

УДК (539.4 + 621.81) : 534.1

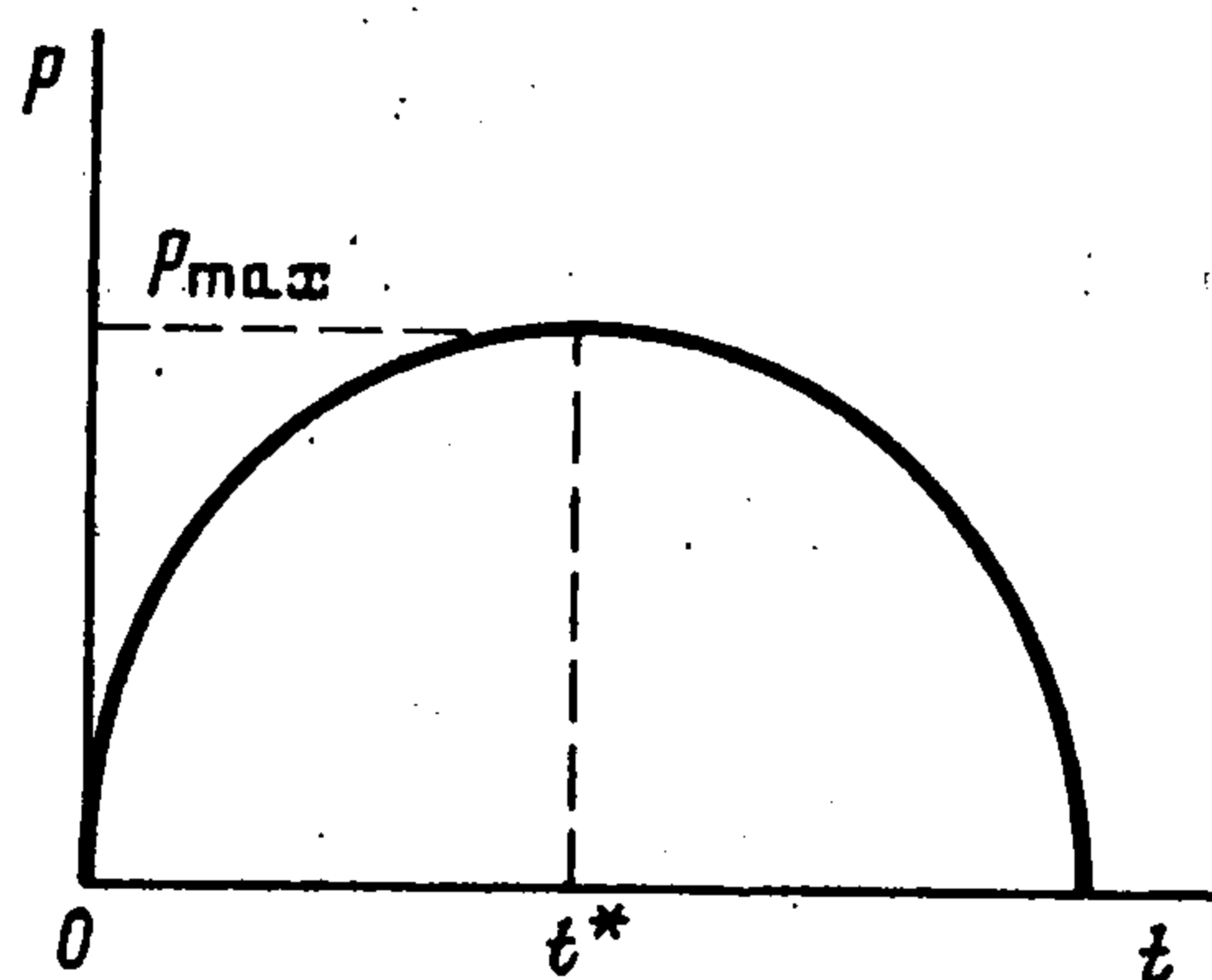
© 1992 г. М. Эргашов

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В НАМОТОЧНЫХ СВЯЗЯХ ПРИ УЧЕТЕ ЭФФЕКТОВ ИХ ВРАЩЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Исследуются процессы распространения продольно-крутильных и поперечных волн слабых и сильных разрывов в различных намоточных связях (спиральные канаты, гибкие кабели, текстильные и некоторые композитные нити). Предполагается, что натяжение и крутящий момент, возникающие в поперечных сечениях намоточных связей (НС) при растяжении, являются функциями относительной деформации и деформации кручения. Исследуются скорости распространения волн, дифференциальные условия и разрывы на характеристических кривых в нелинейно-упругой НС. Рассматриваются задачи о продольном ударе с постоянной скоростью по линейно-упругой НС полубесконечной и конечной длины.

