

УДК 539.375

© 1992 г. Л. А. Фильштинский, Л. И. Фоменко

ДИНАМИЧЕСКАЯ НАПРЯЖЕННОСТЬ ПРОВОДЯЩЕГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С КРИВОЛИНЕЙНЫМ РАЗРЕЗОМ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

(СОСТОЯНИЕ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ)

При механическом возбуждении диа(пара)-магнетика, находящегося в статическом магнитном поле, в теле возникают наведенные (вихревые) токи, что приводит к появлению объемных сил Лоренца. Учет этих сил дает дополнительный тензор — максвелловских напряжений, вносящий существенные поправки в напряженное состояние тела. Ниже рассматривается краевая задача магнитоупругости для полупространства, ослабленного криволинейной полостью-разрезом. Задача сводится к сингулярному интегральному уравнению. Приводятся результаты расчетов, характеризующие зависимость коэффициента интенсивности напряжений K_{III} от конфигурации разреза, величины приложенного магнитного поля, частоты возбуждения. Аналогичная задача для одиночного прямолинейного разреза в неограниченной диа(пара)-магнитной среде изучена в [1].

1. Исходные соотношения линейной магнитоупругости. Постановка задачи. Полная система уравнений магнитоупругости имеет вид [1—3]

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{V} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{D}' = \mathbf{j}, \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e, \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (1.1)$$

$$\partial_j \sigma_{ij} + \rho_e E_i + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i = \rho u_i'' \quad (1.2)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \alpha (\mathbf{v} \times \mathbf{H}), \mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H} - \alpha (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \quad (1.3)$$

$$\mathbf{j}' = \rho_e \mathbf{v} + \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \alpha = \varepsilon \mu_e - \varepsilon_0 \mu_0, \mathbf{v} = \mathbf{u}'$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}, \varepsilon_{ij} = 1/2 (\partial_j u_i + \partial_i u_j), \partial_i = \partial / \partial x_i$$

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_\tau = 0, [\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}]_\tau = 0$$

$$[\mathbf{B}]_n = 0, [\mathbf{D}]_n = 0, [\sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \rho_e \mathbf{v}]_n = 0 \quad (1.4)$$

$$[\sigma_{ij} + t_{ij}] n_j = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

$$t_{ij} = E_i D_j + H_i B_j - 1/2 \delta_{ij} (E_k D_k + H_k B_k)$$

Соотношения (1.1) — уравнения Максвелла, (1.2) — уравнения движения, (1.3) — материальные уравнения, (1.4) — граничные условия на поверхности раздела сред; \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{D} , \mathbf{B} — напряженности и потоки электрического и магнитного полей соответственно; ε , ε_0 и μ_e , μ_0 — электрическая и магнитная проницаемости вещества и вакуума; ρ_e — пространственная плотность электрического заряда; \mathbf{j} — плотность тока; ρ — плотность вещества; u_i , σ_{ij} — механические перемещения и напряжения; t_{ij} — максвелловские напряжения; μ , λ — постоянные Ламе; δ_{ij} — символ Кронекера. Квадратные скобки обозначают скачок соответствующей величины на линии раздела сред.

Пусть в магнитной среде, находящейся в состоянии покоя, действует сильное магнитное поле H^0 . Внешнее возбуждение вызывает деформацию тела и соответственно электромагнитное поле, которое может быть описано малыми флуктуациями e, h . В дальнейшем предполагаем его квазистатическим [3].

Для таких материалов, как алюминий и медь, целесообразно упростить модель, приписав среде идеальную проводимость ($\sigma \rightarrow \infty$). В этом случае, полагая $H = H^0 + h$, $E = e$, получим вместо (1.1)–(1.4) следующую систему уравнений и граничных условий:

