

УДК 539.374 : 534.1

© 1992 г. Д. Б. Балашов

## О ПРОСТЫХ ВОЛНАХ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ — РЕЙССА

Показано, что решение системы уравнений плоских простых волн (ПВ) в изотропно упрочняющемся материале Прандтля — Рейсса в общем случае (без предположений о виде функции упрочнения и состоянии перед ПВ) сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. В частном случае линейного упрочнения, а также при отсутствии упрочнения решение системы уравнений для плоских ПВ сводится к квадратурам. В случае линейно упрочняющейся среды решена задача о косом ударе по полупространству, предварительно напряженному произвольными однородными, постоянными напряжениями.

Для уравнений Прандтля — Рейсса соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений плоских ПВ в ряде случаев, как известно, расщепляется (так как не все входящие в нее уравнения связаны друг с другом) и допускает поэтому достаточно простое исследование. Были изучены [1—4] плоские ПВ, распространяющиеся вдоль оси  $x^1$  декартовой системы координат  $x^i$  при условии  $v_3 = 0, \sigma_{13} = 0$  ( $v_i, \sigma_{ij}$  — компоненты скорости и напряжений). Их исследование было сведено к квадратурам (идеально упругопластическая среда при дополнительном условии  $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$  [1], линейно упрочняющаяся среда при  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  [2]) или к изучению обыкновенного дифференциального уравнения — численному (изотропно упрочняющаяся среда при  $\sigma_{22} - \sigma_{33} = 0$  [3]) или качественному (идеально упругопластическая среда при  $\sigma_{22} - \sigma_{33} \neq 0$  [4]).

В отличие от предыдущих работ [1—4] ниже сняты все ограничения на вид начального напряженного состояния полупространства. Предложенный способ позволяет получить решение, используя лишь три семейства плоских кривых. При этом отпадает необходимость численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений ПВ.

**1. Сведение к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения.** В рамках геометрически линейной теории рассматривается движение упругопластической среды плоскими волнами. Уравнение поверхности нагружения принимается в форме Мизеса, а за параметр упрочнения берется работа пластических деформаций (индексом  $d$  отмечается дивергент тензора,  $\varepsilon_{ij}^p$  — компоненты тензора пластических деформаций)

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}^d\sigma_{ij}^d = f(\chi) \quad (d\chi = \sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p) \quad (1.1)$$

При выполнении условия (1.1) принимается ассоциированный закон  $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\sigma_{ij}^d$ ,  $d\lambda \geq 0$  и закон Гука для упругих деформаций. Для такой среды система уравнений, описывающая плоские волны, имеет вид ( $\mu, K$  — постоянные упругие модули)

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t} = 3K \frac{\partial v_1}{\partial x} \\ e_{ij}^d &= \frac{1}{2\mu} \frac{\partial \sigma_{ij}^d}{\partial t} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \sigma_{ij}^d; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} \geq 0 \\ \frac{1}{2}\sigma_{ij}^d\sigma_{ij}^d &= f(\chi), \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial t} 2f(\chi) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Если в состоянии перед волной  $\sigma_{23} = 0$ ,  $\sigma_{22} - \sigma_{33} = \gamma_0 = \text{const}$  (первого равенства всегда можно добиться поворотом системы координат вокруг оси  $x^1$ ), то из третьего соотношения системы (1.2) следует, что

$$\sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{22} - \sigma_{33} = \gamma_0 e^{-2\mu\lambda} \quad (1.3)$$

В дальнейшем эти соотношения считаются выполненными.

Исследуем ПВ системы (1.2), т. е. решения вида

$$\sigma_{ij}(\theta(x, t)), \quad v_i(\theta(x, t)), \quad \lambda(\theta(x, t)), \quad \chi(\theta(x, t)), \quad x \equiv x^1$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая ПВ, имеет вид (штрихом обозначена производная по  $\theta$ ):

$$\begin{aligned} v_1' (K + \frac{4}{3}\mu - p) &= -2\mu\sigma_{11}^d c\lambda' \\ v_j' (\mu - p) &= -2\mu\sigma_{1j} c\lambda' \quad (j = 2, 3) \\ \sigma_{kk}' (K + \frac{4}{3}\mu - p) &= 6K\mu\sigma_{11}^d \lambda' \\ \sigma_{11}^{d'} (K + \frac{4}{3}\mu - p) &= 2\mu(p - K)\sigma_{11}^d \lambda' \\ \sigma_{1j}' (\mu - p) &= 2\mu\sigma_{1j} p \lambda' \quad (j = 2, 3) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{3}{4}(\sigma_{11}^d)^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 = f(\chi), \quad \chi' = 2f\lambda'$$

