Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 531.36 : 534.1

© 1992 г. В. Ф. Журавлев

ОБ ОСОБЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ КОНФИГУРАЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В дополнение к общеизвестному в теории колебаний линейных систем с постоянными коэффициентами понятию главных направлений свободных колебаний вводятся понятия сопряженных к ним направлений и главных направлений вынужденных колебаний. В ряде теорем устанавливаются свойства колебаний вдоль этих направлений.

1. Рассматривается вещественная система

$$Ax^{\cdot\cdot} + Bx = p \cos \omega t \tag{1.1}$$

где A и B — симметрические положительно определенные матрицы $n \times n$, x — n-мерный вектор, представляемый как матрица-столбец, p — n-мерный вектор столбец, модуль которого характеризует амплитуду внешнего периодического возбуждения, а направление определяет направление приложения периодической силы в конфигурационном пространстве.

Правая часть в (1.1) представляет собой частный вид периодического возбуждения системы с n степенями свободы, когда действующие по каждой из степеней свободы силы синхронны и синфазны. В дальнейшем будет рассмотрена и более общая ситуация.

Для связности изложения приведем вначале некоторые известные факты [1].

Если $p = 0$, то частное решение системы (1.1) ищется в виде $x = q \cos \nu t$, что приводит к следующей алгебраической системе:

$$(B - \nu^2 A)\, q = 0 \tag{1.2}$$

Для ее разрешимости относительно неизвестного вектора q в нетривиальном виде необходимо и достаточно выполнения условия

$$\det (B - \nu^2 A) = 0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) имеет n положительных корней $\nu_1, \ldots, \nu_n$, которым соответствует n решений системы (1.2): $q_1, \ldots, q_n$. Направления, задаваемые этими векторами в пространстве конфигураций, называются главными направлениями. Векторы q_k обладают свойством A-ортогональности:

$$(q_k, Aq_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

Главные направления являются особыми в том смысле, что только в этих направлениях форма колебаний прямолинейна, а сами колебания одночастотные.

2. Каждому главному направлению q_k поставим в соответствие сопряженное ему особое направление Bq_k. (Вектор Aq_k задает это же направление, поскольку в силу (1.2) $Bq_k = \nu_k^2 Aq_k$.) Свойства сопряженного направления устанавливаются следующей теоремой.

Теорема 1. Если в системе (1.1) сила $p \cos \omega t$ направлена вдоль сопряженного направления, то колебания с частотой ω осуществляются вдоль главного направления, причем при изменении ω от нуля до бесконечности система ведет себя как одномерная, т. е. амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) имеет единственный разрыв второго рода в точке $\omega = \nu_k$ при $p = Bq_k$.

Доказательство. Решение, имеющее частоту внешней силы, будем искать в виде $q = aq_k \cos \omega t$, где a — скалярная величина, определяющая амплитуду решения. Подставляя это решение в систему (1.1), находим

$$a\,(B - \omega^2 A)\, q_k = Bq_k$$

Подставляя сюда $Aq_k = \nu_k^{-2} Bq_k$, имеем

$$[a\,(1 - \omega^2/\nu_k^2) - 1]\, Bq_k = 0$$

откуда $a = \nu_k^2/(\nu_k^2 - \omega^2)$. Теорема доказана.

Особый характер направления, сопряженного главному, проявляется в том, что при сколь угодно малом отклонении направления вынуждающей силы от сопряженного на АЧХ появляются в общем случае n точек разрыва.

Если, например, вынуждающая сила имеет вид $p \cos \omega t = Aq_k \cos \nu_l t$, где $k \neq l$, т. е., будучи направленной по Aq_k, она имеет частоту, совпадающую с одной из собственных частот системы, но не равную ν_k, то периодическое решение $q \cos \nu_l t$ будет иметь конечную амплитуду $a = \nu_k^2/(\nu_k^2 - \nu_l^2)$, однако эта амплитуда становится бесконечной при сколь угодно малом возмущении направления силы $p = Aq_k + \delta p$.

Доказанная теорема допускает следующее обобщение.

Теорема 2. Если в системе (1.1) сила $p \cos \omega t$ лежит в линейном многообразии, натянутом на m векторов сопряженных направлений Bq_{k_s} $(s = 1, \ldots, m \leqslant n)$, т. е. $p = B\,(b_1 q_{k_1} + \ldots + b_m q_{k_m})$, то движение системы с частотой ω принадлежит линейному многообразию, натянутому на векторы главных направлений q_{k_s}, т. е. $q = a_1 q_{k_1} + \ldots + a_m q_{k_m}$, и при изменении ω от нуля до бесконечности система ведет себя как система с m степенями свободы (на АЧХ m резонансов в точках $\nu_{k_1}, \ldots, \nu_{k_m}$).