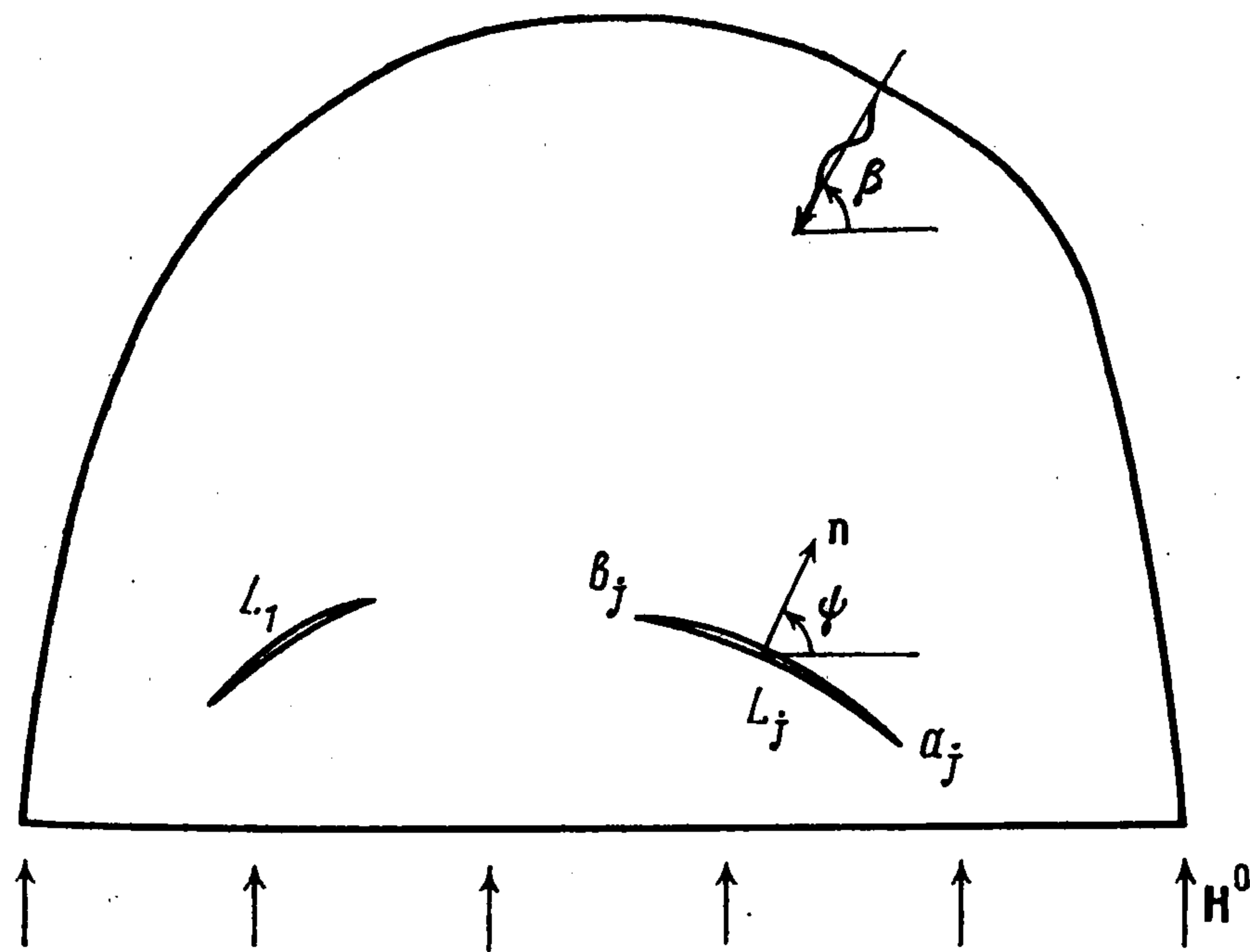
$$\begin{aligned} h &= \text{rot} (\mu \times H^0), \quad e = -\mu_e (u' + H^0) \\ \mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \text{grad div } u + \mu_e (\text{rot } h) \times H^0 &= \rho u'' \\ [h]_\tau &= 0, \quad [\mu_e h]_n = 0 \\ [\sigma_{ij} + \mu_e (H_i^0 h_j + H_j^0 h_i - \delta_{ij} H_k^0 h_k)] n_j &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Предположим теперь, что магнитоупругая среда неоднородна: в ней имеются туннельные вдоль оси x_3 разрезы L_j ($j = 1, 2, \dots, k$), а вектор начального магнитного поля $H^0 = (0, H_0, 0)$.

Соответствующее статическое поле (не зависящее от координаты x_3) описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 u_i^0 + (\lambda + \mu) \partial_i \theta_0 &= 0 \quad (i = 1, 2) \\ \mu \nabla^2 u_3^0 &= 0, \quad \nabla^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 \\ \theta_0 &= \partial_1 u_1^0 + \partial_2 u_2^0 \\ \sigma_{1i}^0 n_1 + \sigma_{i2}^0 n_2 &= X_{in} + \frac{1}{2} \kappa \mu_0 H_0^2 (1 + \kappa \sin^2 \psi) n_i \\ \sigma_{31}^0 n_1 + \sigma_{32}^0 n_2 &= X_{3n} \\ H_1^* &= \frac{1}{2} \kappa H_0 \sin 2\psi, \quad H_2^* = H_0 (1 + \kappa \sin^2 \psi) \\ n_1 &= \cos \psi, \quad n_2 = \sin \psi, \quad \kappa = \mu_e / \mu_0 - 1 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь X_{in} ($i = 1, 2$) — соответствующие компоненты вектора механического напряжения на берегах L_j , μ_e, μ_0 — соответственно магнитные



Фиг. 1

проницаемости материала и вещества, заполняющего полость трещины (вакуума), ψ — угол между нормалью к левому берегу L_j (при движении от начала a_j к концу b_j) и осью x_1 (фиг. 1), индекс 0 обозначает компоненты статического поля, звездочка относится к полости трещины.