Здесь  $c = -\theta_t'/\theta_x'$  — характеристическая скорость; величина  $p = \rho_0 c^2$  определяется из характеристического уравнения

$$\begin{aligned} (K + \frac{4}{3}\mu - p)(\mu - p) - \frac{2\mu^2}{(2\mu + f')f} \{(\mu - p)(\sigma_{11}^d)^2 + \\ + (K + \frac{4}{3}\mu - p)(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)\} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Система (1.4) имеет ряд очевидных первых интегралов, именно из пятого и второго уравнений соответственно следует  $d\sigma_{13}/d\sigma_{12} = \sigma_{13}/\sigma_{12}$ ,  $dv_3/dv_2 = \sigma_{13}/\sigma_{12}$ , откуда, интегрируя, находим

$$\sigma_{13} = \alpha_0 \sigma_{12}, \quad v_3 = \alpha_0 (v_2 - v_2^\circ) + v_3^\circ, \quad \alpha_0 = \sigma_{13}^\circ / \sigma_{12}^\circ \quad (1.6)$$

где постоянные  $v_2^\circ$ ,  $v_3^\circ$ ,  $\sigma_{12}^\circ$ ,  $\sigma_{13}^\circ$  — значения соответствующих величин перед волной.

Последнее уравнение (1.4) также интегрируется

$$\lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d\chi}{f(\chi)} = \Phi(\chi) \quad (\chi = \Psi(\lambda)) \quad (1.7)$$

Таким образом для системы (1.4) имеется пять первых интегралов: (1.3), предпоследнее соотношение (1.4), (1.6) и (1.7).

Систему (1.4) в дальнейшем удобно записать в безразмерных переменных

$$\sigma_{11}^* = \sigma_{11}/k_0, \quad s_{11} = \sigma_{11}^d/k_0, \quad s_{1j} = \sigma_{1j}/k_0, \quad (j = 2, 3)$$

$$\lambda^* = 2\mu\lambda, \quad \chi^* = \chi/2\mu, \quad v_i^* = \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}} v_i \quad (i=1, 2, 3), \quad c^* = \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}} c \quad (1.8)$$

где  $k_0$  — начальный предел текучести. Далее звездочки опустим.

В этих переменных уравнение поверхности нагружения при учете соотношений (1.3), (1.7) запишется в виде

$$\frac{3}{4}s_{11}^2 + s_{12}^2 + s_{13}^2 = F(\lambda; \gamma_0) \quad (1.9)$$

Характеристическое уравнение (1.5) принимает вид

$$(l_0 + 4/3 - p)(1 - p) - \frac{2\mu k_0^2}{(2\mu + f')f} \{(1 - p)s_{11}^2 + (l_0 + 4/3 - p)(s_{12}^2 + s_{13}^2)\} = 0, \quad l_0 = K/\mu \quad (1.10)$$

В силу соотношения (1.9) зависимость  $p$  от  $s_{12}^2 + s_{13}^2$  можно исключить и, следовательно, характеристическая скорость  $c$  зависит только от переменных  $s_{11}^2$ ,  $\lambda$  и параметра начальных данных  $\gamma_0$ . Тогда четвертое уравнение (1.4) отщепляется от системы. Действительно, оно принимает вид

$$\frac{ds_{11}^2}{d\lambda} = \frac{p - l_0}{l_0 + 4/3 - p} s_{11}^2 \equiv f_1(\lambda, s_{11}^2; \gamma_0) \quad (1.11)$$

и в принципе определяет зависимость ( $s_{11}^\circ$  — значение  $s_{11}$  при  $\lambda = 0$ )  
 $s_{11} = s_{11}(\lambda; s_{11}^\circ, \gamma_0)$

При учете этой зависимости оставшиеся дифференциальные уравнения системы (1.4), описывающей ПВ, принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{d\lambda} &= -\frac{k_0}{\mu} \frac{c}{l_0 + 4/3 - p} s_{11} \equiv f_2(\lambda; s_{11}^\circ, \gamma_0) \\ \frac{dv_2}{d\lambda} &= -\frac{k_0}{\mu} \frac{c}{1 - p} s_{12} \equiv f_3(\lambda; s_{11}^\circ, \gamma_0) \\ \frac{d\sigma_{11}}{d\lambda} &= \frac{p}{l_0 + 4/3 - p} s_{11} \equiv f_4(\lambda; s_{11}^\circ, \gamma_0) \end{aligned}$$

Из них квадратурами находятся величины  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\sigma_{11}$ ; переменные  $s_{12}$ ,  $s_{13}$ ,  $v_3$  определяются из конечных соотношений (1.6), (1.9).