Доказательство представляет собой естественное обобщение доказательства теоремы 1.

3. *Определение*. Пусть $x = q \cos \omega t$ — частное решение системы (1.1), определяющее вынужденные колебания под действием силы $p \cos \omega t$. Главным направлением вынужденных колебаний (ГНВК) будем называть такое направление q, которое совпадает с направлением силы p, т. е.

$$q = \lambda p \tag{3.1}$$

где λ — скаляр, определяющий амплитуду колебаний.

Поскольку вектор q связан с вектором p в общем случае формулой $(B - \omega^2 A)\, q = p$, то ГНВК должны удовлетворять условию

$$(B - \omega^2 A)\, q = \lambda^{-1} q \tag{3.2}$$

т. е. вектор, определяющий главное направление, является собственным вектором матрицы $B - \omega^2 A$, а величина, обратная амплитуде колебаний $\mu = \lambda^{-1}$, представляет собой собственное значение. Это собственное значение является корнем уравнения

$$\det (B - \omega^2 A - \mu E) = 0 \tag{3.3}$$

Поскольку матрица $B - \omega^2 A$ симметрическая, то написанное уравнение содержит ровно n вещественных решений. Так как A и B — положительно определенные матрицы, то существует $\omega_{\min}$, такое, что $B - \omega^2 A$ — также положительно определенная матрица для всех ω из интервала $0 < \omega < \omega_{\min}$. Наряду с этим существует $\omega_{\max}$ — такое, что $B - \omega^2 A$ — отрицательно определенная матрица для всех ω из интервала $\omega_{\max} < \omega < \infty$.

Первый случай называется дорезонансным, для него все μ положительные. Второй случай зарезонансный, для него все μ отрицательные. Поскольку при переходе от отрицательных значений к положительным μ проходит через нуль, то $\omega_{\min}$ и $\omega_{\max}$ совпадают с наименьшим и наибольшим значениями корней уравнения

$$\det (B - \omega^2 A) = 0$$

Каждому решению уравнения (3.3) относительно μ соответствует собственный вектор q, являющийся решением уравнения (3.2). Таким образом, существует ровно n ГНВК системы (1.1): $q_1, \ldots, q_n$. Эти векторы образуют ортогональный базис: $(q_i, q_j) = 0$, если $i \neq j$. Заметим, что введенные ГНВК не совпадают ни с главными направлениями собственных колебаний, ни с сопряженными к ним. Если главные направления собственных колебаний обладают свойством A-ортогональности: $(q_i, Aq_j) = 0$ при $i \neq j$, сопряженные к ним — свойством A^{-1}-ортогональности: $(q_i, A^{-1}q_j) = 0$ при $i \neq j$, то ГНВК ортогональны в смысле обычной евклидовой метрики.

4. Уравнение (3.3) определяет неявную функцию $\mu(\omega^2)$, имеющую n ветвей. Свойства этой функции устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. Каждая из ветвей неявной функции (3.3) является монотонно убывающей, имеющей ровно один нуль на интервале $\omega^2 \in [0, \infty)$.

Доказательство. Умножив уравнение (3.2) скалярно на q, получим скалярное соотношение

$$(q, Bq) - \omega^2 (q, Aq) - \mu (q, q) = 0 \tag{4.1}$$

В этом уравнении векторы q, представляющие собой решение системы (3.2), являются функциями ω^2, поэтому, дифференцируя равенство (4.1) по ω^2, имеем

$$2\left(\frac{dq}{d\omega^2}, Bq\right) - (q, Aq) - 2\omega^2 \left(\frac{dq}{d\omega^2}, Aq\right) - \frac{d\mu}{d\omega^2}(q, q) - 2\mu \left(\frac{dq}{d\omega^2}, q\right) = 0$$

Поскольку в этом уравнении члены, содержащие $dq/d\omega^2$, в силу (3.2) обращаются в нуль, то оставшиеся члены дают

$$d\mu/d\omega^2 = -(q, Aq)/(q, q) \tag{4.2}$$

В силу положительной определенности A отсюда следует, что $d\mu/d\omega^2 < < 0$.

