

УДК 539.375

© 1992 г. В. В. Болотин

О ДИНАМИЧЕСКОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ ТРЕЩИН

Единый подход [1—3] к задачам устойчивости и квазистатического роста трещин в твердых телах при циклическом и медленно изменяющемся во времени нагружении обобщается на процессы динамического распространения трещин. Исходным пунктом служит общее уравнение динамики Даламбера—Лагранжа для систем с двумя группами обобщенных координат — координатами Гриффитса и координатами Лагранжа. Первую группу образуют параметры, характеризующие форму и размеры трещин, вторую группу — параметры, с точностью до которых заданы поля перемещений в теле с трещинами при заданных значениях обобщенных координат первой группы. Получена система уравнений, позволяющая описывать динамическое поведение тел с трещинами при фиксированных параметрах трещин, динамическое распространение трещин, а также переход системы тело с трещинами — нагрузка из одного состояния в другое, т. е. страгивание и остановку динамических трещин. Применение метода иллюстрируется модельными примерами.

Разрушение, которое сопровождается динамическим распространением трещин, может возникать как при динамическом (в частности, импульсном) нагружении тел, содержащих трещины или трещиноподобные дефекты, так и при возникновении неустойчивости трещин в условиях квазистатического нагружения. Типичный пример — доламывание элемента конструкции или детали при достижении усталостной трещиной критического размера. С практической точки зрения наибольший интерес представляет установление условий начала динамического роста трещин и условий остановки этого роста. Это необходимо для того, чтобы обоснованно подойти к назначению норм допустимой дефектности для конструкций, подверженных действию динамических нагрузок, к выбору способов предотвращения или торможения начавшегося динамического роста.

Обзор результатов по динамическим задачам механики разрушения можно найти в [4—6]. Наиболее разработаны три направления теоретических исследований: определение полей динамических напряжений в телах, содержащих неподвижные трещины; исследование процессов, сопровождающих динамическое распространение трещин с постоянными (заданными) скоростями; автомодельные задачи динамического роста трещин. Конечный результат большинства работ состоит в определении коэффициентов при сингулярных членах в выражениях для напряжений, т. е. динамических коэффициентов интенсивности напряжений. Сравнивая эти коэффициенты с некоторыми характеристиками трещиностойкости, делают выводы об условиях начала и остановки динамического роста трещин.

Условия старта и остановки трещин относятся к числу наименее изученных вопросов динамики разрушения. Экспериментальные данные об этих условиях немногочисленны и нередко противоречивы [4—8], а теоретические исследования находятся на начальной стадии. Краевые задачи для тел с неподвижными и с динамически распространяющимися трещинами существенно различны. При этом переход от первого типа задач ко второму нетривиален: начальные условия страгивания трещины и самый момент этого страгивания должны определяться из соображений, которые не входят в условия задачи на первом этапе. Задача осложняется, если учитывать зависимость трещиностойкости материала от скорости трещины.

Распространение динамических трещин в крупногабаритных конструкциях сопровождается более или менее выраженными колебательными процессами. Этими процессами, а также влиянием вторичных волн, как правило, пренебрегают. Между тем эксперименты показывают, что скорости роста трещин в конструкциях относительно невелики по сравнению со скоростями распространения волновых возмущений, скажем, с релеевской скоростью. Примером служит образование продольных разрывов в магистральных трубопроводах [9, 10]. Скорость звука в газе на порядок ниже скорости распространения упругих волн в стенках трубопровода. Кроме того, продвижение фронтов разрыва замедляется вследствие декомпрессии — падения давления в трубопроводе. Поэтому скорость распространения продольных разрывов оказывается на один-два порядка меньше, чем скорость упругих волн. Колебательные эффекты вызывают возрастание номинальных напряжений на фронте трещин. К тому же развитие трещин может заметно изменить жесткость системы в целом и, следовательно, реакцию конструкции на действие динамических нагрузок. В связи с этим возникает необходимость в комплексном динамическом анализе конструкции в условиях распространяющихся трещин.

1. Рассмотрим систему «твердое тело с трещинами — нагрузка или нагружающее устройство» при широких предположениях о механических свойствах материала тела, количестве, форме и размерах трещин, а также о характере нагружения. Форма и размеры трещин заданы при помощи m обобщенных координат Гриффитса l_1, \dots, l_m , совокупность которых будем обозначать $I = \{l_1, \dots, l_m\}$. Число обобщенных координат Гриффитса определяется количеством параметров, с точностью до которых заданы динамически распространяющиеся трещины. Для плоской сквозной трещины этим параметром служит ее длина, т. е. по отношению к обобщенным координатам Гриффитса задача однопараметрическая. Плоская трещина эллиптической формы при допущении о том, что она сохраняет эллиптическую форму в процессе роста, задается при помощи двух обобщенных координат — длин полуосей эллипса. При произвольной в плане форме плоской трещины придется задавать большее число обобщенных координат, например совокупность длин радиус-векторов, проведенных под разными углами в точки, лежащие на контуре трещины.

Ограничиваясь необратимыми, «незаживающими» трещинами, типичными для конструкционных материалов, выберем обобщенные координаты Гриффитса так, чтобы они были неубывающими функциями времени. Тогда условия связей принимает вид

$$\delta l_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (1.1)$$

Эти связи будем считать идеальными. Поле вектора перемещений в теле при заданных значениях l_1, \dots, l_m обозначим $u(x, t | I)$, где x — координатный вектор, t — время. Вариации поля перемещений представим в виде суммы

$$\delta u = \delta u_L + \delta u_G \equiv \delta u_L + \sum_{j=1}^m \frac{\partial u}{\partial l_j} \delta l_j \quad (1.2)$$