Таким образом, статическое поле разделяется на состояние плоской и антиплоской деформации. Следует отметить также, что магнитные проницаемости многих диа(пара)-магнетиков практически совпадают с магнитной проницаемостью вакуума μ_0 . Поэтому можно положить $\kappa = 0$, что существенно упрощает формирование граничных условий.

Далее в силу соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \text{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{H}^\circ) = (H_0 \partial_2 u_1, -H_0 \partial_1 u_1, H_0 \partial_2 u_3) \\ (\text{rot } \mathbf{h}) \times \mathbf{H}^\circ &= (H_0^2 \nabla^2 u_1, 0, H_0^2 \partial_2^2 u_3) \end{aligned}$$

получаем полную систему уравнений и граничных условий, определяющих поле флуктуаций.

Плоская деформация:

$$(1 + \chi^2) \nabla^2 u_1 + \sigma_* \partial_1 \theta = c_2^{-2} u_1'' \quad (1.7)$$

$$\nabla^2 u_2 + \sigma_* \partial_2 \theta = c_2^{-2} u_2'', \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$$

$$\theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2, \quad \chi^2 = \mu_e H_0^2 / \mu, \quad \sigma_* = (\mu + \lambda) / \mu$$

$$h_1 = H_0 \partial_2 u_1, \quad h_2 = -H_0 \partial_1 u_1, \quad h_3 = 0 \quad (1.8)$$

$$e_1 = e_2 = 0, \quad e_3 = -\mu_e H_0 u_1'$$

$$\sigma_{11} \cos \psi + \sigma_{12} \sin \psi = \mu_0 \kappa H_0 \{h_2 + (h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi) \kappa \sin \psi\} \cos \psi + X_{1n}$$

$$\sigma_{21} \cos \psi + \sigma_{22} \sin \psi = \mu_0 \kappa H_0 (h_1 \cos \psi + h_2 \sin \psi) (1 + \kappa \sin^2 \psi) + X_{2n} \quad (1.9)$$

$$h_1^* = h_1 (1 + \kappa \cos^2 \psi) + \kappa h_2 \sin \psi \cos \psi$$

$$h_2^* = h_2 (1 + \kappa \sin^2 \psi) + \kappa h_1 \sin \psi \cos \psi$$

((1.7) — уравнения движения, (1.8) — компоненты электромагнитного поля, (1.9) — граничные условия на L_j ($j = 1, 2, \dots, k$)).

Антиплоская деформация:

$$\nabla^2 u_3 + \chi^2 \partial_2^2 u_3 = c_2^{-2} u_3'' \quad (1.10)$$

$$h_1 = h_2 = 0, \quad h_3 = H_0 \partial_2 u_3 \quad (1.11)$$

$$e_1 = -\mu_e H_0 u_3', \quad e_2 = e_3 = 0$$

$$\sigma_{31} \cos \psi + \sigma_{32} \sin \psi = X_{3n}, \quad h_3^* = h_3 = H_0 \partial_2 u_3 \quad (1.12)$$

((1.10) — уравнение движения, (1.11) — компоненты электромагнитного поля, (1.12) — граничные условия на L_j ($j = 1, 2, \dots, k$)).

Ниже рассматриваем задачу об антиплоской деформации (1.10)–(1.12) для проводящего полупространства $x_2 \geq 0$ с туннельными вдоль оси x_3 трещинами-разрезами L_j (фиг. 1). Пусть полупространство свободно от сил и граничит с вакуумом, причем статическое магнитное поле в вакууме $(0, H_0^*, 0)$, а в среде — $(0, H_0, 0)$ где $H_0 = \mu_0 H_0^* / \mu_e$. В качестве механического возбуждения возьмем либо сдвиговую нагрузку $X_{3n} = \text{Re} (X_3 e^{-i\omega t})$, действующую на поверхностях полостей, либо падающую из бесконечности магнитоупругую сдвиговую волну смещения

$$u_3^\circ = \text{Re} (U_3^\circ e^{-i\omega t}), \quad U_3^\circ = \tau \exp \{-i\gamma (x_1 \cos \beta + x_2 \sin \beta)\} \quad (1.13)$$

$$\gamma_2 = \omega/c_2, \quad \gamma = \gamma_2 / \sqrt{1 + \lambda^2 \sin^2 \beta}, \quad \tau = \text{const}$$

Ниже предполагаем, что частота возбуждения ω не слишком велика, в этом случае тепловыми эффектами можно пренебречь.