Итак, исследование системы, описывающей ПВ уравнений Прандтля — Рейсса, сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка и вычислению зависящих от него интегралов. Этот факт имеет место без каких-либо предположений о виде функции упрочнения  $f(\chi)$  и о состоянии перед ПВ. Сформулированное утверждение можно использовать для облегчения численного исследования ПВ, например, в задаче о распаде произвольного разрыва.

**2. Сведение к квадратурам уравнений ПВ в случае линейного упрочнения.** Для материала с линейным упрочнением функция  $f(\chi)$  в соотношении (1.1) имеет вид  $f(\chi) = k_0^2 + \beta \cdot \chi$ , где  $k_0$  — предел текучести при сдвиге,  $\beta = \text{const} > 0$ .

Рассмотрим ПВ, распространяющуюся по такой среде, находящейся в однородном напряженном состоянии с напряжениями  $\sigma_{11}^\circ$ ,  $\sigma_{12}^\circ$ ,  $\sigma_{13}^\circ$ ,  $\sigma_{22}^\circ$ ,  $\sigma_{33}^\circ$ . Такие ПВ используются ниже в решении задачи о косом ударе по полупространству. Покажем, что расчет изменений всех величин в ПВ сводится к квадратурам. В частности, это утверждение справедливо для идеально упругопластической среды ( $\beta = 0$ ).

По формулам (1.8) введем безразмерные переменные  $s_{1i}$ ,  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )  $\sigma_{11}$ ,  $\chi$ ,  $\lambda$ , а также переменные

$$r = (\sigma_{11}^\circ)^2/f, \quad \tau = (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)/f \quad (2.1)$$

Покажем, что если за параметр ПВ выбрать  $r$  или  $\tau$ , то ее исследование сводится к квадратурам. Действительно, из последних трех соотношений

(1.4) следует, что переменные  $r$  и  $\tau$  связаны уравнением

$$\frac{dr}{d\tau} = \left( \frac{p - l_0}{l_0 + 4/3 - p} - a \right) \left( \frac{p}{1 - p} - a \right)^{-1} \frac{r}{\tau} = \Phi(r, \tau), \quad a = \frac{\beta}{2\mu} \quad (2.2)$$

где  $p$  — корень характеристического уравнения

$$(l_0 + 4/3 - p)(1 - p) - b(1 - p)r - b(l_0 + 4/3 - p)\tau = 0, \\ b = 2\mu/(2\mu + \beta) \quad (2.3)$$

Пусть  $p_i = F_i(r, \tau)$  ( $i = 1, 2$ ) — корни уравнения (2.3). Разрешив эти соотношения относительно  $r, \tau$ , произведем замену переменных в уравнении (2.2)

$$(l_0 + 1/3)br = (l_0 + 4/3 - p_1)(l_0 + 4/3 - p_2) \\ (l_0 + 1/3)b\tau = -(1 - p_1)(1 - p_2) \quad (2.4)$$

тогда оно принимает вид уравнения Рикатти

$$\{a(l_0 + 1/3) + l_0\} dp_1/dp_2 = \{(1 + a)p_1 - l_0 - a(l_0 + 4/3)\}(1 - p_1)/(1 - p_2) - \{(1 + a)p_1 - a\}(l_0 + 4/3 - p_1)/(l_0 + 4/3 - p_2) \quad (2.5)$$

Это уравнение записано для быстрых ПВ: вместо  $p$  в уравнение (2.2) подставлен больший корень  $p_1$  уравнения (2.3); медленные ПВ исследуются аналогично.

В рассматриваемом случае частное решение уравнения (2.5) имеет вид

$$3/4(l_0 + 4/3 - p_1)(l_0 + 4/3 - p_2) - (1 - p_1)(1 - p_2) = (l_0 + 1/3)b$$

с его помощью находим общее решение этого уравнения:

$$p_1 = \left\{ \int_{p_2^0}^{p_2} b(t) \varphi(t) dt + a_0 \varphi(p_2^0) \right\}^{-1} \varphi(p_2) + \Psi_0(p_2)$$

$$b(t) = \frac{(1 + a)(l_0 + 1/3)}{m(1 - t)(l_0 + 4/3 - t)}, \quad \Psi_0(p_2) = 3l_0 \frac{l_0 + 4/3 + a_1 - p_2}{p_2 + l_0}$$

$$\varphi(t) = \{(1 - t)^{m-1} (l_0 + 4/3 - t)^{m+4/3} (t + 3l_0)^{-2m}\}^{1/m}$$

$$m = a(l_0 + 1/3) + l_0, \quad a_0 = (p_1^0 - \psi_0(p_2^0))^{-1}, \quad a_1 = 4/3(m - l_0)/(m + a/3)$$

( $p_1^0, p_2^0$  — начальные значения  $p_1, p_2$ ).