Большинство НС обладает свойством вращаться вокруг собственной оси при растяжении. Для учета этого основного их свойства была принята [1—4] модель, согласно которой натяжение и крутящий момент, возникающие при растяжении, предполагаются линейными функциями деформации растяжения и кручения. Ниже предполагается, что натяжение и крутящий момент — нелинейные функции деформации растяжения и кручения.

1. Математическая модель и дифференциальные уравнения плоского движения НС. Основным и характерным для большинства НС свойством является их способность вращаться вокруг собственной оси при простом растяжении. Например, если к нижнему концу вертикально подвешенной текстильной нити (ТН) правой крутки приложить некоторую растягивающую внешнюю силу, то наблюдается



Фиг. 1

вращение её по часовой стрелке, а в случае ТН левой крутки — против часовой стрелки. Если к свободному концу приложить силу, изменяющуюся по закону, изображенному на фиг. 1, то при  $0 \leq t \leq t^*$  ТН будет вращаться с положительным, а при  $t > t^*$  — отрицательным угловым ускорением. Нижняя часть свободно подвешенной ТН в положении равновесия под действием собственного веса принимает некоторую спиральную форму. Эти и другие экспериментальные наблюдения [3] дают основание считать, что ТН наделена первоначально неуравновешанными внутренними напряжениями, и при простом растяжении в её сечениях одновременно возникают осевое усилие и крутящий момент. Аналогичные эффекты наблюдаются в большинст-

134

ве НС — спиральных канатах [2], промышленных кабелях [4, 5] и в некоторых композитных телах [6—8].

Согласно теории кручения однородных стержней перемещения точек при кручении некруглого стержня могут быть разбиты на два слагаемых [9]. Сначала поперечные сечения стержня как бы поворачиваются (как жесткое целое) вокруг оси кручения, затем все точки получают соответствующие перемещения вдоль оси кручения. Поступая аналогично, полную относительную деформацию НС можно условно разбить на две части: деформация  $\varepsilon^*$ , приобретаемая НС при растяжении без вращения, и  $\varepsilon^{**}$  — за счет вращения, т. е.  $\varepsilon = \varepsilon^* + \varepsilon^{**}$ , где  $\varepsilon^{**} > 0$  при раскручивании,  $\varepsilon^{**} < 0$  при закручивании НС и  $\varepsilon^{**} = 0$  — в случае идеальной нити. Для учета возможности вращения вокруг собственной оси при растяжении предполагалось [1, 2, 5, 6, 10, 14], что  $\varepsilon^{**} = A\theta$  и это приводит к следующей модели линейно-упругой НС:

$$T = A_{11}\varepsilon + A_{12}\theta, \quad M = A_{21}\varepsilon + A_{22}\theta \quad (\theta = \partial\psi/\partial s) \quad (1.1)$$

где  $A$  — коэффициент пропорциональности,  $T$  — натяжение,  $\theta$  — деформация кручения,  $\psi$  — угол поворота поперечных сечений,  $M$  — крутящий момент,  $A_{ij}$  — упругие коэффициенты ( $i, j = 1, 2$ ),  $s$  — лагранжева координата (в модели гибкого кабеля [5] вместо деформации кручения  $\theta$  использовалась деформация сдвига, при помощи уравнения совместности деформации, можно перейти к  $\theta$ ). Коэффициенты  $A_{ij}$  учитывают физические свойства материала и технологических параметров НС. Методы определения этих коэффициентов были приведены для естественно закрученных нитей [1], спиральных канатов [2] и гибких кабелей [5].

Исходя из модели (1.1), модель нелинейно-упругой НС представим в виде

$$T = T(\varepsilon, \theta), \quad M = M(\varepsilon, \theta) \quad (1.2)$$

т. е. будем считать, что натяжение и крутящий момент в произвольном сечении НС нелинейные функции полной относительной деформации и деформации кручения.

Предположим, что натяжение в произвольном сечении НС направлено по касательной к оси кручения, главный момент в каждом сечении расположен в плоскости, перпендикулярной к оси кручения, и момент инерции поперечного сечения относительно оси кручения постоянен для всех точек в процессе движения. В дальнейшем для производных искомых функций будем использовать следующие обозначения:

$$F'' = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \quad F'' = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \quad F_\alpha = \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad d_\alpha F = \frac{dF}{d\alpha}$$

При этом условия равновесия элемента НС, находящегося под действием динамических нагрузок, описываются законом количества движения, записанным в проекциях на оси  $x$  и  $y$  декартовой системы координат

$$\rho x'' = (T \cos \varphi)', \quad \rho y'' = (T \sin \varphi)' \quad (1.3)$$

и моментов количества движения, записанным относительно оси кручения

$$I\psi'' = M' \quad (1.4)$$

где  $\rho$  — начальная плотность,  $\varphi(s, t)$  — угол между касательной к оси НС и осью  $x$ ,  $I$  — приведенный момент инерции поперечного сечения относительно оси кручения. Полная относительная деформация удовлетворяет следующим геометрическим уравнениям [10, 11]:

$$(1 + \varepsilon) \cos \varphi = 1 + x', \quad (1 + \varepsilon) \sin \varphi = y' \quad (1.5)$$

Уравнения (1.3)—(1.5) совместно с уравнением (1.1) или (1.2) образуют систему относительно неизвестных  $T, M, x, y, \varepsilon, \theta, \varphi$ .