В этих условиях в теле с трещинами имеет место стационарный (колебательный) волновой процесс, причем компоненты полей σ_{3j} , t_{3j} ($j = 1, 2$) и h_3 обладают в вершинах дефектов характерной корневой особенностью, что приводит к необходимости учета влияния электромагнитных эффектов на коэффициент интенсивности напряжений.

Механическое поле в полупространстве с дефектом складывается из поля падающей волны (1.13), поля отраженной волны

$$u_3^{(s)} = \operatorname{Re} (U_3^{(s)} e^{-i\omega t}), U_3^{(s)} = \tau \exp \{-i\gamma (x_1 \cos \beta - x_2 \sin \beta)\} \quad (1.14)$$

и рассеянного поля, которое обобщая [4], представим в виде

$$U_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_L p(\zeta) \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta_1} E(\zeta_1; z_1) d\zeta_1 - \frac{\partial}{\partial \xi_1} E(\zeta_1; z_1) d\xi_1 \right\} + \int_L q(\zeta) E(\zeta_1; z_1) ds$$

$$E(\zeta_1; z_1) = H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1) + H_0^{(1)}(\gamma_2 r_1^*) \quad (1.15)$$

$$\zeta_1 = \xi_1 + \frac{i\xi_2}{\sqrt{1+\chi^2}}, \quad z_1 = x_1 + \frac{ix_2}{\sqrt{1+\chi^2}}$$

$$\zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in L = \cup L_j, \quad r_1 = |\zeta_1 - z_1|, \quad r_1^* = |\xi_1 - z_1|$$

Здесь $p(\zeta) = \{p_j(\zeta), \zeta \in L_j\}$, $q(\zeta) = \{q_j(\zeta), \zeta \in L_j\}$ — неизвестные «плотности», $H_0^{(1)}(x)$ — функция Ганкеля первого рода ненулевого порядка, ds — элемент дуги контура L . Плотность $p(\zeta)$ имеет простой механический смысл: $p(\zeta) = -^{1/2} [U_3(\zeta)]$, где $[U_3(\zeta)]$ — скачок амплитуды перемещения на L .

Функция $u_3 = \operatorname{Re} (U_3 e^{-i\omega t})$, где U_3 определяется в (1.15), является решением уравнения (1.10), автоматически удовлетворяет условию $\sigma_{32} = 0$ на границе полупространства, а также условиям излучения.

2. Интегральное уравнение краевой задачи. Коэффициент интенсивности напряжений. Граничное условие (1.12) при учете (1.3) представим в виде

$$c(\psi) \left\{ \frac{\partial}{\partial z_1} (U_3 + U_3^\circ + U_3^{(s)}) \right\}^\pm + \overline{c(\psi)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} (U_3 + U_3^\circ + U_3^{(s)}) \right\}^\pm = \pm X_3^\pm \quad (2.1)$$

$$X_3^+ = -X_3^- = X_3, \quad c(\psi) = \cos \psi + \frac{i \sin \psi}{\sqrt{1+\chi^2}}$$

Верхний знак соответствует левому берегу L_j (при движении от его начала a_j к концу b_j), ψ — угол между положительной нормалью к левому берегу и осью x_1 .

В соответствии с (2.1) потребуем, чтобы вектор механического напряжения непрерывно продолжался через разрезы. Реализуя предписанные в (2.1) операции, находим связь между плотностями

$$q(\zeta) = \frac{1}{4i} \frac{\chi^2 \sin 2\psi}{\sqrt{1+\chi^2}} \frac{dp}{ds} \quad (2.2)$$

В силу (2.2) краевое условие достаточно выполнить на одном из берегов L_j .

Подставляя в граничное условие предельные значения входящих туда функций, приходим к следующему сингулярному интегро-дифференциальному уравнению:

$$\int_L \frac{df}{ds} g(\zeta; \zeta_0) ds + \int_L f(\zeta) G(\zeta; \zeta_0) ds = N(\zeta_0)$$

$$g(\zeta; \zeta_0) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} \right) + \frac{i\gamma_2 \chi^2 \sin 2\psi}{4\sqrt{1+\chi^2}} \{H_1(\gamma_2 r_{10}) \operatorname{Re}(c(\psi_0) e^{-i\alpha_{10}}) +$$

$$+ H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) \operatorname{Re}(c(\psi_0) e^{-i\alpha_{10}^*})\} + \frac{\chi^2 \sin 2\psi}{2\pi\sqrt{1+\chi^2}} \operatorname{Re} \left(\frac{c(\psi_0)}{\zeta_1 - \zeta_{10}} \right)$$

$$G(\zeta; \zeta_0) = \frac{\gamma_2^2}{4i} \{H_2(\gamma_2 r_{10}) \operatorname{Im}(\overline{a(\psi)} \overline{c(\psi_0)} e^{2i\alpha_{10}}) + H_0^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \operatorname{Im}(a(\psi) \overline{c(\psi_0)}) +$$