Полученное решение уравнения (2.5) и соотношения (2.4) дают связь

$$r = r(\tau; r_0, \tau_0) \quad (r_0 = (s_{11}^0)^2, \quad \tau_0 = (s_{12}^0)^2 + (s_{13}^0)^2)$$

В дальнейшем считаем эту связь известной.

Покажем, что переменные  $s_{12}, s_{13}, \gamma, \lambda, \chi$  выражаются через  $r$  и  $\tau$ . Действительно, проинтегрировав соотношение (1.7), получим

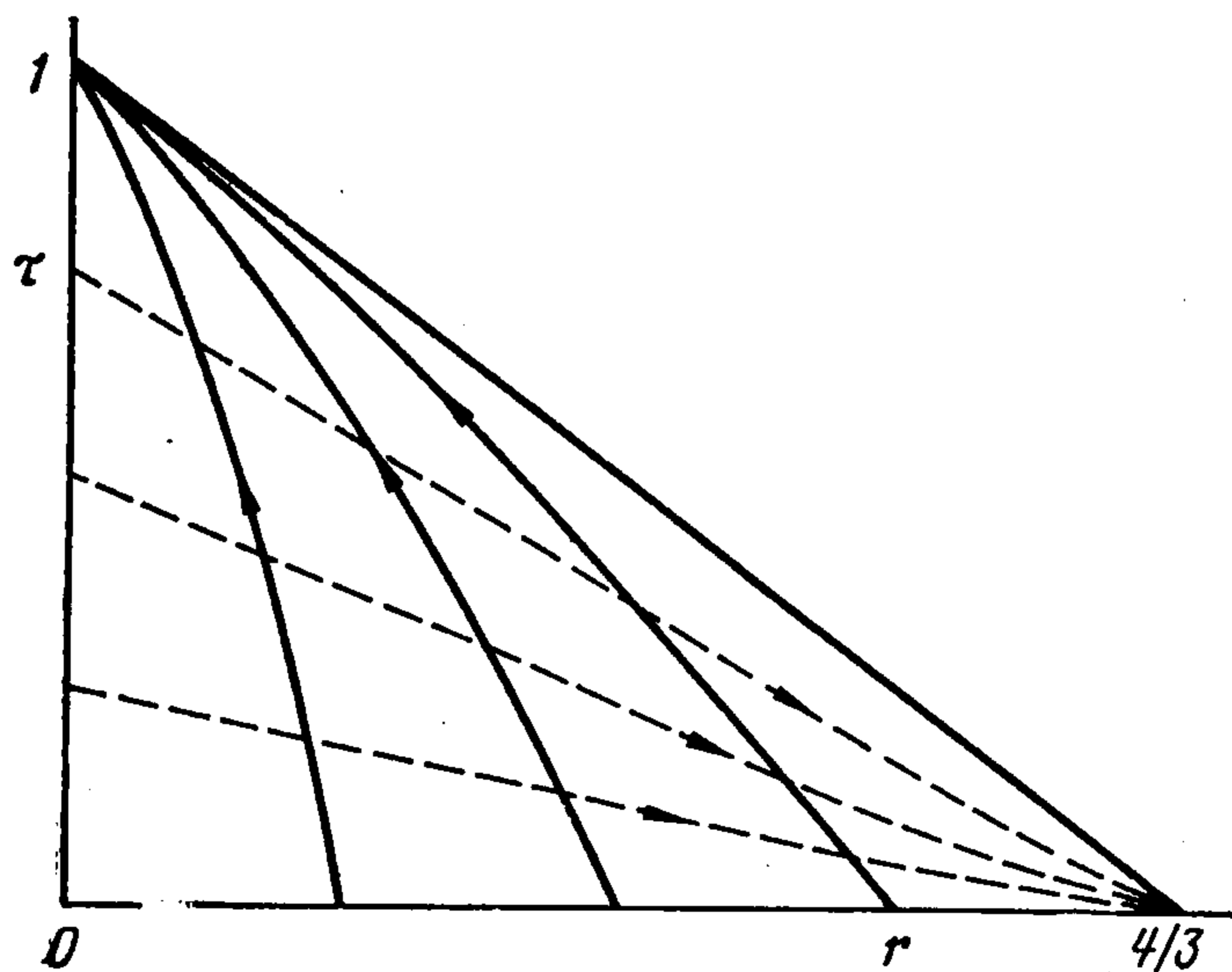
$$\lambda = \mu\beta^{-1} \ln(f(\chi)k_0^{-2}) \quad (2.6)$$