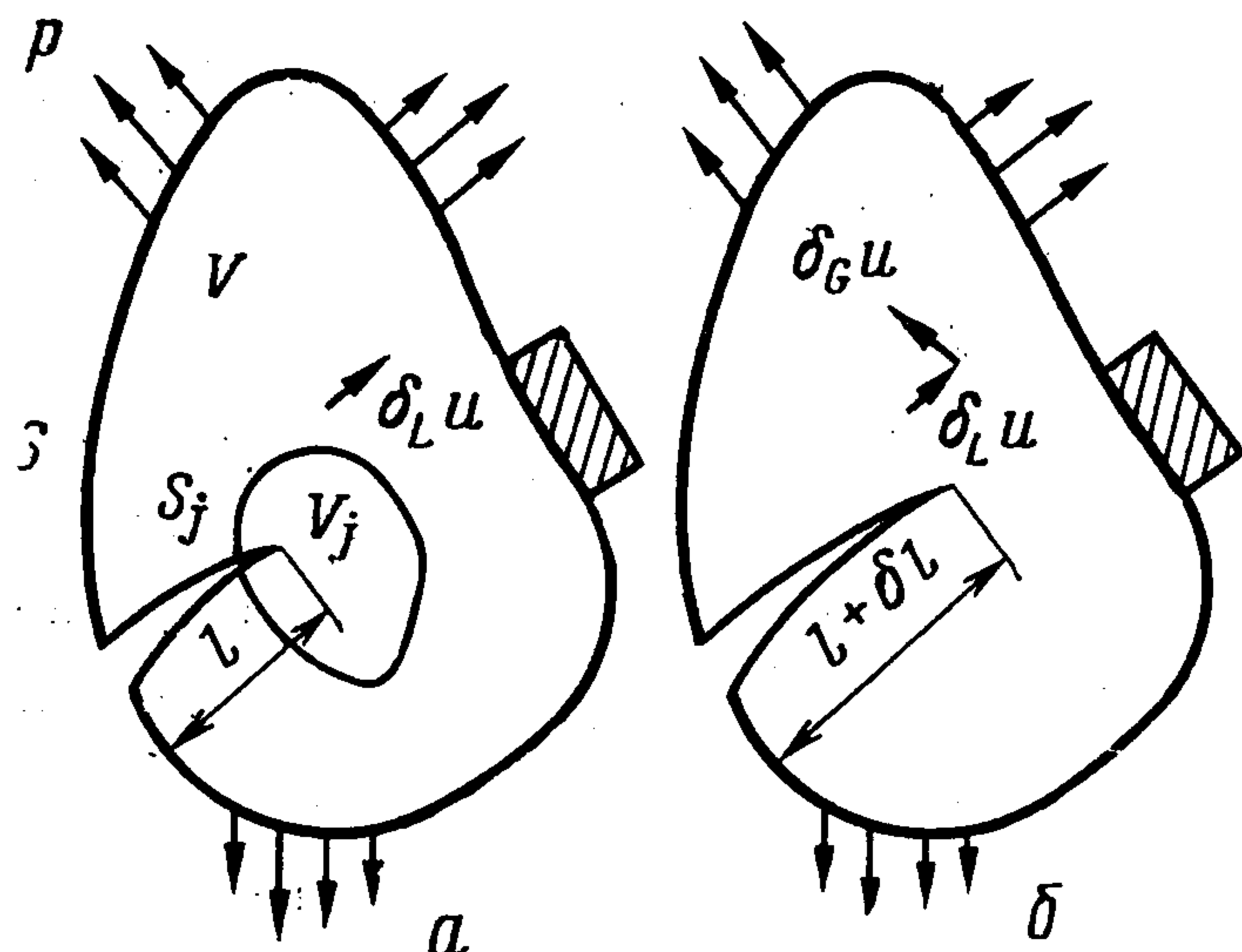
где δu_L — вариации при фиксированных трещинах (вариации Лагранжа), δu_G — вариации, порожденные изменением параметров трещин (вариации Гриффитса). На фиг. 1, а проиллюстрировано варьирование перемещений

по Лагранжу, на фиг. 1, б — совместное варьирование по Лагранжу и по Гриффитсу.

Применим к системе «тело с трещинами — нагрузка» общее уравнение динамики Даламбера — Лагранжа. Динамические процессы в системе происходят так, что в каждый момент времени выполняется соотношение

$$\delta A \equiv \delta A_e + \delta A_i + \delta A_f + \delta A_I \leq 0 \quad (1.3)$$

Здесь δA_e и δA_i — виртуальная работа внешних и внутренних сил соответственно, δA_f — виртуальная работа сил сопротивления продвижению трещин, δA_I — виртуальная работа сил инерции.



Фиг. 1

Применительно к квазистатическому росту трещин $\delta A_I \equiv 0$, и приходим к постановке задачи из [1], где к сравнению допускаются те состояния тела, которые отличаются только значениями обобщенных координат l_1, \dots, l_m при выполнении уравнений равновесия, совместности и механического состояния, а также граничных условий и условий устойчивости по Ляпунову как в исследуемом (невозмущенном) состоянии, так

и в смежных состояниях. Система «тело с трещинами — нагрузка» находится в равновесии, если сумма виртуальных работ при любых удовлетворяющих условиям (1.1) вариациях обобщенных координат Гриффитса неположительна:

$$\delta A \equiv \delta A_e + \delta A_i + \delta A_f \leq 0 \quad (1.4)$$

При этом, если $\delta A < 0$ при любых $\delta l_j > 0$, то состояние системы «тело с трещинами — нагрузка» является субравновесным и устойчивым. Если при $\delta l_j > 0$, где $j = 1, \dots, m_1$, соотношение (1.4) выполнено со знаком равенства, а при остальных $\delta l_j > 0$ имеем $\delta A < 0$, то говорим [1—3, 11], что система находится в равновесном состоянии по отношению к обобщенным координатам l_1, \dots, l_{m_1} . Это состояние равновесия устойчиво при $\delta(\delta A) < 0$ и неустойчиво при $\delta(\delta A) > 0$, где вторая вариация также берется по Гриффитсу. При $\delta(\delta A) = 0$ состояние равновесия является нейтральным. Это означает, что данное состояние — пограничное между устойчивым и неустойчивым состояниями, или что для вывода об устойчивости надо исследовать следующие вариации от δA .

Для решения динамических задач возвращаемся к более общему соотношению (1.3), содержащему виртуальную работу сил инерции. При этом различаем по меньшей мере пять случаев: движение тела при фиксированных трещинах; начало распространения (старт) трещины; движение тела, сопровождаемое динамическим распространением трещины; остановка роста трещины; последующее движение тела при остановившемся фронте трещины. Если число параметров трещины больше единицы, то возможны

более сложные ситуации, когда трещины страгиваются одновременно или поочередно, трещина начинает вначале расти по одному из параметров, а затем начинается рост по другому параметру и т. п. Все эти ситуации описываются соотношением (1.3). Учитывая, что вариации поля перемещений (1.2) равны сумме двух независимых слагаемых, представим виртуальную работу в виде $\delta A = \delta_L A + \delta_G A$, где $\delta_L A$ — работа, совершаемая на вариациях Лагранжа, $\delta_G A$ — работа, совершаемая на вариациях Гриффитса.

Пусть движение тела началось из состояния, в котором все трещины были субравновесны. Тогда условие (1.4) принимает вид

$$\delta_L A = 0, \delta_G A < 0 \quad (\delta l_k > 0, k = 1, \dots, m) \quad (1.5)$$

Первое условие эквивалентно уравнениям движения тела и естественным граничным условиям, а второе (условие субравновесности) обеспечивает постоянство всех обобщенных координат l_1, \dots, l_m . Если в некоторый момент t_* неравенство $\delta_G A < 0$ сменится равенством $\delta_G A = 0$ хотя бы для одной из вариаций $\delta l_k > 0$, то это означает, что при $t = t_*$ выполнено необходимое условие страгивания трещины по обобщенной координате l_k . Достаточное условие страгивания имеет вид $\delta_G(\delta_G A) \equiv \delta_G^2 A > 0$ при $\delta l_k > 0$ (второе варьирование также проводится по Гриффитсу). Как показывает опыт вычислений, в динамических задачах более слабые условия $\delta_G A = \delta_G^2 A = 0$ обеспечивают старт трещины.

Итак, условия старта трещин при некотором $t = t_*$ одновременно по m_i обобщенным координатам l_1, \dots, l_m могут быть представлены в форме

$$\begin{aligned} \delta_L A &= 0 \\ \delta_G A &= 0, \delta_G^2 A \geq 0 \quad (\delta l_k > 0, k = 1, \dots, m_i) \\ \delta_G A &< 0 \quad (\delta l_k > 0, k = m_i + 1, \dots, m) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Уравнения, описывающие при $t > t_*$ динамическое распространение трещин по m_i обобщенным координатам l_1, \dots, l_m при фиксированных значениях l_{m_i+1}, \dots, l_m , имеют тот же вид (1.6). Рост трещины по одной из координат (например l_{m_i}) останавливается в момент $t = t_{**}$, если условие $\delta_G A = 0$ переходит в условие субравновесности: $\delta_G A < 0$ при $\delta l_{m_i} > 0$. Дальнейшее движение происходит при выполнении условий (1.6), где m_i заменено на $m_i - 1$. После остановки роста всех трещин движение тела описывается соотношениями (1.5).