Заметим, что в формуле (4.2) каждый собственный вектор определяет производную от соответствующего именно ему собственного значения μ. Если же при каком-то ω^2 возникает случай кратных корней уравнения (3.3), то в силу симметричности матрицы $B - \omega^2 A$ собственные числа остаются дифференцируемыми функциями ω^2, и формула (4.2) остается верной, однако она требует специального выбора собственных векторов из собственного подпространства, отвечающего кратному корню. Монотонное убывание функции $\mu(\omega^2)$ доказано. Заметим далее, что $\mu(0) > 0$, поскольку $\mu(0)$ — собственные числа матрицы B. С другой стороны $\lim\limits_{\omega^2 \to \infty} \mu(\omega^2)/\omega^2 < 0$, поскольку этот предел совпадает с собственными числами матрицы $-A$. Монотонно убывающая непрерывная функция, имеющая на концах интервала значения разных знаков, имеет один нуль внутри этого интервала.

Теорема доказана.

На фиг. 1 изображена произвольная ветвь функции $\mu(\omega^2)$. Величина $|\lambda(\omega^2)| = |\mu(\omega^2)|^{-1}$ представляет собой АЧХ главных вынужденных колебаний механической системы (1.1).

Из изложенного следует, что любая система (1.1) имеет ровно n АЧХ главных колебаний, каждая из которых имеет единственный разрыв второго рода. Это означает, что если систему с n степенями свободы возбудить вдоль главного в определенном выше смысле направления, то при изменении частоты возбуждения от 0 до ∞ в системе наблюдается один резонанс. Как и в случае возбуждения вдоль сопряженного направления, система ведет себя как одномерная. Каждому главному направлению соответствует своя резонансная частота, совпадающая с одной из собственных частот системы.

5. В случае присутствия в системе диссипативных сил перепишем систему (1.1) в форме

$$A\ddot{x} + D\dot{x} + Bx = pe^{i\omega t} \tag{5.1}$$

где D — положительно определенная матрица, p — вектор-столбец с комплексными координатами.

В отличие от предыдущего периодические силы, действующие по разным координатам, будучи синхронными, могут не быть синфазными.

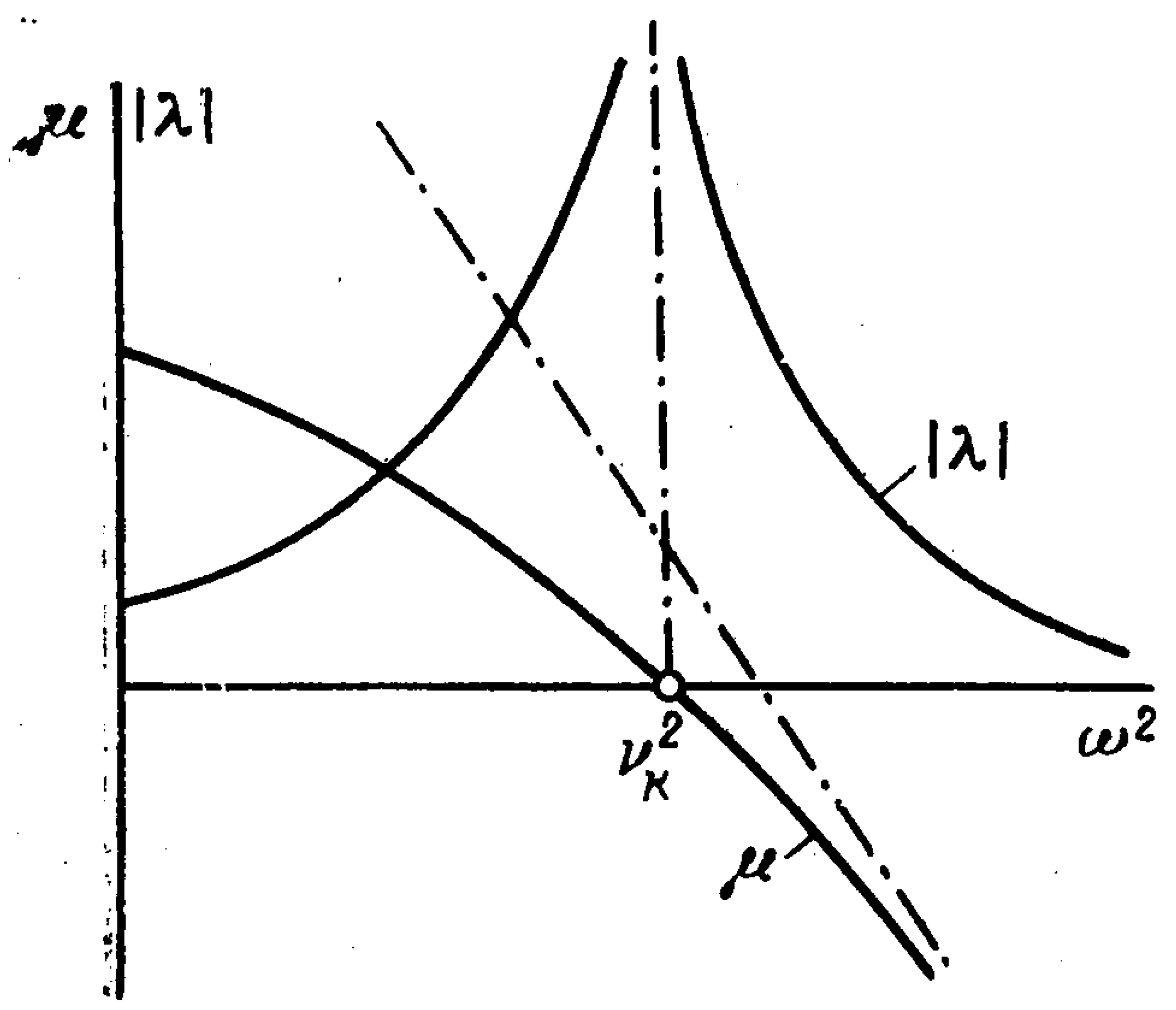
Введенное выше определение ГНВК допускает естественное обобщение.