2. Характеристики системы (1.2)—(1.5) и дифференциальные условия на характеристиках. Систему (1.2)—(1.5) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \rho x'' &= \alpha_1 x'' + \beta_1 \psi'' + \gamma_1 y'' \\ \rho y'' &= \alpha_2 x'' + \beta_2 \psi'' + \gamma_2 y'' \\ I \psi'' &= \alpha_3 x'' + \beta_3 \psi'' + \gamma_3 y'' \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\alpha_1 = \alpha^2 T_\varepsilon + \rho \beta b^2, \quad \beta_1 = \alpha T_\theta, \quad \gamma_1 = \alpha_2 = \alpha \beta (T_\varepsilon - \rho b^2),$$

$$\beta_2 = \beta T_\theta, \quad \gamma_2 = \beta^2 T_\varepsilon + \rho \alpha^2 b^2, \quad \alpha_3 = \alpha M_\varepsilon, \quad \beta_3 = M_\theta$$

$$\gamma_3 = \beta M_\varepsilon, \quad \alpha = \frac{1+x'}{1+\varepsilon}, \quad \beta = \frac{y'}{1+\varepsilon}, \quad b^2 = \frac{T}{\rho(1+\varepsilon)}$$

Характеристический определитель системы (2.1) приводится к уравнению, которое имеет следующие решения:

$$k^2 = b^2 = T^* (1 + \varepsilon)^{-1} \quad (2.2)$$

$$k^2 = a_{1,2}^2 = 1/2 (M_\theta^* + T_\varepsilon^* \pm \eta) \quad (2.3)$$

$$\eta = [(T_\varepsilon^* - M_\theta^*)^2 + 4T_\theta^* M_\varepsilon^*]^{1/2} \quad (2.4)$$

$$k^2 = (d_t s)^2, \quad T^* = T \rho^{-1}, \quad M^* = M I^{-1}$$

Видно, что динамическая нагрузка вдоль НС распространяется в сторону роста параметра  $s$  и в обратном направлении с тремя различными скоростями  $\pm b, \pm a_1, \pm a_2$ . Очевидно, система (2.1) будет гиперболической, если  $a_1^2 \geq 0$  и  $a_2^2 \geq 0$ . Как следует из соотношений (2.3), (2.4), эти условия выполняются, если

$$T_\theta M_\varepsilon - T_\varepsilon M_\theta \geq 0 \quad (2.5)$$

Предположим, что условие (2.5) выполнено в любой момент времени.

Условия на характеристических кривых найдем следующим искусственным способом. Пусть на ряду с (2.1) имеют место уравнения

$$dx^* - k dx' = \varphi_1(s, t) dt, \quad dy^* - k dy' = \varphi_2(s, t) dt \quad (2.6)$$

$$d\psi^* - k d\psi' = \varphi_3(s, t) dt$$

где  $\varphi_i$  — неизвестные пока функции ( $i = 1, 2, 3$ ). Функции  $\varphi_i$  в общем случае не могут одновременно равняться нулю, так как в противном случае уравнения (2.1) можно было бы представить в виде независимых однородных волновых уравнений, описывающих чисто продольные, поперечные и крутильные движения НС соответственно. Исключая производные по  $t$ , систему (2.1), (2.6) приводим к виду

$$\rho \varphi_1 = (\alpha_1 - \rho k^2) x'' + \beta_1 \psi'' + \gamma_1 y''$$

$$\rho \varphi_2 = \alpha_2 x'' + \beta_2 \psi'' + (\gamma_2 - \rho k^2) y''$$

$$I \varphi_3 = \alpha_3 x'' + (\beta_3 - I k^2) \psi'' + \gamma_3 y''$$

Умножим второе и третье уравнения последней системы на неизвестные коэффициенты  $\lambda^*$  и  $\mu^*$  соответственно и сложим эти уравнения. Далее потребуем, чтобы коэффициенты при производных  $x''$  и  $\psi''$  были равны нулю (так как  $\lambda^*$  и  $\mu^*$  — произвольные коэффициенты). В результате получаем уравнения

$$\begin{aligned} I(\alpha_1 - \rho k^2) + \lambda^* I \alpha_2 + \mu^* \rho \alpha_3 &= 0 \\ I\beta_1 + I\lambda^* \beta_2 + \mu^* \rho (\beta_3 - I k^2) &= 0 \\ \varphi_1 + \lambda^* \varphi_2 + \mu^* \varphi_3 &= \left[ \frac{\gamma_1}{\rho} + \lambda^* \frac{\gamma_2 - \rho k^2}{\rho} + \mu^* \frac{\gamma_3}{I} \right] y'' \end{aligned} \quad (2.7)$$