2. Условия, устанавливающие момент старта трещины (или трещин), оставляют открытым вопрос о распределении скоростей непосредственно после старта. Интуиция и опыт подсказывают, что динамический рост трещин начинается с некоторой отличной от нуля конечной скоростью (в численных примерах, ссылаясь на эксперимент [6, 7], обычно полагают начальную скорость равной $0,1 c_s, 0,2 c_s$ и т. п., где c_s — скорость распространения поверхностных волн в материале). Аналогично, если трещина возникает в результате внедрения в тело некоторого объекта, то скорость страгивания трещины вообще не совпадает с соответствующей составляющей скорости на передней кромке объекта.

Чтобы найти распределение скоростей в момент старта трещины $t = t_*$, рассмотрим свойства виртуальной работы $\delta_G A$ в окрестности этого момента. Пусть при $t = t_*$ движение начинается по обобщенной координате l_i . После начала движения сохраняется условие $\delta_G A = 0$, т. е. $\delta_G A(t_* + \Delta t) = 0$ при $\Delta t > 0$. Пусть в этой окрестности $\delta_G A$ — дифференцируемая функция t и l_i . Из условия $\delta_G A(t_*) = \delta_G A(t_* + \Delta t) = 0$ следует, что при $t = t_*$ должно быть

$$d(\delta_G A)/dt = 0 \quad (2.1)$$

Если при $t = t_* + 0$ виртуальная работа $\delta_G A$ испытывает скачок, зависящий от скорости страгивания, то вместо (2.1) берем условие

$$\delta_G A(t_* + 0) = 0 \quad (2.2)$$

Поскольку скорость распространения возмущений от фронта трещин конечна, то виртуальную работу в (2.1) можно вычислять при $t < t_* - 0$, т. е. по полю перемещений, найденному до начала страгивания. Таким образом, условия (2.1) и (2.2) представляют собой уравнения для определения начальной скорости роста трещины. В случае одновременного страгивания по двум или нескольким координатам достаточно несколько изменить начальные данные или другие параметры задачи, чтобы разнести моменты страгивания. Эти соотношения можно также истолковать как условие $\delta(\delta_G A) = 0$, в котором вместо виртуальных перемещений взяты действительные перемещения, связанные с малым приращением t в окрестности $t = t_*$.

В момент страгивания трещины происходит освобождение соответствующих односторонних связей. Освобождение связей, вообще, сопровождается появлением ударных сил. Однако в сплошной среде (при конечных скоростях распространения возмущений) эти силы отсутствуют. В окрестности $t > t_*$ момента t_* виртуальная работа из соотношения (1.4) равна нулю. Отсюда

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_*}^{t_* + \Delta t} \delta A dt = 0$$

После интегрирования приходим к известному уравнению [12], связывающему скачки скоростей (как точек тела, так и фронта трещины) с новыми параметрами N_i — обобщенными импульсами ударных сил:

$$\left[\frac{\partial T}{\partial (\partial l_i / \partial t)} \right]_{t_*}^{t_* + 0} = N_i \quad (2.3)$$

Здесь T — кинетическая энергия тела с трещинами.

Поскольку скорость распространения возмущений конечна, то кинетическая энергия T — непрерывная функция t в окрестности $t > t_*$. Из (2.3) следует $T(t_* + 0) = T(t_*)$, так что $N_i = 0$ при всех $i = 1, \dots, m$. Этот вывод не исключает, что начальный период динамического роста трещин сопровождается повышенным сопротивлением материала. Чтобы описать указанное явление, достаточно ввести увеличенные значения сил сцепления (или удельной работы разрушения) на начальных участках. При этом в рассмотрение войдут дополнительные характеристики материала, в общем случае зависящие от скоростей роста трещин.

3. В вычислительной механике разрушения [4, 6] используют разностные и вариационно-разностные аппроксимации. При этом число обобщенных координат Лагранжа выбирают в соответствии с требуемой точностью вычислений. В принципе такой подход позволяет построить точные решения задач динамики тел с трещинами. Для тел конечных размеров это достигается использованием полной системы координатных функций и процедур, обеспечивающих сходимость разложений по этим функциям. Для неограниченных тел вместо рядов берут подходящие интегральные преобразования. В дальнейшем для простоты будем считать число обобщенных координат Лагранжа конечным, учитывая, что при численной реализации это число может быть взято весьма большим. Так, в расчетах по методу конечных элементов число обобщенных координат (узловых перемещений) составляет величины порядка 10^3 , 10^4 и даже более.

Обозначим обобщенные координаты Лагранжа q_1, \dots, q_n , а их совокупность $q = \{q_1, \dots, q_n\}$. Поле перемещений представим в виде

$$u(x, t | l) = \sum_{k=1}^n q_k(t) \varphi_k(x | l) \quad (3.1)$$

где координатные вектор-функции $\varphi_k(x | l)$ удовлетворяют кинематическим граничным условиям для тела с фиксированными трещинами. Для определенности примем, что в отличие от обобщенных координат Гриффитса l_j на знаки вариаций δq_k ограничений не наложено. С учетом (1.2) и (3.1) вариации поля перемещений получаем

$$\delta u(x, t | l) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial \varphi_k(x | l)}{\partial l_j} \delta l_j + \sum_{k=1}^n \varphi_k(x | l) \delta q_k \quad (3.2)$$

Сформулируем уравнения движения системы «тело с трещинами — нагрузка» в терминах обобщенных сил. Составляющие виртуальной работы в соотношении (1.3) являются линейными формами вариаций δl_j и δq_k . В частности,

$$\delta A_e + \delta A_i = \sum_{j=1}^m G_j \delta l_j + \sum_{k=1}^n Q_k \delta q_k \quad (3.3)$$

где множители G_j аналогичны активным обобщенным силам из работ [1—3, 11] (силам, продвигающим трещины), а множители Q_k имеют смысл обычных обобщенных сил. Если материал тела упругий, внешние силы потенциальные, а все связи идеальные, то существует потенциальная энергия Π системы «тело с трещинами — нагрузка», так что

$$G_j = -\partial \Pi / \partial l_j, \quad Q_k = -\partial \Pi / \partial q_k \quad (3.4)$$

Виртуальную работу сил сопротивления росту трещин представим в форме

$$\delta A_f = - \sum_i \int_{L_i} \gamma_i |ds_i \times \delta \lambda_i| \quad (3.5)$$

где γ_i — удельная работа разрушения, отнесенная к единице площади трещины (новая площадь поверхности не удваивается), ds_i — элемент длины контура i -й трещины, $\delta \lambda_i$ — вектор виртуального перемещения контура

трещины. Значения γ_i , вообще говоря, зависят от положения и скоростей фронтов трещин, т. е. от l_j и dl_j/dt при $j = 1, \dots, m$. Интегрирование в (3.5) проводится по длине контура L_j , а суммирование — по всем трещинам, содержащимся в теле. При учете соотношения (3.2) формулу (3.5) приводим к виду

$$\delta A_f = - \sum_{j=1}^m \Gamma_j \delta l_j \quad (3.6)$$

где Γ_j — обобщенные силы сопротивления продвижению фронта трещины. Отметим, что обобщенные силы G_j и Γ_j , вообще говоря, зависят от определяемых в ходе решения обобщенных координат Лагранжа.