Разрешив предпоследнее уравнение (1.4) относительно  $f(\chi)$ , при учете соотношений (1.3), (2.6), получим

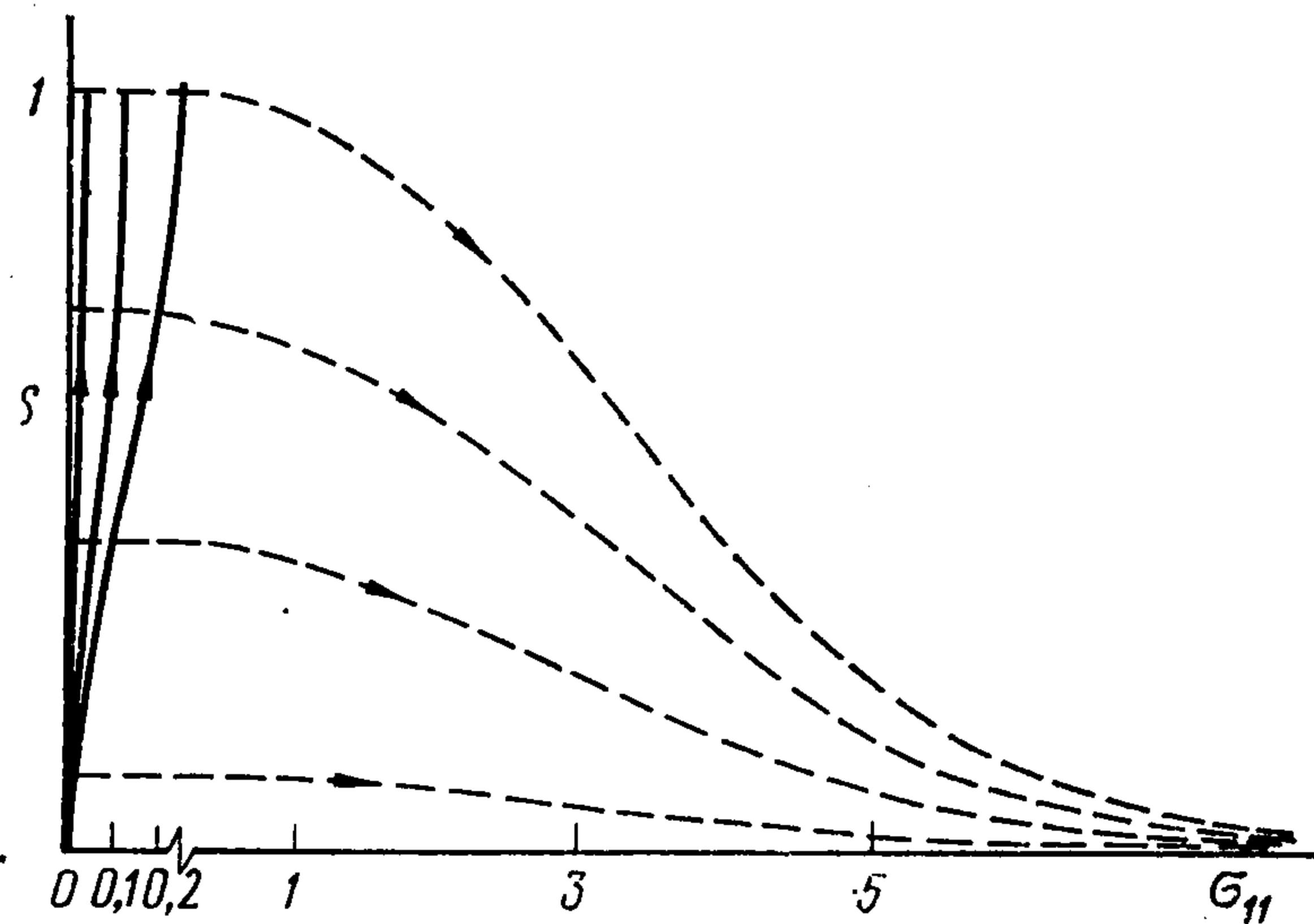
$$k_0^2 + \beta 2\mu\chi = k_0^2 \Lambda(r, \tau), \quad \Lambda(r, \tau) = (1/2\gamma_0/k_0)^{2(1-b)} (1 - 3/4r - \tau)^{-(1-b)} \quad (2.7)$$