$$+ H_0^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) \operatorname{Im}(a(\psi) c(\psi_0)) + H_2^{(1)}(\gamma_2 r_{10}^*) \operatorname{Im}(\overline{a(\psi)} c(\psi_0) e^{-2i\alpha_{10}^*})\} \quad (2.3)$$

$$N(\zeta) = \frac{2}{\mu} X_3 + 2i\tau\gamma \{\cos(\psi - \beta) \exp(-i\gamma(\xi_1 \cos \beta + \xi_2 \sin \beta)) +$$

$$+ \cos(\psi + \beta) \exp(-i\gamma(\xi_1 \cos \beta - \xi_2 \sin \beta))\}$$

$$2p(\zeta) = -f(\zeta) = -[U_3(\zeta)], \quad \zeta_0 \in L_j \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

$$r_{10}^* = |\bar{\xi}_1 - \zeta_{10}|, \quad r_{10} = |\zeta_1 - \zeta_{10}|$$

$$\alpha_{10}^* = \arg(\bar{\xi}_1 - \zeta_{10}), \quad \alpha_{10} = \arg(\zeta_1 - \zeta_{10})$$

Интегральное уравнение необходимо решать совместно с дополнительными условиями

$$\int_{L_j} df = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k) \quad (2.4)$$

Соотношения (2.3) и (2.4) полностью определяют решение в классе h_0 функций неограниченных на концах L_j [5].

Получим формулу для определения коэффициента механических напряжений в вершинах дефекта. Для этого произведем параметризацию контура L_j : $\zeta = \zeta(\delta)$, $\zeta_0 = \zeta(\delta_0)$, $-1 \leq \delta$, $\delta_0 \leq 1$. В соответствии этим положим

$$\frac{df}{ds} = \frac{\Omega(\delta)}{s'(\delta)\sqrt{1-\delta^2}}, \quad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta}, \quad \Omega(\delta) \in H[-1; 1] \quad (2.5)$$

Сингулярная часть напряжений σ_n на продолжении за вершину дефекта определяется из (1.15) и (1.3) и имеет вид

$$\sigma_n = \sigma_{13} \cos \psi + \sigma_{23} \sin \psi = \operatorname{Re}(S_n e^{-i\omega t}) \quad (2.6)$$

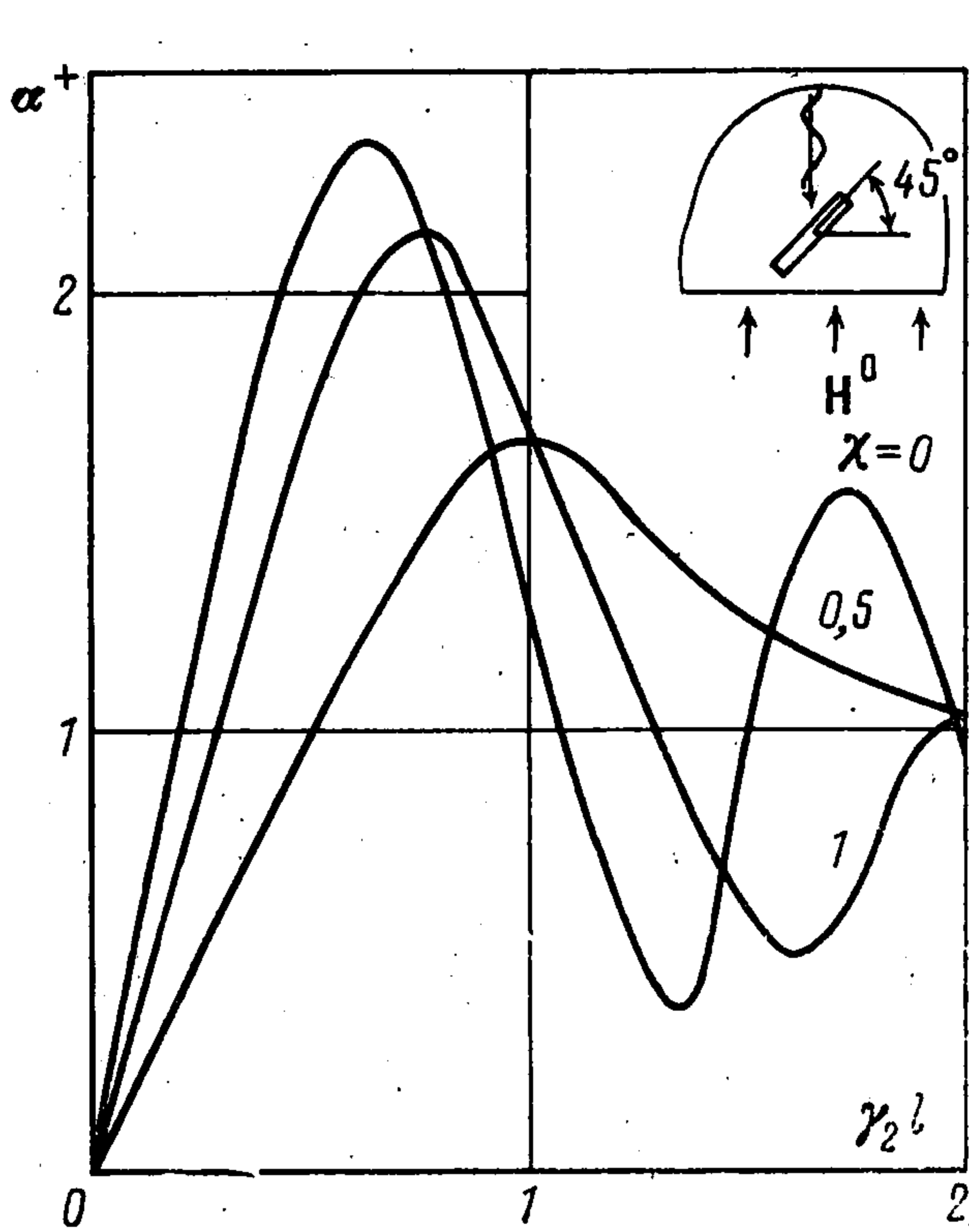
$$S_n = \frac{\mu}{2\pi} \int_L \frac{df}{ds} \left\{ \operatorname{Im} \left(\frac{c(\psi_c)}{a(\psi)} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d(\psi)}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{c(\psi_c)}{a(\psi_c)} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \right) \right\}, \quad d(\psi) = \frac{\chi^2 \sin 2\psi}{\sqrt{1+\chi^2}}$$