Рассмотрим, наконец, выражение для виртуальной работы сил инерции

$$\delta A_I = - \int_V \rho \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} \right) dV \quad (3.7)$$

где ρ — плотность материала, а интегрирование проводится по всему объему тела V . Подставляя в формулу (3.7) разложение поля перемещений \mathbf{u} ($x, t | 1$) согласно (3.1) и вариацию $\delta \mathbf{u}$ ($x, t | 1$) согласно (3.2), получим

$$\delta A_I = \sum_{j=1}^m Y_j \delta l_j + \sum_{k=1}^n I_k \delta q_k \quad (3.8)$$

где Y_j и I_k — обобщенные силы инерции.

Если динамические процессы сопровождаются ростом трещин по всем обобщенным координатам, то из (1.3), (3.3), (3.6) и (3.8) вытекает система $m + n$ дифференциальных уравнений второго порядка

$$G_j + Y_j = \Gamma_j, \quad Q_k + I_k = 0 \quad (j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n) \quad (3.9)$$

относительно неизвестных $l_1, \dots, l_m, q_1, \dots, q_n$. Эта система решается при задании значений всех обобщенных координат Гриффитса и Лагранжа, а также их производных по времени в некоторый начальный момент времени. В типичной ситуации движение системы начинается из состояния покоя при неподвижных фронтах трещины. Задача состоит в том, чтобы найти условия старта трещин, пути и скорости их распространения, а также условия остановки роста трещин или финального разрушения тела.

4. Покажем, как преодолеть трудности, связанные с переходом от одной системы определяющих уравнений к другой. Пусть начальное состояние системы «тело с трещинами — нагрузка» является субравновесным по всем обобщенным координатам Гриффитса. Тогда вместо (2.9) имеем

$$G_j < \Gamma_j, \quad Q_k + I_k = 0 \quad (j = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n) \quad (4.1)$$

Первая группа соотношений (4.1) обеспечивает неподвижность всех трещин, вторая группа описывает динамические процессы в теле при неподвижных трещинах. Соотношения (4.1) эквивалентны условиям (1.5). На первом этапе решаем вторую группу уравнений при заданных начальных условиях, накладываемых на обобщенные координаты Лагранжа, проверяя на каждом шаге выполнение неравенств из (4.1) при всех $j = 1, \dots, m$.

Пусть в некоторый момент t_* впервые достигается равенство $\delta_G A = 0$ при $\delta l_i > 0$. Если одновременно окажется выполненным условие (2.1) или (2.2), то это означает, что в момент t_* система перестала быть устойчивой по отношению к обобщенной координате l_i . Дальнейшая эволюция системы описывается при помощи соотношений

$$\begin{aligned} G_j < \Gamma_j, \quad G_i + Y_i = \Gamma_i, \quad Q_k + I_k = 0 \\ (j = 1, \dots, m, j \neq i; k = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.2)$$

из которых первая группа обеспечивает неподвижность трещин по отношению к остальным обобщенным координатам Гриффитса. Другие соотношения образуют систему $n + 1$ дифференциальных уравнений второго порядка относительно l_i, q_1, \dots, q_n . Начальные условия в момент t_* для обобщенных координат Лагранжа найдем по результатам интегрирования на предыдущем отрезке времени. Начальное значение l_i задано условиями задачи, а начальное значение производной dl_i/dt вместе с моментом старта t_* найдем, решая систему уравнений

$$G_i = \Gamma_i, \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{dl_i}{dt} \frac{\partial}{\partial l_i} + \sum_{k=1}^n \frac{dq_k}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} \right) (G_i - \Gamma_i) = 0 \quad (4.3)$$

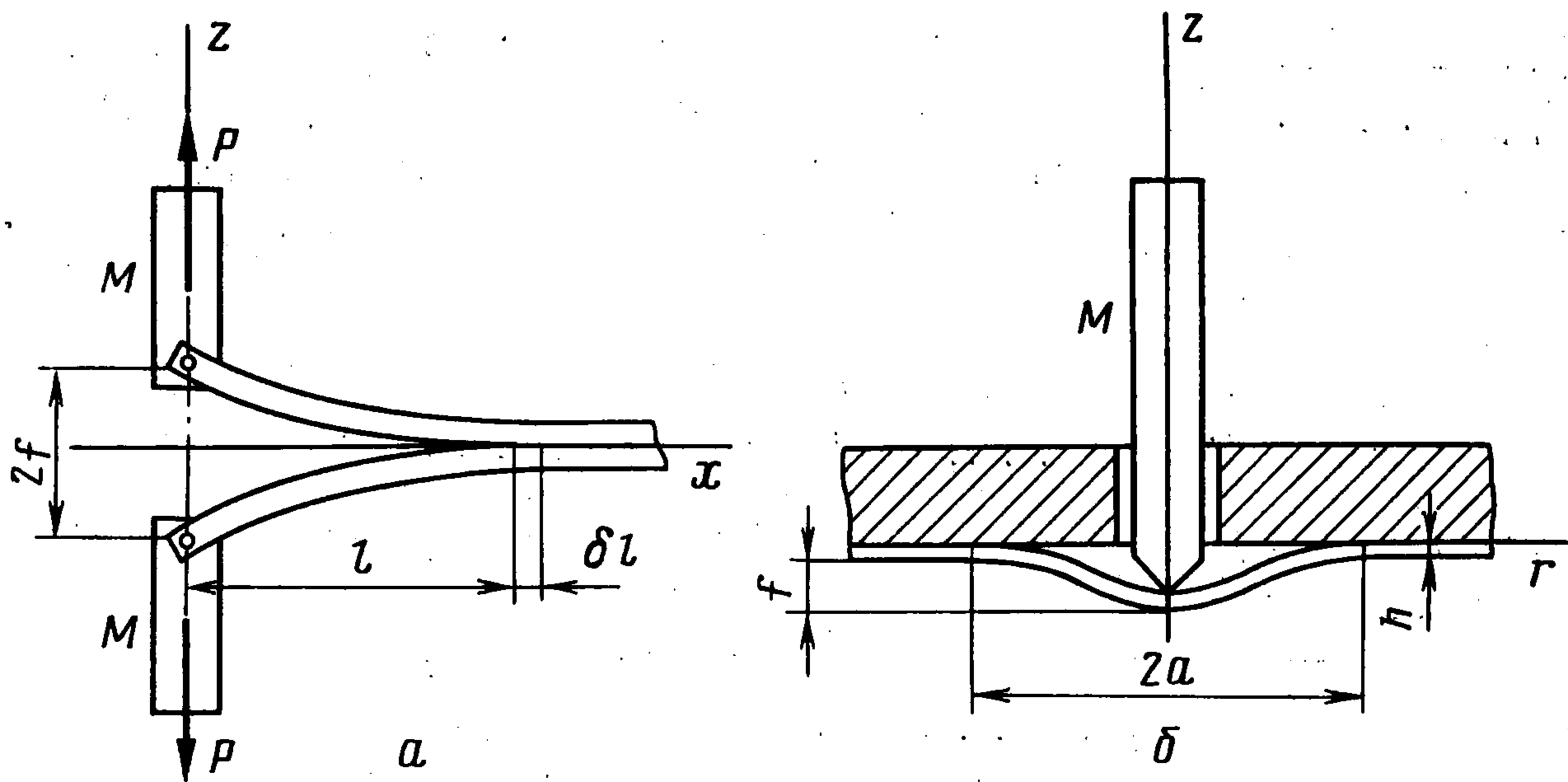
Второе из уравнений (4.3) означает выполнение условия (2.1) т. е. поддержание нейтрального состояния относительно обобщенной координаты l_i в малой окрестности $t > t_*$. Если работа $\delta_G A$ при $t = t_* + 0$ испытывает скачок, то вместо уравнений (4.3) берем следующие:

$$G_i(t_*) = \Gamma_i(t_*), \quad G_i(t_* + 0) = \Gamma_i(t_* + 0) \quad (4.4)$$

Поскольку обобщенные силы (в частности, обобщенные силы сопротивления) зависят от скорости роста соответствующих трещин, то уравнения (4.4) определяют как момент старта трещины по координате l_i , так и ее начальную скорость.

