4}$$

$$\Delta = s^2 M(\theta) + \varphi(p); \quad \varphi(p) = \varphi_0 F_1(p)$$

$$\varphi_0 = 2\pi G/(E_cF_c); \quad M(\theta) = I_0(\theta)K_0(\theta), \quad \theta = b\omega s/2$$

где $I_0(\theta)$, $K_0(\theta)$ — модифицированные функции Бесселя, $N^*(x)$ — трансформанта Лапласа усилия в стержне.

Обратное преобразование Лапласа определяет усилия N и τ в зависимости от координаты и времени. Для перехода к оригиналам представим усилия (2.4) в виде рядов по малому параметру ε_*, зависящему от p:

$$T^*(x, p) = [T_0(x) + T_1(x)\varepsilon_* + T_2(x)\varepsilon_*^2 + \ldots]/p \tag{2.5}$$

где под T^* подразумевается либо усилие N^*, либо τ^*.

Если материал полупространства обладает преимущественно сдвиговой ползучестью ($k_{ij} = 0$, $k_i = k$) и $\alpha = 1$, то

$$\omega = \omega_0[(p + \beta + k)/(p + \beta)]^{1/2}, \quad \varphi = \varphi_0(p + \beta)/(p + \beta + k)$$

$$\omega_0 = (E_1/G)^{1/2}, \quad \theta_0 = b\omega_0 s/2$$

В этом случае в ряде (2.5) при больших значениях параметра p (что соответствует малым значениям времени t) $\varepsilon_* = k/(p + \beta)$, а при малых p (большие значения времени) $\varepsilon_* = \psi p/(p + \beta)$, $\psi = -k/(\beta + k)$. Переходя к оригиналу в (2.5), получим при малых значениях времени

$$T(x, t) = T_0(x) + T_{10}(x)(k/\beta)(1 - e^{-\beta t}) + \ldots \tag{2.6}$$

где для усилия в стержне $N(x, t)$:

$$T_0(x) = \frac{2P_0}{\pi}\int_0^\infty sM(\theta_0)\frac{\sin xs}{\Delta_0}\,ds$$

$$T_{10}(x) = \frac{2P_0\varphi_0}{\pi} \int_0^\infty s\,[M_1(s) - M(\theta_0)]\,\frac{\sin xs}{\Delta_0^2}\,ds \tag{2.7}$$

$$\Delta_0 = s^2 M(\theta_0) + \varphi_0$$

а для контактного напряжения $\tau(x, t)$:

$$\begin{gathered} T_0(x) = \frac{2P_0\varphi_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos xs}{\Delta_0}\,ds \\ T_{10}(x) = \frac{2P_0\varphi_0}{\pi} \int_0^\infty s^2\,[M_1(s) - M(\theta_0)]\,\frac{\cos xs}{\Delta^2_0}\,ds \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$M_1(s) = (\theta_0/4)[I_1(\theta_0)K_0(\theta_0) - I_0(\theta_0)K_1(\theta_0)]$$

При больших значениях времени из (2.5) получим

$$T(x, t) = T_\infty(x) + T_{1\infty}(x)\psi e^{-\beta t} + \ldots \tag{2.9}$$

Коэффициенты $T_\infty(x)$, $T_{1\infty}(x)$ находятся по тем же формулам (2.7), (2.8) после замены ω_0 на ω_∞, φ_0 на φ_∞, где

$$\omega_\infty = \omega_0(1 + k/\beta)^{1/2}, \quad \varphi_\infty = \varphi_0/(1 + k/\beta)$$

Усилия (2.6) могут быть представлены асимптотическими выражениями при малых и больших значениях координаты x аналогично упругой задаче [2]. При малых значениях x (что соответствует большим значениям параметра s), используя формулы

$$I_0(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_0(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}$$

заключаем, что переход к оригиналам приводит при малых значениях времени к разложению (2.6), коэффициенты которого имеют вид:

для усилия в стержне

$$\begin{gathered} T_0(x) = 2P_0(\operatorname{ci} x_1 \sin x_1 - \cos x_1 \operatorname{si} x_1)/\pi \\ T_{10}(x) = -2P_0 x_1(\cos x_1 \operatorname{ci} x_1 + \sin x_1 \operatorname{si} x_1)/\pi \\ x_1 = g_0 x, \quad g_0 = b\omega_0\varphi_0 \end{gathered} \tag{2.10}$$

для усилия контактного взаимодействия

$$\begin{gathered} T_0(x) = -2P_0 g_0(\cos x_1 \operatorname{ci} x_1 + \sin x_1 \operatorname{si} x_1)/\pi \\ T_{10}(x) = P_0 g_0[(\cos x_1 \operatorname{ci} x_1 + \sin x_1 \operatorname{si} x_1) - x_1(\sin x_1 \operatorname{ci} x_1 - \cos x_1 \operatorname{si} x_1 - 1/x_1)]/\pi \end{gathered} \tag{2.11}$$

При больших значениях времени имеем разложения (2.9), коэффициенты которых находятся по формулам (2.10), (2.11) после замены g_0 на $g_\infty = b\omega_\infty\varphi_\infty$. Характер убывания усилий при больших значениях координаты x аналогичен упругой задаче [2].