Левая часть последнего уравнения (2.7) и коэффициент при  $y''$  равны нулю, так как на характеристических кривых вторые производные искомых функций имеют бесконечное число значений. Следовательно, на характеристических кривых (2.2)–(2.4) имеют место следующие дифференциальные условия:

$$dx^* = k dx' - \lambda^* (dy^* - k dy') + (k d\psi' - d\psi^*) \mu^* \quad (2.8)$$

Из соотношений (2.7) следует, что  $\lambda^*$  и  $\mu^*$  — функции  $k^2$ . Поэтому трем значениям  $k^2$  в каждый момент времени соответствуют по три значения  $\lambda^*$  и  $\mu^*$  и на фронтах волн  $\pm b$ ,  $\pm a_1$ ,  $\pm a_2$  имеют место всего шесть дифференциальных условий.

Рассмотрим линейно-упругий случай. При плоском движении НС на фронтах  $\pm a_{1,2}$  получаем

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^* &= \operatorname{tg} \varphi \\ \mu_{1,2}^* &= \frac{I A_{12} (a_{1,2}^2 - b^2)}{\alpha [A_{21} A_{12} - (A_{11} - \rho b^2) (A_{22} - I a_{1,2}^2)]} \end{aligned}$$

а на фронтах  $\pm b$ :

$$\lambda_3^* = \operatorname{ctg} \varphi, \quad \mu_3^* = 0$$

При этом, если коэффициенты  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) и угол  $\varphi$  — постоянные величины, то, вводя новые функции

$$w_i = x + \lambda_i^* y + \mu_i^* \psi \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.9)$$

вместо системы (2.1) можно рассматривать следующие однородные волновые уравнения:

$$w_i'' = k_i^2 w_i'' \quad (2.10)$$

В случае прямолинейного движения НС имеем  $\varphi = 0$ ,  $y = 0$ ,  $\lambda_i^* = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 1$ , и функции  $w_i$  принимают вид

$$w_i = x + \mu_i^* \psi \quad (i = 1, 2) \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.9)–(2.11) следует, что волны  $\pm a_{1,2}$  являются продольно-крутильными, а  $\pm b$  — поперечными. Деформация кручения на скорость распространения поперечной волны влияет только через натяжение (см. (2.3)), и чем больше деформация кручения, тем быстрее скорость поперечной волны. Следовательно, большим деформациям кручения (большим скоростям поперечной волны) соответствуют большие относительные деформации.

С помощью уравнения (2.10) можно показать [10—12, 15], что если на линейно-упругую НС действуют мгновенно приложенные стационарные нагрузки, то возмущенные области НС будут областями постоянных параметров и принимают прямолинейную форму.

**3. Разрывы на характеристиках.** Было показано [11—14], что слабые продольные разрывы влияют на касательные к идеальной нити ускорения и скорости ее удлинения и не изменяют нормальных ускорений и скоростей поворотов нити, а слабые поперечные разрывы изменяют только скорости поворотов нити и нормальные к ней ускорения. В рассматриваемом случае эти фундаментальные выводы не очевидны, так как принятая модель НС и следующая из нее схема волнового процесса существенно отличаются от модели и схемы волнового движения идеальной нити.

Разрывы на характеристиках будем исследовать традиционным методом, (см. [11, 15]). Пусть на характеристических кривых первые производные смещений не терпят разрыва. Через  $q(s, t)$  и  $n(s, t)$  будем обозначать коэффициенты скачков соответственно первых и вторых производных. Коэффициенты скачков искомых функций будем снабжать соответствующими индексами. Запишем уравнения (2.1) для точек слева и справа от линии разрыва

$$\begin{aligned}(\rho k^2 - \alpha_1) n_x - \beta_1 n_\psi - \gamma_1 n_y &= 0 \\ \alpha_2 n_x + \beta_2 n_\psi - (\rho k^2 - \gamma_2) n_y &= 0 \\ \alpha_3 n_x + \gamma_3 n_y - (I k^2 - \sigma_3) n_\psi &= 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

Определитель этой системы равен нулю. В качестве независимых будем рассматривать первое и третье уравнения системы (3.1).

Рассмотрим фронт поперечной волны. Пусть  $k^2 = b^2$ ,  $k^2 \neq a_{1,2}^2$ . Умножим первое уравнение (3.1) на  $M_\varepsilon$ , а второе на  $\alpha(T_\varepsilon - \rho b^2)$  и рассмотрим сумму этих уравнений

$$[T_\varepsilon - (I b^2 - M_\varepsilon)(\rho b^2 - T_\varepsilon)] n_\psi = 0 \quad (3.2)$$

Множитель при  $n_\psi$  в уравнении (3.2) не может равняться нулю в силу уравнения (2.2) и предположения  $k^2 = b^2$ . Подставляя в первое и третье уравнения (2.1)  $n_\psi = 0$ , получим

$$n_x = -n_y \operatorname{tg} \varphi, [\theta'] = [\psi'] = 0, [x''] = -\operatorname{tg} \varphi [y''] \quad (3.3)$$

Умножим теперь первое уравнение (1.5) на  $\cos \varphi$ , а второе на  $\sin \varphi$  и рассмотрим сумму этих уравнений

$$q_\varepsilon = (n_x \cos \varphi + n_y \sin \varphi) v' \quad (3.4)$$

где  $v(s, t) = 0$  — уравнение характеристической кривой.