Аналогично устанавливаются условия старта трещин по другим обобщенным координатам Гриффитса. При этом неравенства из системы (3.9) заменяются на соответствующие равенства, которые добавляются к уравнениям, которые интегрировались на предыдущем этапе. Так, если трещины растут по m_1 обобщенным координатам l_1, \dots, l_{m_1} , где $m_1 < m$, то вместо (4.2) решим систему $G_j + Y_j = \Gamma_j, Q_k + I_k = 0$ при $j = 1, \dots, m_1; k = 1, \dots, n$ и при выполнении неравенств $G_j < \Gamma_j$ ($j = m_1 + 1, \dots, m$). Рост трещины по какой-либо из обобщенных координат прекращается, как только нарушается соответствующее условие $G_i + Y_i = \Gamma_i$. После остановки роста по обобщенной координате уравнение относительно этой координаты исключается из совместной системы уравнений и заменяется неравенством $G_i < \Gamma_i$, обеспечивающим неподвижность трещины. Вообще контроль условий $G_j + Y_j \leq \Gamma_j$ и $dl_j/dt \geq 0$ при $j = 1, \dots, m$ должен осуществляться в течение всего процесса решения задачи.

5. Для модельных примеров рассмотрим некоторые «балочные» задачи. Задачи этого типа широко обсуждались в механике разрушения, начиная с работы И. В. Обреимова (1930). Обзор некоторых задач можно найти в [13].



Фиг. 2

Допустим, что тонкая упругая балка (или пластина в условиях цилиндрического изгиба) отдирается от абсолютно жесткого основания (фиг. 2, а). Отношение h/l толщины балки h к длине l отслоившегося участка, а также отношение f/l максимального прогиба f к длине l будем считать малыми по сравнению с единицей. Балку будем считать заземленной в сечении $x = l$ и нагруженной на свободном конце $x = 0$ силой $P(t) = P_0 F(t)$, где $P_0 = \text{const}$, а функция $F(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Прочность соединительного слоя будем характеризовать удельной работой разрушения γ , т. е. работой, которую надо затратить на продвижение отслоения балки на единицу площади. Будем вначале полагать удельную работу γ не зависящей от скорости распространения трещины dl/dt . Соединительный слой будем считать весьма тонким, пренебрегая деформированием части балки, расположенной при $x > l$.

Пусть масса системы M сосредоточена на конце балки $x = 0$. За обобщенную координату Лагранжа примем прогиб на конце f . Другой обобщенной координатой служит длина отслоения l . Для прогиба балки $w(x, t)$ при $0 \leq x \leq l$ примем аппроксимацию типа (3.1):

$$w(x, t | l) = f(t) [1 - (x/l)]^3 \quad (5.1)$$

Формула (5.1) означает, что динамический прогиб балки принят подобным статическому прогибу с изменяющейся во времени длиной отслоения $l(t)$ и перемещением на конце $f(t)$. Трещину считаем необратимой, т. е. $dl/dt \geq 0$. Ограничение $f \geq 0$ не накладываем, поскольку после «схлопывания» отслоения анализ прекращаем. Модель с двумя степенями свободы, разумеется, не может включить волновые процессы. Однако она позволяет проиллюстрировать постановку и процедуру решения типичных задач о старте, динамическом росте и остановке трещин.

Выражение для потенциальной энергии деформации балки имеет вид $U = 3/2 B f^2 / l^3$, где B — жесткость балки при изгибе. Например, для балки шириной b имеем $B = E b h^3 / 12$, где E — модуль Юнга.

Представим сумму виртуальных работ внешних и внутренних сил в виде $\delta A_e + \delta A_i = -\delta U + P \delta f \equiv G \delta l + Q \delta f$. Тогда

$$G = 3/2 B f^2 / l^4, \quad Q = P - 3 B f / l^3 \quad (5.2)$$

Виртуальная работа сил сопротивления росту отслоения $\delta A_f = -\gamma b \delta l$, откуда $\Gamma = \gamma b$. Для обобщенной силы инерции имеем выражение $I = -M (d^2 f/dt^2)$, в то время как $Y \equiv 0$. Таким образом, вместо (4.1) и (4.2) получаем

$$\frac{1}{2} B f^2 / l^4 \leq \gamma b, \quad M d^2 f / dt^2 + 3 B f / l^3 = P_0 F(t) \quad (5.3)$$

Знак неравенства в первом соотношении отвечает неподвижной (субравновесной) трещине. Если это неравенство выполнено, то второе соотношение интегрируется при $l = \text{const}$. В частности, если при $t = 0$ система находится в субравновесном состоянии, то $l = l_0$, где l_0 — начальный размер отслоения. Первое достижение знака равенства отвечает страгиванию трещины. Момент страгивания t_* и начальную скорость $(dl/dt)_*$ найдем из уравнений (4.3). При учете формул (5.2) эти уравнения запишем в виде

$$\frac{1}{2} B f^2 / l^4 = \gamma b, \quad dl/dt = \frac{1}{2} (l/f) df/dt \quad (5.4)$$

Пусть масса на конце отслоения $M \sim N \rho b h l$, где N — числовой множитель. Тогда из второго уравнения (5.4) получим оценку $(dl/dt)_* \sim N^{-1/2} (h/l) c_0$, где $c_0 = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения продольных волн. При $h/l \ll 1$, $N \gg 1$ скорость роста трещины значительно меньше, чем скорость распространения волн. Таким образом, модель внутренне непротиворечива.

Для более детального обсуждения численных результатов перейдем к безразмерным переменным

$$\varphi = \frac{f}{f_0}, \quad \lambda = \frac{l}{l_0}, \quad \tau = \frac{\omega_0 t}{2\pi}, \quad \beta = \frac{f_0}{f_\gamma}$$

$$\left(f_0 = \frac{P_0 l^3}{3B}, \quad f_\gamma^2 = \frac{2\gamma b l_0^4}{9B}, \quad \omega_0^2 = \frac{3B}{M l_0^3} \right)$$

Здесь f_0 — статический прогиб на конце балки при действии силы P_0 , f_γ — критическое значение статического прогиба, ω_0 — собственная частота балки (все перечисленные параметры взяты при начальном значении $l = l_0$). Безразмерный параметр β характеризует отношение силы P_0 (или соответствующего квазистатического прогиба) к критическому значению по условию устойчивости при квазистатическом нагружении и при фиксированной длине l_0 .