Для получения оригиналов искомых функций при произвольных значениях времени может быть использована двухточечная аппроксиманта Паде [5], процесс построения которой описан в [6]. Эта функция действительно позволяет найти те или иные характеристики при произвольных значениях времени, если известно их поведение при малых и больших. Последние же, как показано выше, могут быть определены достаточно просто.

3. Пусть тонкие упругие включения занимают в полупространстве каждую из полос $0 \leqslant x < \infty$, $|z| \leqslant b$, $y = 2ak$ $(k = 0, \pm1, \ldots)$ (имеет место периодичность по координате y). При тех же предположениях, что и в разд. 2, трансформанта контактного напряжения определяется формулой

$$\tau^*(x) = \frac{2P_0\varphi}{\pi p} \int_0^\infty \frac{\cos xs}{\varphi + s^2 L(s)}\,ds \tag{3.1}$$

$$L(s) = \int_0^\infty J_0(b\nu)\,\frac{\operatorname{cth}\Omega}{\Omega}\,d\nu, \quad \Omega = \sqrt{\omega^2 s^2 + \nu^2}$$

При $a \to \infty$ (2a — расстояние между включениями) (3.1) переходит в решение для одиночного включения (третья формула (2.4)). Переход к оригиналам осуществляется указанным выше способом.

Если в периодической задаче стержни нагружены через один, то трансформанты контактного напряжения τ_0^* (τ_1^*) в полоске соединения нагруженного (ненагруженного) включения с полупространством запишутся так:

$$\tau^*_0(x) = \frac{4P_0\varphi}{\pi p} \int_0^\infty \frac{\Delta_2 \cos xs}{\Delta_2^2 - s^4N_1^2(s)} ds$$

$$\tau_1^*(x) = \frac{4P_0\varphi}{\pi p} \int_0^\infty \frac{s^2N_1(s) \cos xs}{\Delta_2^2 - s^4N_1^2(s)} ds \tag{3.2}$$

$$M_2(s) = \int_0^\infty \frac{J_0(b\nu)}{\Omega} [\mathrm{th}(a\Omega) + \mathrm{cth}(a\Omega)]\, d\nu, \quad N_1(s) = 2\int_0^\infty \frac{J_0(b\nu)\, d\nu}{\Omega\, \mathrm{sh}(2a\Omega)}$$

$$\Delta_2 = s^2M_2(s) + 2\varphi$$

Предельный переход при $a \to \infty$ и в этом случае дает решение для одиночного включения. Контактные напряжения при $t = 0$ и $t = \infty$ могут быть определены по тем же формулам (3.2) после замены соответственно φ на φ_0, ω на ω_0 и φ на φ_∞, ω на ω_∞, а также $p = 1$.

Следует отметить, что полученные решения для усилий контактного взаимодействия имеют логарифмическую особенность при $x = 0$. В действительности же точный характер особенности в окрестности этой точки имеет вид

$$\tau(x) = Ax^{-\lambda} \tag{3.3}$$

где λ известно ($0 < \lambda < 1$), а неизвестен коэффициент A. Он может быть найден из условий сращивания: в некоторой точке области контакта должны совпадать как полученные выше приближенные и особое (3.3) решения, так и их производные. Эти условия позволяют найти зоны, в которых справедливы особое (3.3) решение и решение, найденное предложенным выше методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маневич Л. И., Павленко А. В., Коблик С. Г.* Асимптотические методы в теории упругости ортотропного тела. Киев; Донецк: Вища школа, 1982, 153 с.
2. *Павленко А. В.* Применение асимптотического метода к пространственной задаче теории упругости для композиционных материалов // Изв. АН СССР. МТТ. 1980, № 3. С. 50—61.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
4. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полупространства, усиленного упругими накладками // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 770—787.
5. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
6. *Кагадий Т. С., Павленко А. В.* Осесимметричная задача о передаче нагрузки упругим стержнем вязкоупругому ортотропному телу // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 787—790.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
8.IV.1991