Подстановка выражений (2.7), (1.6) в формулу (2.1), определяющую переменную  $\tau$ , приводит к выражению

$$s_{12}^2 = k_0^2 (1 + \alpha_0^2)^{-1} \tau \Lambda(r, \tau)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Из первых интегралов (1.3), (2.6), (2.7) имеем

$$\gamma^2 = \gamma_0^2 (\Lambda(r, \tau))^{-a}$$

Остается выразить через  $r, \tau$  переменные  $\sigma_{11}, v_1, v_2$ . Например, из третьего, четвертого и пятого уравнений (1.4) и соотношения (2.7) следует, что

$$\sigma_{11} - \sigma_{11}^0 = (1/2 \gamma_0 / k_0)^{1-b} \int_{\tau_0}^{\tau} \Psi_1(r(t; r_0, \tau_0), t) dt \quad (2.8)$$

$$\Psi_1(r, \tau) = \operatorname{sgn}(s_{11}^0) \frac{p(1-p)(1 - 3/4 r - \tau)^{-1/2(1-b)} \sqrt{r}}{2(l_0 + 4/3 - p)((1+a)p - a)\tau}$$

Аналогично переменные  $v_1, v_2$ , выражаются в виде квадратур.

Таким образом, в линейно упрочняющейся среде изменение всех величин в ПВ выражается в квадратурах.

**3. Интегральные кривые ПВ.** Для решения задачи о косом ударе необходимо, при любом начальном состоянии, знать поведение проекций интегральных кривых (ИК) ПВ на плоскости  $r, \tau; \sigma_{11}, s = \sqrt{s_{12}^2 + s_{13}^2}; \sigma_{11}, \tau$ .

Проекция ИКПВ на плоскость  $r, \tau$  находятся из решения уравнения (2.2), сведенного в разд. 2 к квадратурам. Рассмотрим проекции ИК медленных ПВ (проекция ИК быстрых ПВ рассматриваются аналогично). Они образуют однопараметрическое семейство кривых (с параметром  $r_0^1$  — координата пересечения интегральной кривой с осью  $r$ ).

На фиг. 1 приведены результаты расчета при  $2\alpha = 1,54 \cdot 10^5$  мПа,  $3K = 5 \cdot 10^5$  мПа,  $\beta = 1,1 \cdot 10^4$  мПа,  $k_0 = 450$  мПа; на всех фигурах штриховые линии соответствуют быстрым, сплошные — медленным ПВ. Направление изменения величин в ПВ указано стрелками. Оно определяется условием активности пластического нагружения  $\partial\lambda/\partial t \geq 0$ .

Для медленной ПВ зависимость величин  $\sigma_{11}, s$  от переменной  $\tau$  и начальных значений  $\sigma_{11}^0, r_0, \tau_0$  определяется соответственно из соотношений (2.8), (2.1), (2.7) в виде

$$\sigma_{11} - \sigma_{11}^0 = (1/2 \gamma_0(r_0, \tau_0) / k_0)^{1-b} [F_1(\tau; r_0^1(r_0, \tau_0)) - F_1(\tau_0; r_0^1(r_0, \tau_0))] \quad \tau \in [0, 1] \quad (3.1)$$

$$s = (1/2\gamma_0(r_0, \tau_0)/k_0)^{1-b} [1 - 3/4r(\tau; r_0^1(r_0, \tau_0), 0) - \tau]^{-1/2(1-b)} \tau^{1/2}$$

$$F_1(\tau; r_0^1(r_0, \tau_0)) = \int_0^\tau \Psi_1(r(t; r_0^1(r_0, \tau_0), 0), t) dt$$

В этих соотношениях функция  $r_0^1(r_0, \tau_0)$  определяется при помощи семейства кривых, изображенных на фиг. 1 ( $r_0^1$  — координата точки пересечения кривой, проходящей через точку  $r_0, \tau_0$ , с осью  $r$ ). Функция  $\gamma_0(r_0, \tau_0)$  определяется из предпоследнего соотношения (1.4).

В силу соотношений (3.1) проекции ИКПВ на плоскость  $\sigma_{11}$ ,  $s$  образуют трехпараметрическое семейство кривых с параметрами  $\sigma_{11}^\circ, r_0, \tau_0$ , однако, зависимость от ряда параметров простая. Покажем, как любая кривая этого семейства строится по однопараметрическому семейству кривых.