Соотношения (5.3) в безразмерных переменных принимают вид

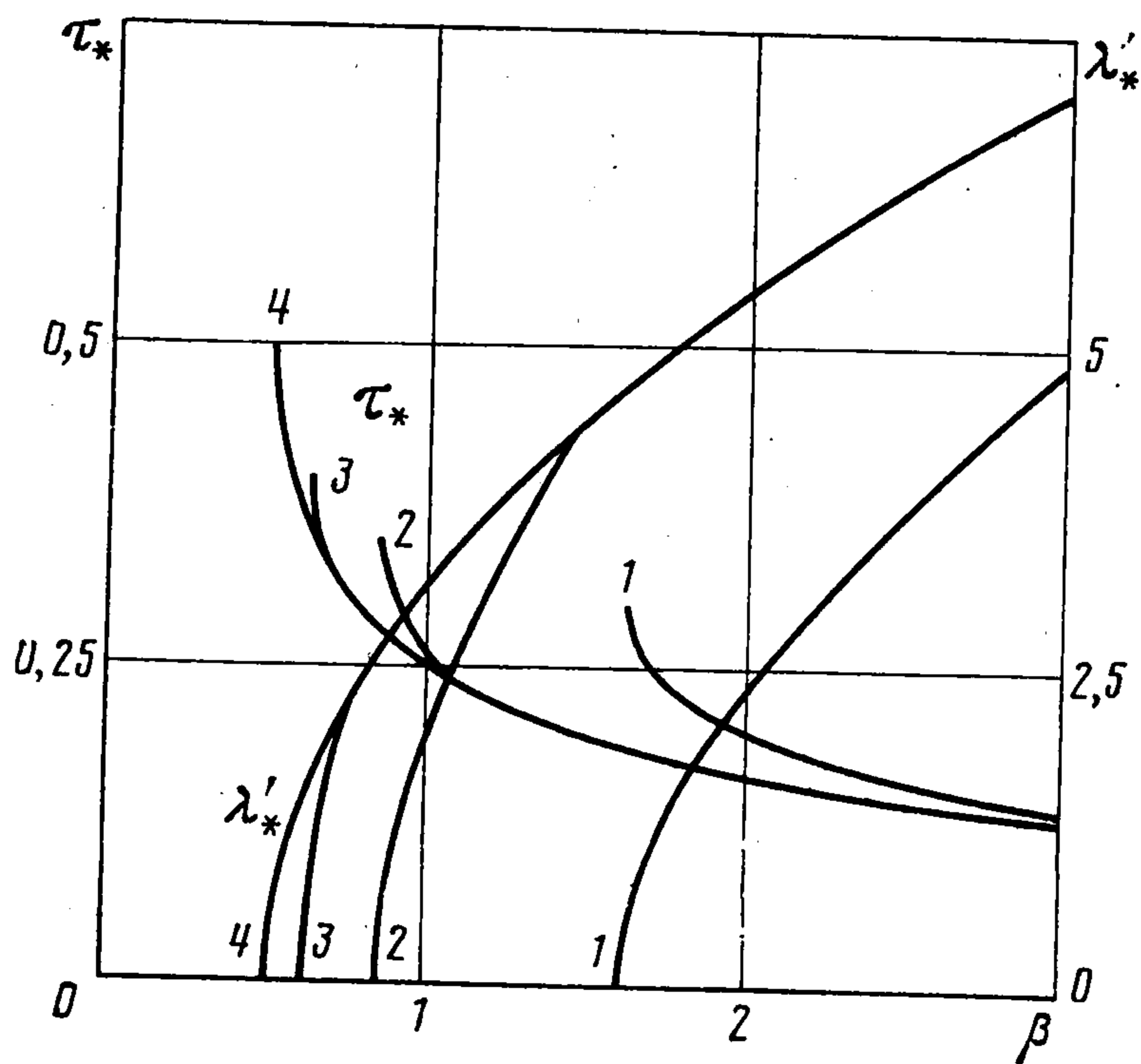
$$\beta \varphi / \lambda^2 \leq 1, \quad \varphi'' + 4\pi^2 \varphi / \lambda^3 = 4\pi^2 F(\tau) \quad (5.5)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ . Для нахождения момента старта τ_* и начальной скорости $\lambda_*' \equiv \lambda'(\tau_*)$ вместо (5.4) получаем систему уравнений

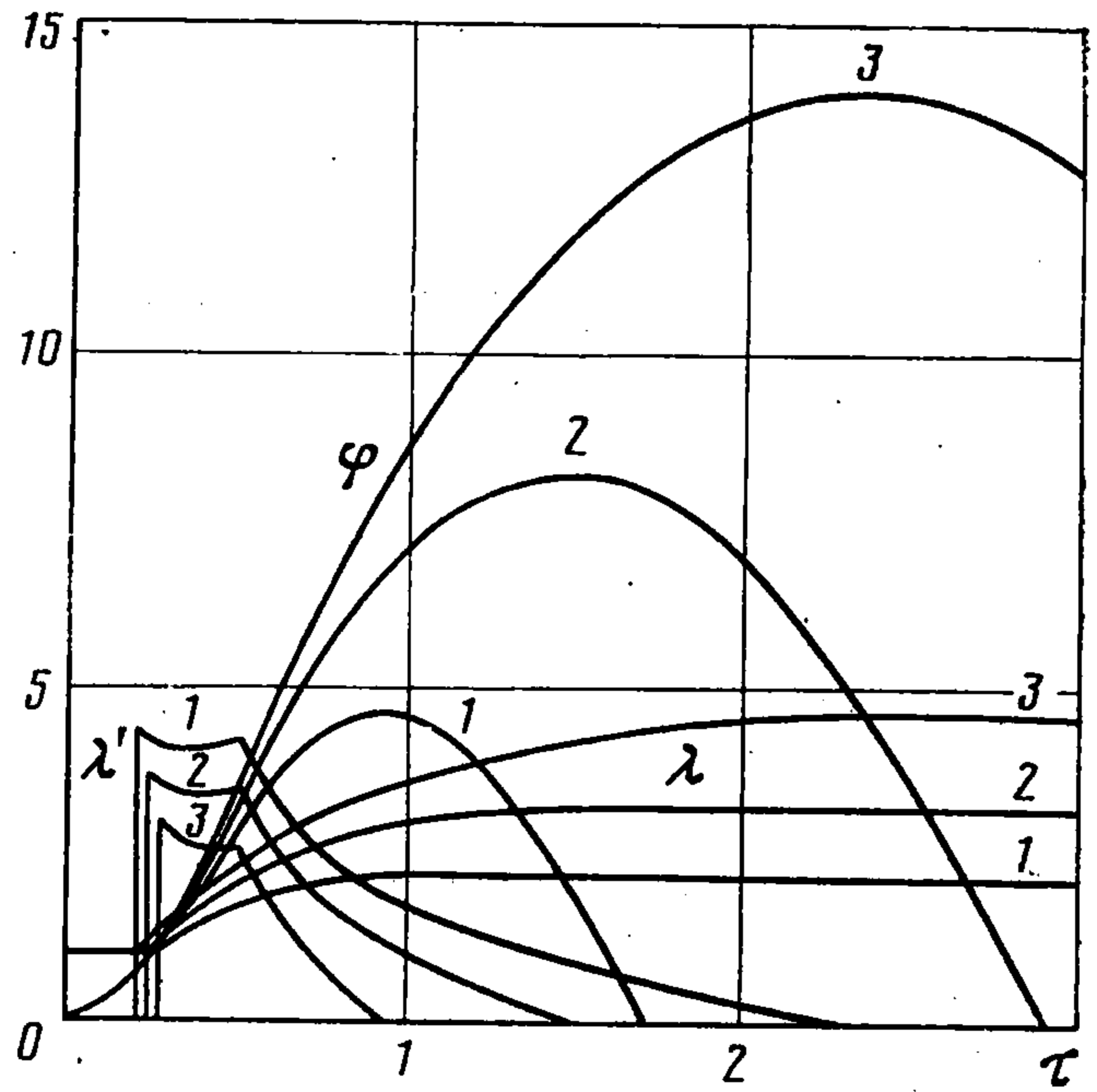
$$\beta \varphi = 1, \quad \varphi' - 2\varphi \lambda_*' = 0 \quad (5.6)$$