Предположим, что  $v' \neq 0$  (фронты стационарных разрывов не рассматриваются). Правая часть уравнения (3.4) равна нулю в силу первого равенства (3.3). Следовательно, на фронте  $\pm b$  выполняется условие  $q_\varepsilon = 0$ .

Умножим теперь первое уравнение (1.5) на  $\sin \varphi$ , а второе на  $\cos \varphi$  и далее поступим аналогично предыдущему; имеем

$$(1 + \varepsilon) q_\varphi = (n_y \cos \varphi - n_x \sin \varphi) v' \quad (3.5)$$

Из первого уравнения (3.3) и соотношения (3.5) найдем

$$q_\varphi = n_y v' [(1 + \varepsilon) \cos \varphi]^{-1} \quad (3.6)$$

Из анализа уравнений (3.3)—(3.6) следует, что поперечные волны слабого разрыва не оказывают влияния на деформации растяжения и кручения НС.

Рассмотрим теперь фронты разрывов  $a_{1,2}^2$ , идущих вдоль прямолинейной первоначально НС. Подставляя в уравнения (1.5) и (3.1)  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k^2 = a_{1,2}^2$ , получаем

$$\begin{aligned} n_y &= 0, \quad n_x = n_\psi T_\theta (\rho a_{1,2}^2 - T_\varepsilon)^{-1} \\ q_\varphi &= 0, \quad q_\theta \neq 0, \quad n_x = q_\varepsilon v' \end{aligned} \quad (3.7)$$

Видно, что слабые разрывы  $\pm a_{1,2}$  влияют на деформации растяжения и кручения, а также на касательные к упругой оси ускорения точек НС.

4. Частные случаи. 1°. Продольные волны в идеальной нити распространяются со скоростью  $d_\varepsilon T^*$ . В рассматриваемом случае, если предположить, что  $a_{1,2}^2 = d_\varepsilon T^*$ , то приходим к следующей зависимости между полными дифференциалами деформации растяжения и кручения

$$d\theta = 1/2 (M_\theta^* - T_\varepsilon^* \pm \eta) (T_\theta^*)^{-1} d\varepsilon \quad (4.1)$$

Интегралы уравнения (4.1), соответствующие положительному и отрицательному знаку перед радикалом, представим в виде

$$f_i(\varepsilon, \theta, c_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (4.2)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования. Из (4.1), (4.2) следует, что в рассматриваемом случае в плоскости  $(\varepsilon, \theta)$  имеются два семейства кривых противоположного знака к оси  $O\varepsilon$ . Подставляя  $\theta$  из уравнения (4.2) в  $T = T(\varepsilon, \theta)$  в плоскости  $(T, \varepsilon)$  получим два семейства кривых соответствующих кривым  $(\theta, \varepsilon)$ . В каждой точке тангенс угла между осью  $O\varepsilon$  и касательной к кривой соответствующего семейства равен квадрату скорости распространения соответствующего разрыва  $a_1^2$  или  $a_2^2$ . Тангенс угла между осью  $O\varepsilon$  и прямой, проходящей через данную точку плоскости  $(T, \varepsilon)$  и через точку  $\varepsilon = -1$  на оси  $O\varepsilon$  равен квадрату скорости распространения поперечной волны [11, 12]. Знак правой части уравнения (4.1) совпадает со знаком перед радикалом. Поэтому, если  $T_\theta > 0$ , то на фронте разрыва  $a_1^2$  дифференциалы деформаций имеют одинаковые знаки, а на фронте  $a_2^2$  имеют противоположные знаки.

2°. Пусть

$$a_{1,2}^2 = d_\theta M^* \quad (4.3)$$

Рассматривая совместно уравнения (2.4) и (4.3), найдем

$$d\varepsilon = 1/2 (T_\varepsilon^* - M_\theta^* \pm \eta) (M_\varepsilon^*)^{-1} d\theta \quad (4.4)$$

Интегралы этого уравнения представим в виде

$$f_j(\varepsilon, \theta, c_j) = 0 \quad (j = 3, 4) \quad (4.5)$$

Видно, что если каждое из уравнений (4.5) разрешить относительно  $\varepsilon$  и подставить эти решения в уравнение  $M = M(\varepsilon, \theta)$ , то аналогичная предыдущему случаю волновая картина для  $a_{1,2}^2$  получится в плоскостях  $(\varepsilon, \theta)$  и  $(M, \theta)$ .