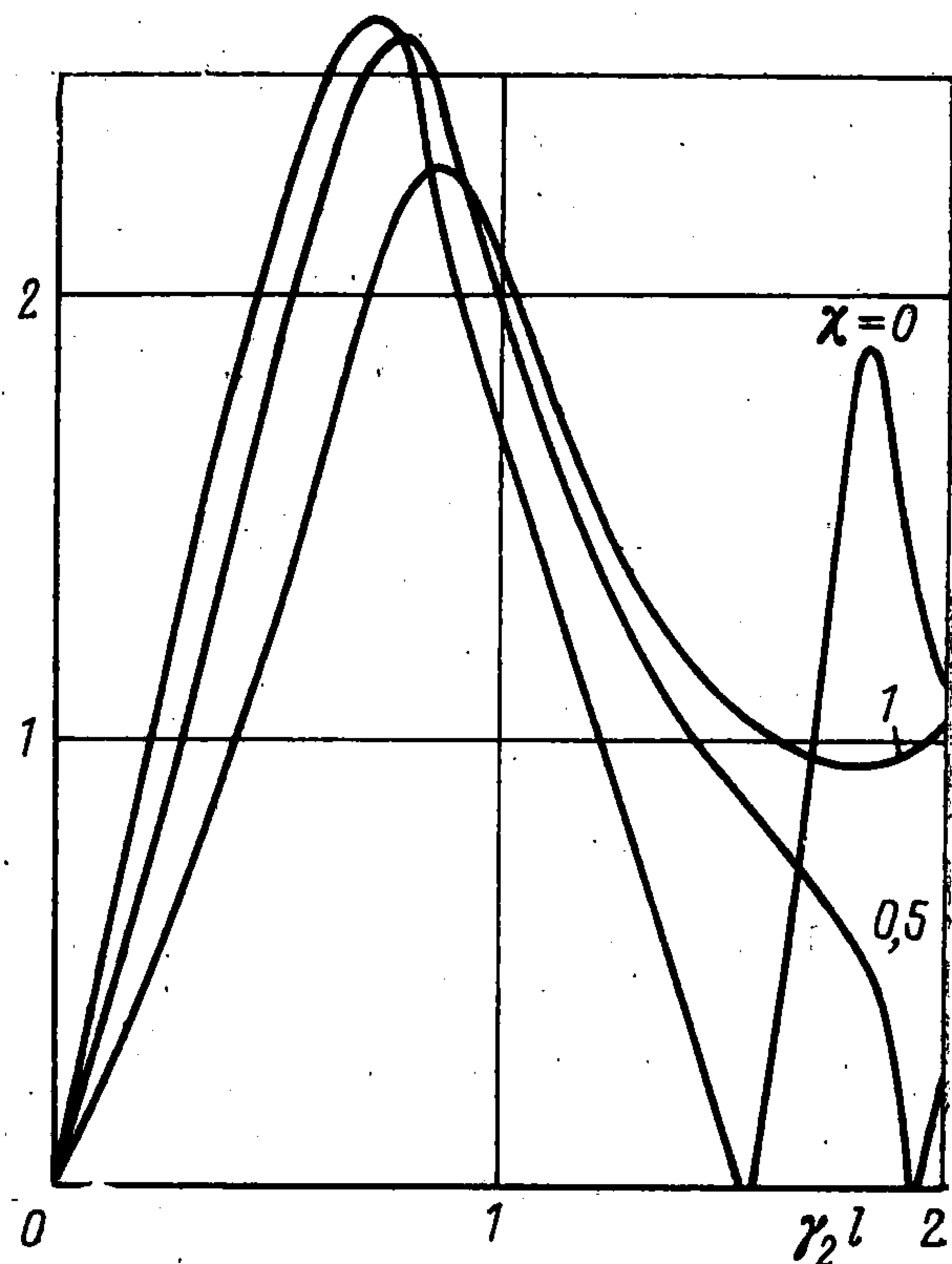
где ψ_c — угол нормали к левому берегу L_j в вершине c ($c = a$ или b). Асимптотический анализ этого выражения при учете формулы (2.5) дает (нижний знак относится к вершине $c = b$)