Пусть $F(\tau) = 1$ при $0 \leq \tau \leq \tau_1$ и $F(\tau) = 0$ при $\tau > \tau_1$. Движение начинается и состояния покоя $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\lambda(0) = 1$, $\lambda'(0) = 0$. На начальной стадии, когда $\lambda = 1$, $\beta \varphi < 1$, решение второго уравнения (5.5) имеет вид $\varphi = 1 - \cos 2\pi\tau$. При $\tau_* > \tau_1$ получаем, что $\varphi = \cos 2\pi(\tau_1 - \tau) - \cos 2\pi\tau$. Момент старта τ_* и начальную скорость λ_*' найдем, решая систему уравнений (5.6). Удобнее вначале выразить β через τ_* , используя первое уравнение. Тогда

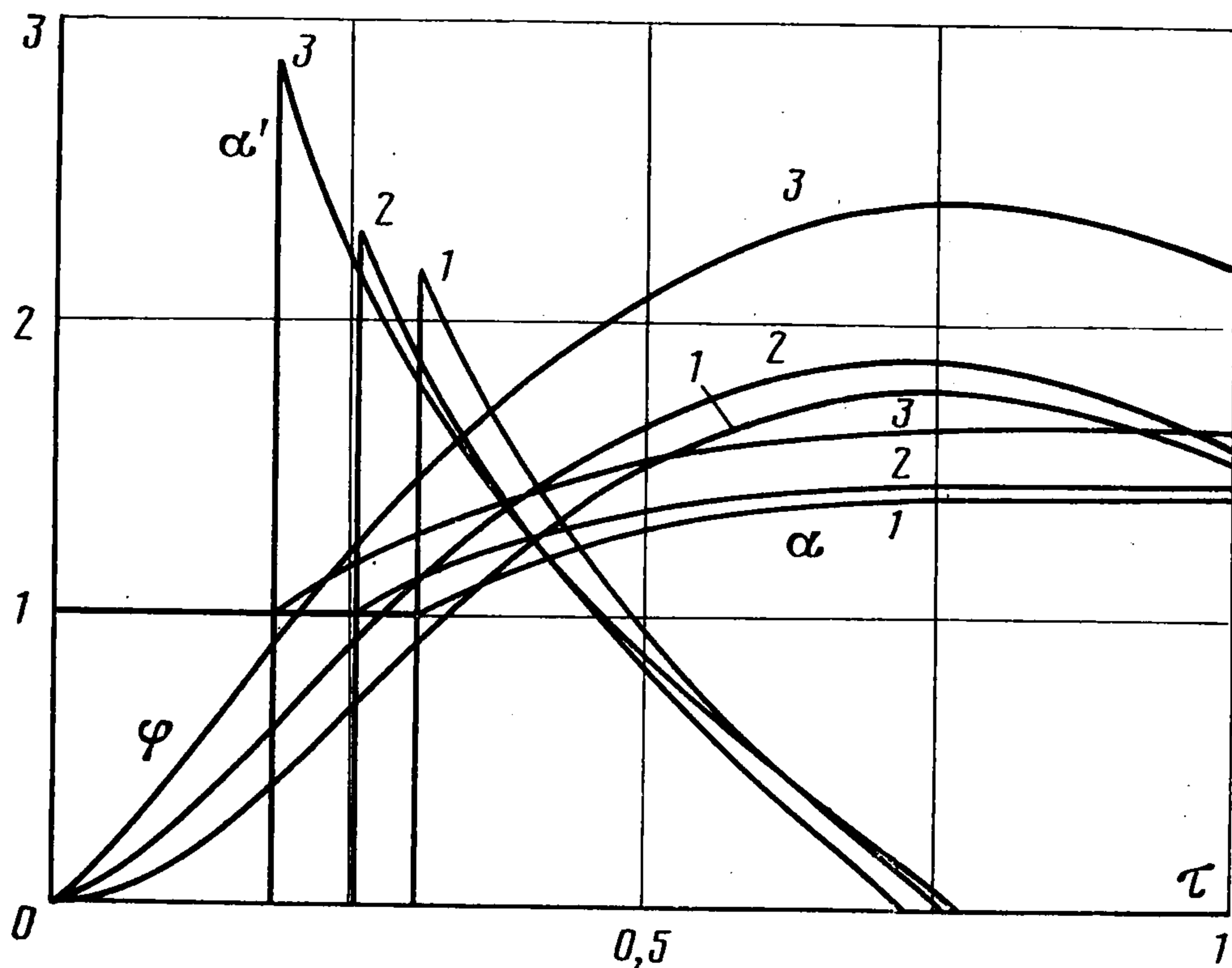
$$\beta = \begin{cases} (1 - \cos 2\pi\tau_*)^{-1}, & \tau_* < \tau_1 \\ [\cos 2\pi(\tau_1 - \tau_*) - \cos 2\pi\tau_*]^{-1}, & \tau_* > \tau_1 \end{cases} \quad (5.7)$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

после чего второе из уравнений (5.6) дает

$$\lambda_{**}' = \begin{cases} \pi\beta \sin 2\pi\tau_*, & \tau_* < \tau_1 \\ \pi\beta [\sin 2\pi(\tau_1 - \tau_*) + \sin 2\pi\tau_*]^{-1}, & \tau_* > \tau_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Аналитические формулы для момента остановки трещины τ_{**} и ее конечного размера $\lambda_{**} \equiv \lambda(\tau_{**})$ не выписываем.

Некоторые численные результаты представлены на фиг. 3, где безразмерное время τ_* до старта трещины и безразмерная начальная скорость λ_{**}' отложены в функции от параметра нагружения β и безразмерной продолжительности импульса τ_1 . Кривые 1—4 соответствуют значениям $\tau_1 = 0,1; 0,2; 0,3; 0,5$. Значение $\beta = 1/2$ отвечает нагрузке, при которой динамический прогиб достигает критического значения только в момент максимального прогиба балки. При более кратковременных импульсах для старта требуется более высокий уровень нагрузки. Кривые $\lambda_{**}' = \lambda_{**}'(\beta)$ на фиг. 3 напоминают экспериментальные зависимости между коэффициентом интенсивности напряжений (в данном случае его аналогом может служить параметр β) и скоростью распространения трещины [4, 5].

Фиг. 4 иллюстрирует изменение во времени безразмерного прогиба φ (кривые с одним максимумом), безразмерной длины λ (квазимонотонные кривые) и безразмерной скорости λ' роста отслоения. При этом принято, что $\tau_1 = 1/2$, т. е. продолжительность действия силы составляет половину периода свободных колебаний балки начальной длины. Кривые 1, 2, 3 построены соответственно при $\beta = 1; 1,25; 1,5$. Старт трещины происходит при достижении безразмерным прогибом φ критического значения $\varphi_* = \beta^{-1}$. Момент остановки трещины τ_{**} и ее конечная длина λ_{**} также существенно зависят от уровня нагрузки, заданного при помощи параметра β . Второй максимум на кривых $\lambda' = \lambda'(\tau)$ отвечает моменту $\tau = \tau_1$, т. е. прекращению действия внешней силы.