Ограничимся случаем  $\text{sgn } s_{11}^\circ > 0$ , так как в силу соотношения (2.8) для  $\text{sgn } s_{11}^\circ > 0$  и  $\text{sgn } s_{11}^\circ < 0$  проекции ИКПВ на плоскость  $\sigma_{11}$ ,  $s$  симметричны относительно оси  $s$ .

Рассмотрим изображенное сплошными линиями на фиг. 2 (при  $\beta = 0$ ) и фиг. 3 (при  $\beta > 0$ ) однопараметрическое (с параметром  $r_0^1$ ) семейство кривых.

$$\sigma_{11} = F(\tau; r_0^1), \quad s = [1 - 3/4r(\tau; r_0^1, 0) - \tau]^{-1/2(1-b)} \tau^{1/2} \quad (3.2)$$

Изменение величины  $s$  ограничено единицей при  $\beta = 0$  (в силу предпоследнего соотношения (1.4)) и не ограничено при  $\beta > 0$ . У рассматриваемых кривых на фиг. 3 существуют вертикальные асимптоты. Крайние правые кривые на фиг. 2, 3 соответствуют  $r_0^1 = 4/3$ , крайние левые (совпадающие с осью  $s$ ) — значению  $r_0^1 = 0$ . При  $\beta = 0$  и реальных значениях величины  $l_0$  диапазон изменения  $\sigma_{11}$  порядка 0,25.

В силу соотношений (3.1) проекции ИК медленных ПВ на плоскость  $\sigma_{11}$ ,  $s$  получаются из семейства кривых (3.2) последовательностью преобразований: сдвигом вдоль оси  $\sigma_{11}$  на расстояние  $-F(\tau_0; r_0^1)$ , гомотетией с центром в нуле и коэффициентом  $(1/2\gamma_0/k_0)^{1-b}$  (при  $\beta = 0$  она вырождается в тождественное преобразование) и сдвигом вдоль оси  $\sigma_{11}$  на расстояние  $\sigma_{11}^\circ$ .

Из соотношений (2.2), (2.8), (3.1) вытекают следующие свойства медленной ПВ. Величины  $\sigma_{11}$ ,  $s$  изменяются в ней монотонно, при этом величина  $\Delta\sigma_{11} > 0$  и ограничена; величина  $\Delta s > 0$  и при  $\beta = 0$  тоже ограничена, а при  $\beta > 0$  неограниченно возрастает.

Для быстрой ПВ из третьего и четвертого соотношений (1.4) и равенства (2.7) имеем (для быстрых ПВ удобнее в качестве параметра использовать переменную  $r$ ):

$$\sigma_{11} - \sigma_{11}^\circ = (1/2\gamma_0(r_0, \tau_0)/k_0)^{1-b} [F_2(r; \tau_0^1(r_0, \tau_0)) - F_2(r_0; \tau_0^1(r_0, \tau_0))], \quad r \in [0, 4/3]$$

$$F_2(r, \tau_0^1(r_0, \tau_0)) = \int_0^r \Psi_2(t, \tau(t; \tau_0^1(r_0, \tau_0), 0)) dt$$

$$\Psi_2(r, \tau) = 1/2 \frac{p(r, \tau)}{(1+a)p - l_0(1+a) - 4/3a} (1 - 3/4r - \tau)^{-1/2(1-b)} r^{1/2}$$

$\tau_0^1(r_0, \tau_0)$  — координата точки пересечения интегральной кривой уравнения (2.2), проходящей через точку  $r_0, \tau_0$  с осью  $\tau$ .

Однопараметрическое (с параметром  $\tau_0^1$ ) семейство кривых, необходимое для получения проекций ИК быстрых ПВ на плоскость  $\sigma_{11}, s$ , определяется соотношениями

$$\sigma_{11} = F_2(r; \tau_0^1), \quad s = [1 - \frac{3}{4}r - \tau(r; \tau_0^1, 0)]^{-\frac{1}{2}(1-b)} \tau^{\frac{1}{2}}(r; \tau_0^1, 0) \quad (3.3)$$

Это семейство изображено штрихованными линиями на фиг. 2, 3.