$$S_n = -\frac{\mu}{2} \frac{\Omega(\mp 1)}{\sqrt{2\pi s'(\mp 1)}} \left(\sqrt{1+\chi^2} + \frac{\chi^4 \sin^2 2\psi_c}{4\sqrt{1+\chi^2}} \right) (1 + \chi^2 \sin^2 \psi_c)^{-1} \quad (2.7)$$

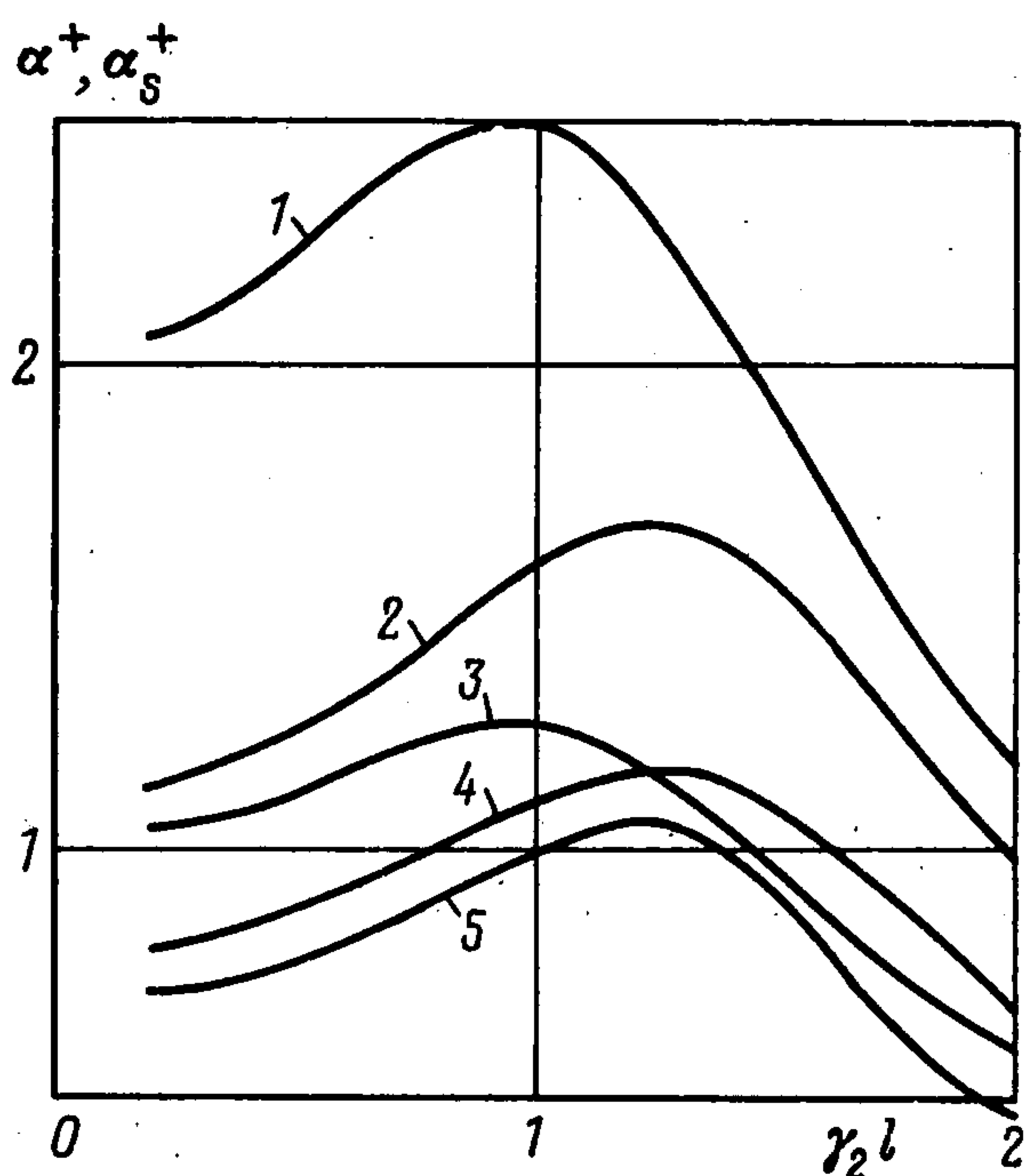
$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \operatorname{Re}(S_n e^{-i\omega t})$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, при наличии предварительного статического магнитного поля происходит перераспределение напряжений σ_{3j} ($j = 1, 2$) у вершины дефекта по сравнению с ситуацией, когда магнитное поле отсутствует.