3°. Наиболее интересным представляется случай

$$d_\varepsilon T^* = \kappa, \quad d_\theta M^* = \kappa \quad (4.6)$$

Раскрывая полные дифференциалы и приравнявая левые части уравнения (4.6), получим

$$T_\varepsilon^* + T_\theta^* d_\varepsilon \theta = M_\varepsilon d_\theta \varepsilon + M_\theta^* \quad (4.7)$$

Разрешая уравнение (4.7) относительно  $d_\varepsilon \theta$  и  $d_\theta \varepsilon$ , получаем уравнения (4.1) и (4.4) соответственно. Подставляя  $d_\varepsilon \theta$  в первое выражение (4.6), а  $d_\theta \varepsilon$  во второе выражение, получим  $\kappa = a_{1,2}^2$ . Таким образом, из условия (4.6) следует, что

$$a_{1,2}^2 = d_\varepsilon T^* = d_\theta M^* \quad (4.8)$$

и  $1^\circ$ ,  $2^\circ$  являются частными случаями, следующими из предположения (4.6). Из уравнения (4.1), (4.2), (4.4), (4.5) видно, что в рассматриваемом случае в плоскости  $(T, M)$  существуют два семейства кривых, соответствующих кривым  $(\varepsilon, \theta)$ .

Равенства (4.8) означают, что тангенсы углов наклона касательных в соответствующих точках  $(T^0, \varepsilon^0)$  и  $(M^0, \theta^0)$  плоскостей  $(T, \varepsilon)$  и  $(M, \theta)$  равны.

Другими словами, продольные и крутильные волны вдоль НС распространяются с одинаковой скоростью и частицы возмущенных волнами  $\pm a_1$  и  $\pm a_2$  областей совершают сложные продольно-крутильные движения.

**5. Распространение сильных разрывов. Продольный удар по линейно-упругой НС.** Пусть при  $t \geq 0$  к левому концу элемента НС с первоначальной длиной  $ds_0$  подошла волна сильного разрыва, идущая слева со скоростью  $D$ . За время  $dt$  рассматриваемый элемент НС длиной  $ds_0 = (1 + \varepsilon_0) dt$  приобретает новую длину  $ds_1 = (1 + \varepsilon_1) dt$ .

Из условия непрерывности вектора смещения  $l(s, t)$  и угла поворота поперечных сечений вдоль линии  $ds = Ddt$ , получаем

$$[l'] + D [l'] = 0, [\psi'] + D [\psi'] = 0 \quad (5.1)$$

Эти уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned} l_1' - l_0' &= D (1 + \varepsilon_0) \tau_0 - (1 + \varepsilon_1) \tau_1 \\ \psi_1' - \psi_0' &= D (\theta_0 - \theta_1) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Применяя законы сохранения количества движения и моментов количества движения к элементу  $ds_0$ , получим

$$\begin{aligned} T_0^* \tau_0 - T_1^* \tau_1 &= D (l_1' - l_0'), \\ M_0^* - M_1^* &= D (\psi_1' - \psi_0') \end{aligned} \quad (5.3)$$

Подставляя соотношения (5.2) во второе уравнение (5.3), получаем

$$[T_0^* - D^2 (1 + \varepsilon_0)] \tau_0 = [T_1^* - D^2 (1 + \varepsilon_1)] \tau_1 \quad (5.4)$$

Рассмотрим фронт поперечной волны. Пусть  $\tau_0 \neq \tau_1$ . Из уравнения (5.4) найдем

$$T_0^* - D^2 (1 + \varepsilon_0) = 0, T_1^* - D^2 (1 + \varepsilon_1) = 0 \quad (5.5)$$

Система уравнений, составленная из вторых уравнений (5.2), (5.3), а также (5.4), (5.5), имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_0, T_1^* = T_0^*, \theta_1 = \theta_0, M_1^* = M_0^* \\ D^2 &= T_0^* (1 + \varepsilon_0)^{-1}, l_1' - l_0' = D (\tau_0 - \tau_1) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Видно, что поперечные волны сильного и слабого разрыва вдоль НС распространяются с одинаковой скоростью и не несут разрыва деформаций.