Определение. Пусть $x = qe^{i\omega t}$ — периодическое решение системы (5.1), где q — вектор-столбец с комплексными координатами. ГНВК в системе (5.1) будем называть такое направление вектора q, при котором оно совпадает с направлением вектора p: $q = \lambda p$, где λ — комплексное число.

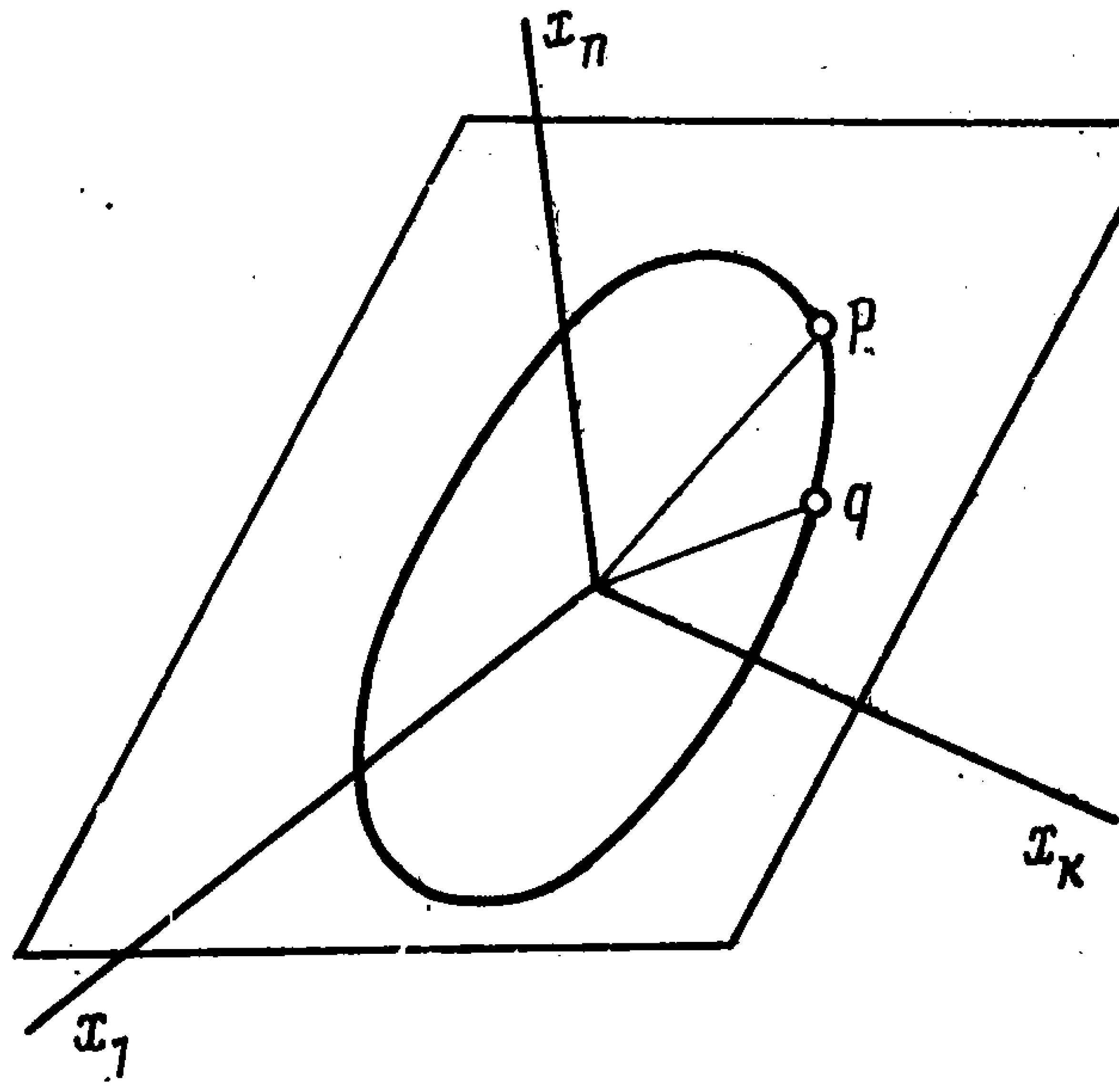
Слово «направление» используется здесь в некотором условном смысле и означает следующее. Вещественная часть системы (5.1) имеет вид (суммирование по индексу s)