Суммарный коэффициент интенсивности, учитывающий как механическую, так и максвелловскую части тензора напряжений, определяется через сингулярную часть выражения

$$Q_n = (S_{13} + T_{13}) \cos \psi + (S_{23} + T_{23}) \sin \psi, \quad t_{ij} = \operatorname{Re} (T_{ij} e^{-i\omega t}) \quad (2.8)$$

Вводя сюда первые три соотношения (1.5) и формулу $t_{3j} = \mu_0 (H_3^0 h_j + H_j^0 h_3)$, находим

$$Q_n = \mu (\partial_1 U_3 \cos \psi + (1 + \chi^2) \partial_2 U_3 \sin \psi)$$

Учитывая асимптотику Q_n , получаем формулу для суммарного коэффициента интенсивности

$$K_{III}^{(s)} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \operatorname{Re} (Q_n e^{-i\omega t}) = - \frac{\mu \sqrt{\pi(1+\chi^2)}}{2 \sqrt{s'(\mp 1)}} |\Omega(\mp 1)| \cos(\omega t - \arg \Omega(\mp 1)) \quad (2.9)$$

3. Примеры. 1°. Пусть полупространство ослаблено прямолинейной трещиной, ориентированной под углом $\beta_0 = 45^\circ$ к оси x_1 , берега ее свободны от сил, а из бесконечности вдоль вертикальной оси падает магнитоупругая волна (1.13). Коэффициент интенсивности напряжений представим в виде

$$K_{III} = P_h \sqrt{l\pi} \alpha^\mp \cos(\omega t - \arg \alpha^\mp) \quad (3.1)$$

$$P_h = - \frac{i\mu\gamma_2 \sin(\beta - \beta_0)}{\sqrt{1 + \chi^2 \sin^2(\beta - \beta_0)}}$$

где $\beta_0 = 0^\circ, 90^\circ$ и 45° для горизонтальной, вертикальной и наклонной трещины соответственно, $2l$ — длина трещины.

Изменение величины α^\mp в зависимости от нормализованного волнового числа для различных значений параметра χ показано на фиг. 2. Принималось, что центр трещины отстоит от границы полупространства на расстоянии $p_1 = 2l$. Для случая горизонтальной трещины ($p_1 = 2l$) соответствующие результаты приведены на фиг. 3.

2°. Пусть пространство ослаблено параболическим разрезом $\xi_1 = p_1 \delta$, $\xi_2 = p_1 \delta^2$ ($-1 \leq \delta \leq 1$), а из бесконечности падает вдоль вертикальной оси магнитоупругая волна (1.13). Суммарный коэффициент интенсивности $K_{III}^{(s)}$ можно представить в виде (3.1), где вместо α^\mp будет стоять величина α_s^\mp .

На фиг. 4 даны результаты расчетов величин $\alpha = \alpha^\mp$ и $\alpha_s = \alpha_s^\mp$ для $p_1 = 1$. Кривые 1, 3 построены для прямой трещины ($p = 0$), 2, 4, 5 — для параболической ($p = 1$). Кривая 5 соответствует значению $\chi = 0$, а остальные — $\chi = 1$. Графики 1, 2 иллюстрируют изменение α_s , остальные — изменение величины α .

Из приведенных результатов следует, что влияние электромагнитных эффектов на прочность проводящих тел может быть весьма значительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shindo Y. Diffraction of antiplane shear waves by a finite crack in the presence of the magnetic field // ZAMM. 1976. Bd. 56. N. 1. S. 33—41.
2. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.
3. Партон В. З. Кудрявцев Б. А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных сред. М.: Наука, 1988. 472 с.
4. Фильштинский Л. А. Взаимодействие волны напряжений с криволинейными туннельными трещинами продольного сдвига в полупространстве // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 3. С. 482—487.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения: Граничные задачи теории функций и некоторые приложения к математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.

Сумы

Поступила в редакцию
25.V.1990