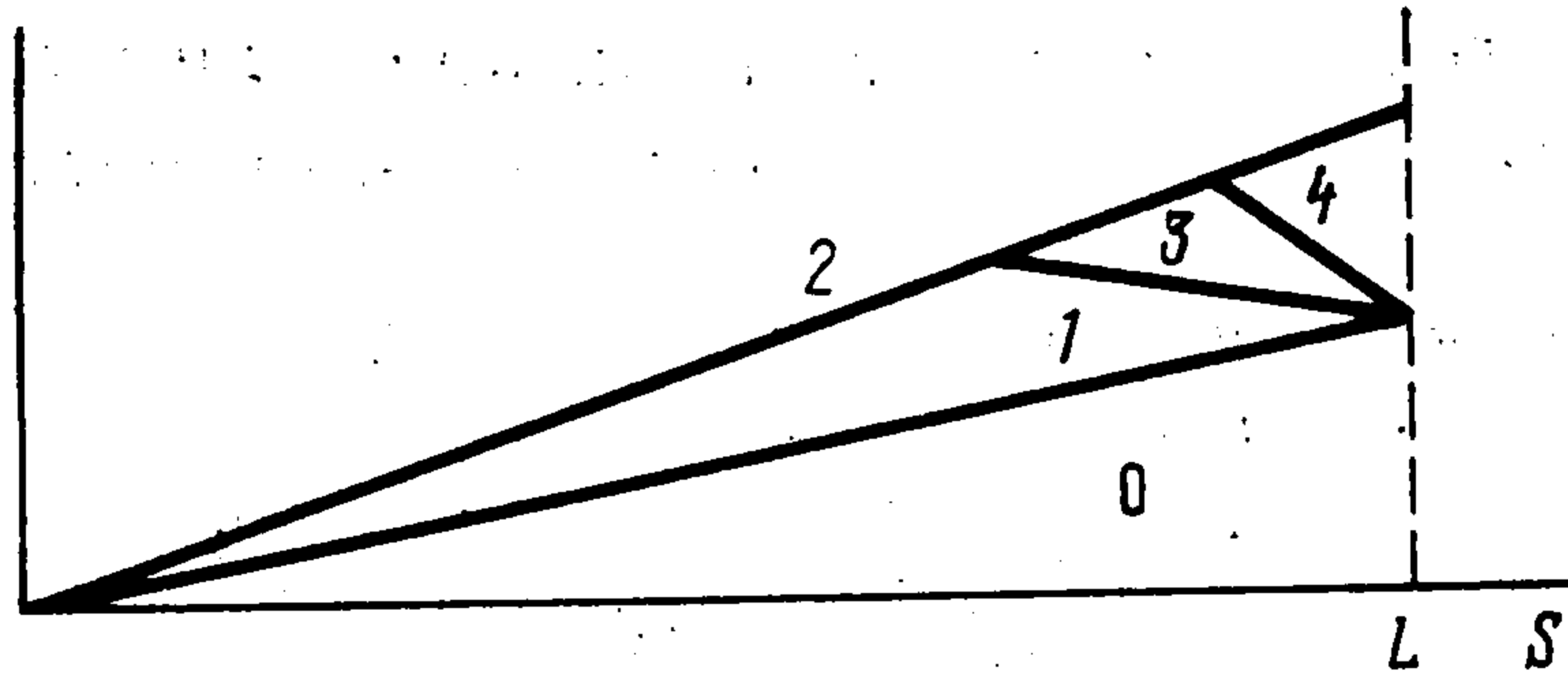
Поступая аналогично при  $\tau_0 = \tau_1$ , из уравнений (5.2)–(5.6) получаем условия

$$l_1' - l_0' = \mp D (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) \tau_0, \psi_1' - \psi_0' = \mp D (\theta_1 - \theta_0) \quad (5.7)$$

на фронтах продольно-крутильных разрывов.

Пусть при  $t \geq 0$  левый конец линейно-упругой и прямолинейной первоначально НС начал двигаться по заданному закону

$$x'(0, t) = x_{00}'(t), \psi'(0, t) = \psi_{00}'(t)$$



Фиг. 2

В НС возникают две продольно-крутильные волны, идущие с постоянными скоростями  $a_1$  и  $a_2$ . Если  $x_{00}$  и  $\psi_{00}$  — постоянные величины (удар с постоянной скоростью), то возмущенные области 1 и 2 (фиг. 2) НС будут областями постоянных параметров [10—12]. На фронтах волн  $a_1$  и  $a_2$  имеют место уравнения ( $i = 1, 2$ ):

$$x_i - x_{i-1} = a_i (\varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i), \quad \psi_i - \psi_{i-1} = a_i (\theta_{i-1} - \theta_i) \quad (5.8)$$

$$\theta_i - \theta_{i-1} = \mu_i (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \quad (5.9)$$

$$\mu_i = \left\{ \frac{A_{22}}{I} - \frac{A_{11}}{\rho} \pm \left[ \left( \frac{A_{11}}{\rho} - \frac{A_{22}}{I} \right)^2 + \frac{4}{\rho I} A_{11} A_{22} \right]^{1/2} \right\} \left( \frac{2A_{12}}{\rho} \right)^{-1}$$