$$a_{ks}\ddot{x}_s + d_{ks}\dot{x}_s + b_{ks}x_s = r_k \cos(\omega t + \varphi_k) \tag{5.2}$$

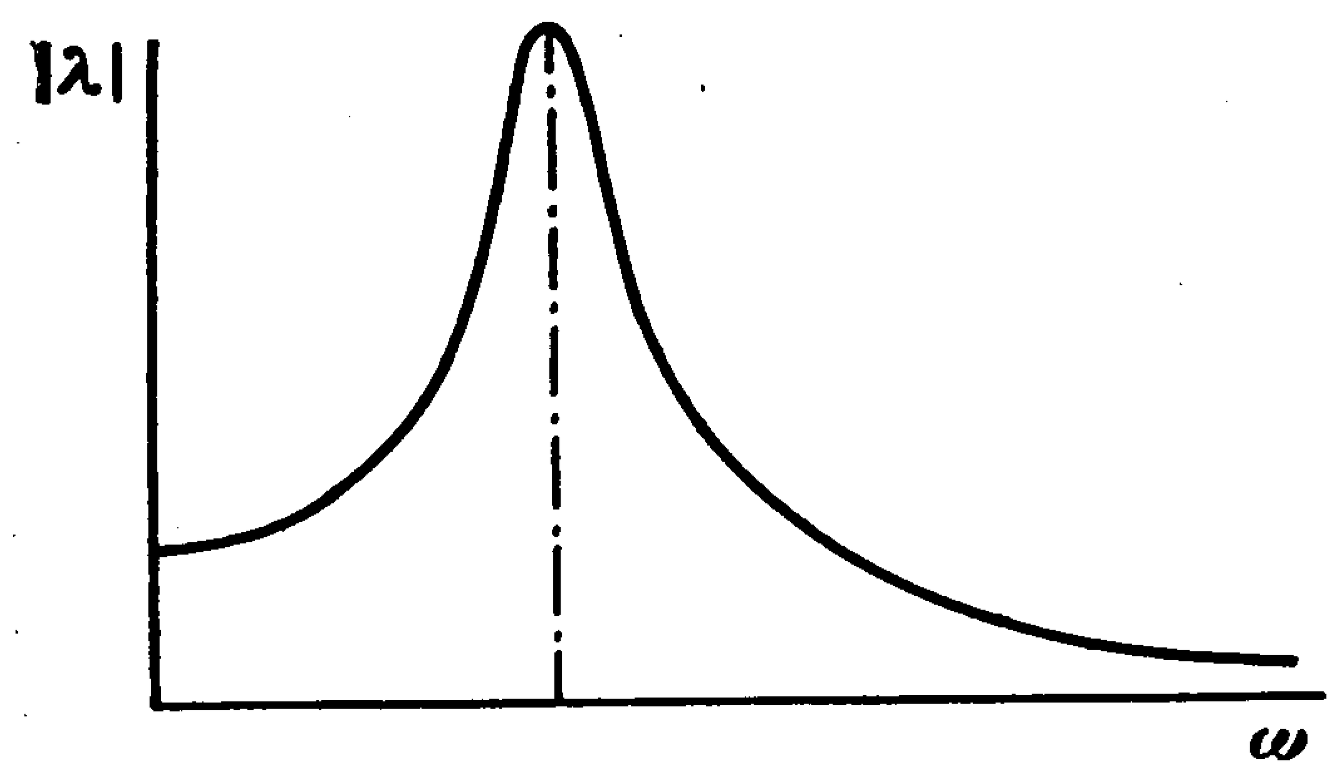
В конфигурационном пространстве системы (5.2) правая часть описывает эллипс, лежащий в некотором двумерном многообразии. Под направ-