6. Для другого примера возьмем тонкую упругую пластину, скрепленную с абсолютно жестким основанием и имеющую круговое в плане отслоение. По центру отслоения в момент $t = 0$ совершается удар грузом M с начальной скоростью соударения V_0 (фиг. 2, б). При $t < 0$ отслоение имеет плоскую круговую в плане форму с радиусом a_0 и не напряжено. При $t > 0$ центр отслоения получает прогиб $f > 0$, а радиус отслоения a может начать расти из-за разрушения границы. Массу отслоившейся части пластины считаем малой по сравнению с массой груза M , а прогиб пластины f малым по сравнению с радиусом отслоения a . Аппроксимируем прогиб отслоения при помощи выражения

$$w(r, t | a) = \frac{P}{16\pi D} \left(a^2 - r^2 + 2r^2 \ln \frac{r}{a} \right) \quad (6.1)$$

удовлетворяющего граничным условиям для пластины, заземленной по круговому контуру $r = a$. Удельную работу разрушения γ примем постоянной.

Виртуальная работа внешних сил в данном случае $\delta A_e = Mg\delta f$, где g — ускорение свободного падения (груз падает вертикально), виртуальная работа внутренних сил $\delta A_i = -\delta U$, где U — потенциальная энергия изгиба отслоения. При учете (6.1) в рамках линейной теории изгиба пластин имеем $U = 8\pi f^2 D/a^2$, где D — цилиндрическая жесткость, $f = Pa^2/(16\pi D)$. Виртуальная работа сил инерции $\delta A_I = -M(d^2 f/dt^2)\delta f$, виртуальная работа разрушения $\delta A_f = -2\pi a\gamma\delta a$. Отсюда находим обобщенные силы

$$\begin{aligned} G &= 16\pi Df^2/a^3, \quad \Gamma = 2\pi a\gamma, \quad Q = Mg - 16\pi Df/a^2 \\ I &= -Md^2 f/dt^2, \quad Y \equiv 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Соотношения (4.1) и (4.2), как и в предыдущем примере, приводят к дифференциальному уравнению относительно обобщенной координаты Лагранжа f и неравенству относительно обобщенной координаты Гриффитса l . При учете формул (6.2) получаем

$$16\pi Df^2/a^3 \leq 2\pi a\gamma, \quad Md^2 f/dt^2 + 16\pi Df/a^2 = Mg \quad (6.3)$$

Начальные условия имеют вид $a(0) = a_0$, $a'(0) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) = V_0$, где V_0 — скорость груза в момент соударения.

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{f}{f_0}, \quad \alpha = \frac{a}{a_0}, \quad \tau = \frac{\omega_0 t}{2\pi}, \quad \beta = \frac{f_0}{f_\gamma} \\ \left(f_0 &= \frac{Mga_0^2}{16\pi D}, \quad f_\gamma^2 = \frac{a_0^4 \gamma}{16D}, \quad \omega_0^2 = \frac{16\pi D}{Ma^2} \right) \end{aligned}$$

При этом f_0 имеет смысл статического прогиба отслоения с начальным радиусом a_0 под силой Mg , f_0 — равновесное значение этого прогиба, т. е. такое значение, при котором отслоение радиусом a_0 может начать расти даже при квазистатическом нагружении силой Mg . Кроме того, введена собственная частота колебаний ω_0 для отслоения с радиусом a_0 и сосредоточенной в центре массой M . В результате вместо (6.3) приходим к соотношениям

$$\beta\varphi \leq \alpha^2, \varphi'' + 4\pi^2\varphi/\alpha^2 = 4\pi^2 \quad (6.4)$$

при начальных условиях $\alpha(0) = 1$, $\alpha'(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi_0'$, где $\varphi_0' = 2\pi V_0/(\omega_0 f_0)$.

Пока $\beta\varphi(\tau) < 1$, отслоение не растет. Поскольку при любых значениях $V_0 \geq 0$ и $a = a_0$ максимальный прогиб под грузом не меньше, чем $2f_0$, то рост отслоения имеет место при параметре нагружения $\beta > 1/2$. Этот рост начинается при $\tau = \tau_*$, где τ_* — корень уравнения $\beta\varphi(\tau) = 1$, а $\varphi(\tau)$ — решение второго уравнения (6.4) при $\alpha = 1$. Вычисления приводят к уравнению $1 - \cos \tau_* + \varphi_0' \sin \tau_* = 1/\beta$. Начальную скорость роста $\alpha_*' \equiv \alpha'(\tau_*)$ отслоения найдем из условия $\beta\varphi'(\tau_*) = 2\alpha'(\tau_*)$. Отсюда $\alpha_*' = \beta(\sin \tau_* - \varphi_0' \cos \tau_*)$ и т. д.

На фиг. 5 показано изменение в безразмерном времени τ безразмерных значений радиуса отслоения $\alpha(\tau)$, скорости $\alpha'(\tau)$, а также прогиба в центре $\varphi(\tau)$ при следующих значениях параметра начальной скорости груза: $\varphi_0' = 0; 2; 5$ (кривые 1, 2, 3 соответственно). В пересчете на размерную скорость соударения V_0 эти значения весьма умеренные, так что фиг. 5 иллюстрирует поведение отслоения при низкоскоростном ударе. С увеличением скорости соударения время τ_* до начала роста трещины возрастает, а также возрастает продолжительность стадии роста $\tau_{**} - \tau_*$. Вычисления обнаруживают незначительные нарушения монотонной зависимости момента остановки от скорости соударения (фиг. 5).

Автор благодарит К. А. Углова за помощь в вычислениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Уравнения роста усталостных трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 153—160.
2. Болотин В. В. Устойчивость и рост трещин при непотенциальных внешних нагрузках // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 5. С. 148—157.
3. Bolotin V. V. A unified approach to damage accumulation and fatigue crack growth // Eng. Fract. Mech. 1985. V. 22. № 3. P. 387—398.
4. Партон В. З., Борисковский В. Г. Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239 с.
5. Knauss W. G., Ravi-Chandar K. Fundamental considerations in dynamic fracture // Eng. Fract. Mech. 1986. V. 23. N 1. P. 9—20.
6. Computational methods in the mechanics of fracture / Ed. by S. N. Atluri. Amsterdam et al.: North-Holland, 1986. 414 p.
7. Ripling E. J., Crosley P. B., Wiersma S. J. A review of static crack arrest concepts // Eng. Fract. Mech. 1986. V. 23. N 1. P. 21—33.
8. Emery A. F., Kobayashi A. S., Love W. J., Place B. W., Lee C., Chao Y. H. An experimental and analytical investigation of axial crack propagation in long pipes // Eng. Fract. Mech. 1986. V. 23. N 1. P. 215—226.
9. Макаров Г. И. Расчетная модель деформирования трубы газопровода при протяженном разрушении // Изв. вузов. Машиностроение. 1988. № 8. С. 27—23.
10. Kanninen M., O'Donoghue P., Grigory S., et al. Dynamic fracture mechanics analysis and experimentations for the arrest of ductile fracture in gas transmission pipelines // Proc. Pipeline Technology Conference. Ostende — Belgium. Antwerpen: K. VIV, 1990. V. B. P. 16.1—16.13.
11. Болотин В. В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение. 1990. 447 с.
12. Раус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 1. М.: Наука, 1983. 463 с.
13. Слепян Л. И. Механика трещин. Л.: Судостроение, 1990. 296 с.