Уравнения (5.9) следуют из (4.1). Система (5.8), (5.9) имеет следующее решение:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_{00}, \quad \psi_2 = \psi_{00} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + (\mu_2 x_* - \psi_*) (a_1 \mu)^{-1} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_0 + (a^* x_* - a \psi_*) (a_1 a_2 \mu)^{-1} \\ \theta_1 &= \theta_0 + (\mu_1 \mu_2 x_* - \mu_1 \psi_*) (a_1 \mu)^{-1} \\ \theta_2 &= \theta_0 + (\mu_1 \mu_2 a x_* - a^* \psi_*) (a_1 a_2 \mu)^{-1} \\ x_1 &= x_0 + (\mu_2 x_* - \psi_*) \mu^{-1} \\ \theta_1 &= \theta_0 + (\mu_1 \psi_* - \mu_1 \mu_2 x_*) \mu^{-1} \\ \mu &= \mu_1 - \mu_2, \quad a = a_2 - a_1, \\ \psi_* &= \psi_{00} - \psi_0, \quad x_* = x_{00} - x_0 \\ a^* &= a_2 \mu_1 - a_1 \mu_2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Пусть НС имеет конечную длину  $L$  и при  $t = L/a_1$  происходит отражение продольно-крутильной волны  $a_1$  от жестко закрепленного конца НС в точке  $s = L$ . Предположим, что в результате отражения волны  $a_1$  возникают две отраженные продольно-крутильные волны, идущие со скоростями  $a_1$  и  $a_2$  (фиг. 2). Аналогично предыдущему получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= 2\varepsilon_1 - \varepsilon_0 - (\psi_0 - \mu_2 x_0) (a_1 \mu)^{-1} \\ \varepsilon_4 &= \varepsilon_3 + (\psi_0 - \mu_1 x_0) (a_2 \mu)^{-1} \\ \theta_3 &= 2\theta_1 - \theta_0 - \mu_1 (\psi_0 - \mu_2 x_0) (a_1 \mu)^{-1} \\ \theta_4 &= \theta_3 + \mu_2 (\psi_0 - \mu_1 x_0) (a_2 \mu)^{-1} \\ \psi_3 &= \mu_2 (\mu_1 x_0 - \psi_0) \mu^{-1}, \quad \psi_4 = 0 \\ x_3 &= (\psi_0 - \mu_1 x_0) \mu^{-1}, \quad x_4 = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Видно, что в общем случае при отражении волны  $a_1$  от жестко закрепленного конца в НС возникают две продольно-крутильные волны.

Рассмотрим следующий частный случай. Пусть  $\psi_0' = 0$ ,  $x_0' = 0$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ . При этом из (5.11) получаем соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 &= \varepsilon_3 = 2\varepsilon_1, & \theta_4 &= \theta_3 = 2\theta_1 \\ \psi_4' &= \psi_3' = 0, & x_4' &= x_3' = 0 \end{aligned}$$

из которых следует, что при отражении упругой продольно-крутильной волны от жестко закрепленного конца первоначально недеформированной и неподвижной НС возникает только одна отраженная волна. В последнем случае деформации растяжения и кручения на фронте отраженной волны (как и в случае гибкой нити) равны удвоенным деформациям на прямой волне.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н., Горошко О. А. Динамика нити переменной длины применительно к шахтным подъемам. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. 332 с.
2. Глушко М. Ф. Стальные подъемные канаты. Киев: Техніка, 1966. 327 с.
3. Мизгушов И. И. Механика текстильной нити и ткани. М.: Лег. индустрия, 1980. 160 с.
4. Носов М. П., Смирнова В. А., Забашта Ю. Ф., Фридман А. Я., Мохнач М. П. Низкочастотное внутреннее трение комплексных композитных нитей // Механика композит. материалов. 1989. № 1. С. 11—15.
5. Мусалимов В. М., Мокряк С. Я., Соханов Б. В., Шиянов В. Д. Определение упругих характеристик гибких кабелей на основе модели спирально-анизотропного тела // Механика композит. материалов. 1984. № 1. С. 136—141.
6. Креггер А. Ф., Тетерс Г. А. Сложное нагружение кручением и растяжением композитного материала с пластической матрицей // Механика полимеров. 1977. № 5. С. 922—924.
7. Парцевский В. В. Моментные эффекты в плоской задаче для перекрестно армированного слоистого композита // Механика композит. материалов. 1979. № 1. С. 46—50.
8. Работнов Ю. Н. О прочности композитов армированных в двух направлениях // Механика полимеров. 1978. № 5. С. 832—834.
9. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
10. Рахматулин Х. А., Адылов К. А. Нормальный поперечный удар по спиральным проволочным канатам // Вестн. МГУ. 1976. № 6. С. 105—109.
11. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
12. Павленко А. Л. О распространении разрывов в гибкой нити // Изв. АН СССР. ОТН. Сер. Механика и машиностроение. 1959. № 4. С. 112—122.
13. Кристеску Н. Распространение волн в гибких нитях (влияние скоростей деформации) // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 486—490.
14. Эргашов М. Задача о поперечном ударе по стальным канатам // Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1984. С. 315—319.
15. Hadamard J. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris: Hermann, 1903. 375 p.