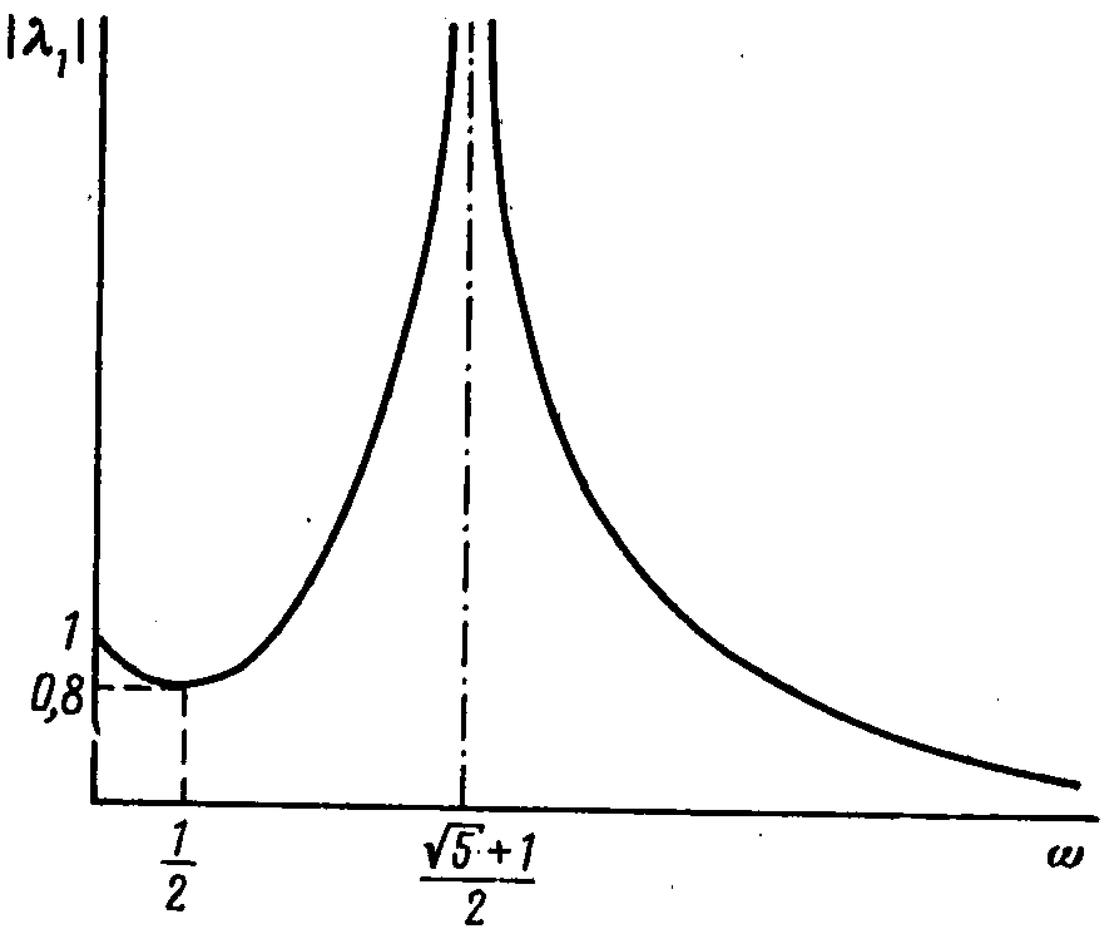
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

лением силы в данном случае понимается ориентация в конфигурационном пространстве полуосей эллипса, их отношение и направление движения точки по эллипсу.

Совпадение направления силы и направления вынужденных колебаний означает, что точка x в конфигурационном пространстве системы (5.2) описывает эллипс, совпадающий с точностью до гомотетии с эллипсом силы. При движении по самому эллипсу вектор перемещения отстает от вектора силы, и этот постоянный фазовый сдвиг определяется отношением мнимой и вещественной частей комплексного амплитудного коэффициента λ (фиг. 2).

Вектор p, определяющий ГНВК, находится из системы

$$(-\omega^2 A + i\omega D + B - \mu E)\, p = 0 \qquad (5.3)$$

где комплексное собственное значение μ, как и раньше, равно обратной величине амплитудного множителя λ.

Условие равенства нулю определителя системы (5.3) задает неявную функцию $\mu(\omega)$, имеющую n ветвей. Умножая соотношение (5.3) слева на эрмитово-сопряженный вектор по аналогии с (4.2) найдем

$$d\mu/d\omega = [-2\omega\,(p^*, Ap) + i\,(p^*, Dp)]/(p^*, p)$$

откуда следует, что производная вещественной части корня отрицательна

$$d\,(\mathrm{Re}\,\mu)/d\omega = -2\omega\,(p^*, Ap)/(p^*, p) < 0$$

Поскольку при $\omega = 0$ вещественная часть корня положительна, а при $\omega \to \infty$ отрицательна, то при некотором ω она единственный раз обращается в нуль. Поэтому АЧХ главных вынужденных колебаний при достаточно малой диссипации имеет вид, изображенный на фиг. 3.

Заметим, что при наличии диссипации ГНВК перестают быть особыми: при малом отклонении направления силы от главного изображенная на фиг. 3 АЧХ претерпит малые изменения.

6. Для учета гироскопических сил, как и в случае диссипативных сил, периодическую силу удобно записать в комплексной форме:

$$Ax^{\cdot\cdot} + \Gamma x^{\cdot} + Bx = pe^{i\omega t} \tag{6.1}$$

где Γ — кососимметрическая матрица гироскопических сил. Смысл главных направлений здесь тот же, что и в случае диссипативных сил. Разыскивая решение системы (6.1) в виде $x = qe^{i\omega t}$ и полагая $q = \lambda p$, получим

$$(-A\omega^2 + i\omega\Gamma + B - \mu E)\, p = 0 \tag{6.2}$$

Умножим это уравнение слева на эрмитово сопряженный вектор и разрешим результат относительно μ:

$$\mu = [-\omega^2 (p^*, Ap) + i\omega\, (p^*, \Gamma p) + (p^*, Bp)]/(p^*, p)$$

Поскольку произведения (p^*, Ap), $i\,(p^*, \Gamma p)$, (p^*, Bp), (p^*, p) — вещественные числа, то при любой кососимметрической матрице Γ — корень, μ — действительное число. Это означает, что при движении по эллипсу (фиг. 2) сдвиг по фазе между силой и перемещением равен либо нулю, либо π. Для каждой из ветвей $\mu\,(\omega)$ имеется ровно одно обращение в нуль, и, следовательно, АЧХ ГНВК гироскопической системы имеет один разрыв второго рода.

Случай гироскопических сил отличается от рассмотренных выше тем, что факт монотонного убывания функции $\mu\,(\omega)$ для него не имеет места.

Рассмотрим пример гироскопической системы четвертого порядка. Выберем матрицы A, B, Γ так:

$$A = B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Система (6.2), позволяющая найти главные направления, приобретает вид

$$\begin{Vmatrix} 1-\omega^2-\mu & i\omega \\ -i\omega & 1-\omega^2-\mu \end{Vmatrix} p = 0 \tag{6.3}$$

Приравнивая определитель этой системы нулю, находим корни

$$\mu_1 = 1 + \omega - \omega^2, \quad \mu_2 = 1 - \omega - \omega^2$$

АЧХ первого главного направления $|\,\lambda_1\,| = |\,\mu_1\,|^{-1}$ изображена на фиг. 4. Видно, что отсутствие монотонности у функции μ_1 приводит к появлению точки минимума в промежутке $0 < \omega < (\sqrt{5} + 1)/2$.

АЧХ второго главного направления качественно не отличается от характеристики обычной одномерной системы без диссипации.

Решения системы (6.3), определяющие главные направления, имеют вид

$$p_1 = \begin{Vmatrix} i \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad p_2 = \begin{Vmatrix} -i \\ 1 \end{Vmatrix}$$

Отсюда следует, что гироскопическая система ($p = p_1$):

$$x^{\cdot\cdot} + y^{\cdot} + x = -\sin \omega t, \quad y^{\cdot\cdot} - x^{\cdot} + y = \cos \omega t \tag{6.4}$$

имеет периодическое решение

$$x = -\sin \omega t/(1 + \omega - \omega^2), \quad y = \cos \omega t/(1 + \omega - \omega^2)$$

пропорциональное приложенной силе и имеющее только одну особенность при изменении ω (в точке $\omega = (\sqrt{5} + 1)/2$).

Если же $p = p_2$, то имеем систему, аналогичную (6.4) при замене ω на $-\omega$, и периодическое решение имеет особенность в точке $(\sqrt{5} - 1)/2$.

7. Влияние собственно неконсервативных сил. Пусть в системе (1.1) помимо позиционных консервативных сил действуют еще неконсервативные силы с кососимметрической матрицей N:

$$Ax^{\cdot\cdot} + (B + N)\,x = p \cos \omega t \tag{7.1}$$

Если $\| N \| < \min_{k,l} | \omega_k^2 - \omega_l^2 |/(n\sqrt{2})$, где ω_k^2 — корни уравнения $\det (B - \omega^2 A) = 0$, то однородная часть системы имеет вещественные собственные частоты, т. е. сохраняет колебательный характер решений. Именно этот случай и рассмотрим.

Разыскивая решение системы (7.1) в виде $x = q \cos \omega t$, получим

$$(B + N - \omega^2 A - \lambda E)\, q = 0 \tag{7.2}$$

Сделаем в этом уравнении замену $q = Lr$, где L — ортогональная матрица, которую подберем так, чтобы $L^T A L = E$. Тогда (7.2) перепишется в виде

$$(B^\circ - (\omega^2 + \lambda)\, E)\, r = 0 \quad (B^\circ = L^T (B + N)\, L) \tag{7.3}$$

Умножим слева обе части равенства (7.3) на симметрическую матрицу S:

$$[SB^\circ - (\omega^2 + \lambda)\, S]\, r = 0 \tag{7.4}$$

и подберем ее так, чтобы матрица SB° была симметрической

$$SB^\circ = B^{\circ T} S \tag{7.5}$$

Матричное уравнение (7.5) имеет относительно матрицы S бесчисленное множество решений. В силу принятого ограничения на $\| N \|$ из этого множества решений можно выбрать положительно определенные. Поскольку SB° и S — симметрические положительно определенные матрицы, то у системы (7.4) существуют n вещественных собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и n вещественных векторов $r_1, \ldots, r_n$. ГНВК в системе (7.3) получаются в виде $q_k = Lr_k$. Они ортогональны в смысле метрики, задаваемой матрицей LSL^T.

Свойства АЧХ ГНВК в рассматриваемом случае такие же, как и в случае чисто консервативных сил.

8. Рассмотрим общий случай

$$Ax^{\cdot\cdot} + (D + \Gamma)\, x^{\cdot} + (B + N)\, x = pe^{i\omega t} \tag{8.1}$$

Здесь A, B, D — симметрические матрицы, Γ, N — кососимметрические. Как и всюду выше, в этом случае имеется n комплексных ГНВК $q_1, \ldots, q_n$, являющихся решениями алгебраической системы

$$(-\omega^2 A + i\omega\, (D + \Gamma) + B + N)\, q = \lambda^{-1} q$$

Любой вектор p в (8.1) может быть представлен в виде разложения по главным направлениям: $p = b_1 q_1 + \ldots + b_n q_n$.

В соответствии с этим периодическое решение в общем случае также может быть представлено в виде разложения по главным направлениям:

$$x = [\lambda_1(\omega)\, b_1 q_1 + \ldots + \lambda_n(\omega)\, b_n q_n]\, e^{i\omega t} \tag{8.2}$$

Если $D = 0$ и выполнены оговоренные выше условия (положительная определенность A и B, ограниченность нормы $\|N\|$), то АЧХ главных вынужденных колебаний $|\lambda_k(\omega)|$ содержит по одной точке разрыва при $\omega = \nu_k$, где ν_k — собственные частоты однородной части системы: $\det(-\nu^2 A + i\nu\Gamma + B + N) = 0$. Если же эти условия не выполнены или $D \neq 0$, то характеристик с особенностью может быть меньше, чем n, или не быть совсем.

В заключение сделаем следующее замечание. Периодическое решение системы (8.1) имеет, как известно, вид

$$x = [-\omega^2 A + i\omega(D + \Gamma) + B + N]^{-1}\, p e^{i\omega t}$$

Фигурирующая в правой части обратная матрица существует, если $\omega \neq \nu_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Множитель при $e^{i\omega t}$ здесь представляет собой рациональную функцию ω и по известной теореме может быть разложен в сумму простых дробей. Аналогичный множитель в (8.2) представляет собой качественно иной тип разложения, в основе которого лежит введенное выше определение главных направлений. Коэффициенты $\lambda_k(\omega)$ в (8.2) простыми дробями не являются, представляя собой мероморфные функции с не более чем одной простой особенностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М., Мир, 1989. С. 655.

Москва

Поступила в редакцию 7.II.1991