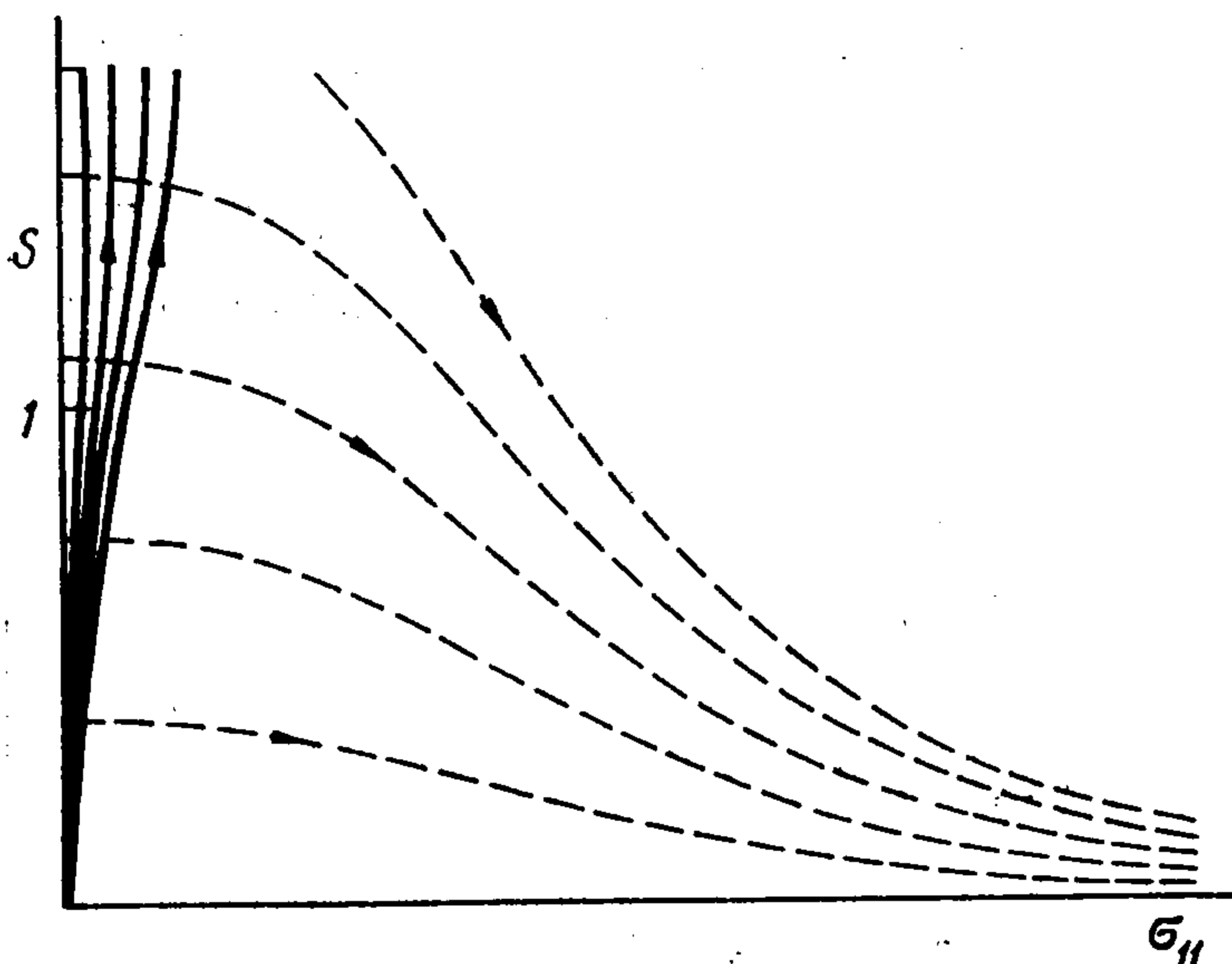
В быстрой ПВ как и в медленной величины  $\sigma_{11}, s$  изменяются монотонно, при этом величина  $\Delta\sigma_{11} > 0$  и неограниченно возрастает, а величина  $\Delta s < 0$  и ограничена ( $s \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \frac{4}{3}$ ).

Проекции ИК медленных ПВ на плоскость  $\sigma_{11}, \tau$  получаются аналогично тому, как для плоскости  $\sigma_{11}, s$  из однопараметрического семейства (3.2) получается трехпараметрическое семейство (3.1). Эти проекции получаются из однопараметрического семейства кривых (с параметром  $r_0^1$ ), задаваемых первым соотношением (3.2) при композиции двух параллельных переносов и растяжения. Проекции ИК быстрых ПВ также аналогично получаются из однопараметрического (с параметром  $\tau_0^1$ ) семейства кривых, задаваемых первым соотношением (3.3) и известной зависимостью  $r = r(\tau; \tau_0^1, 0)$ .

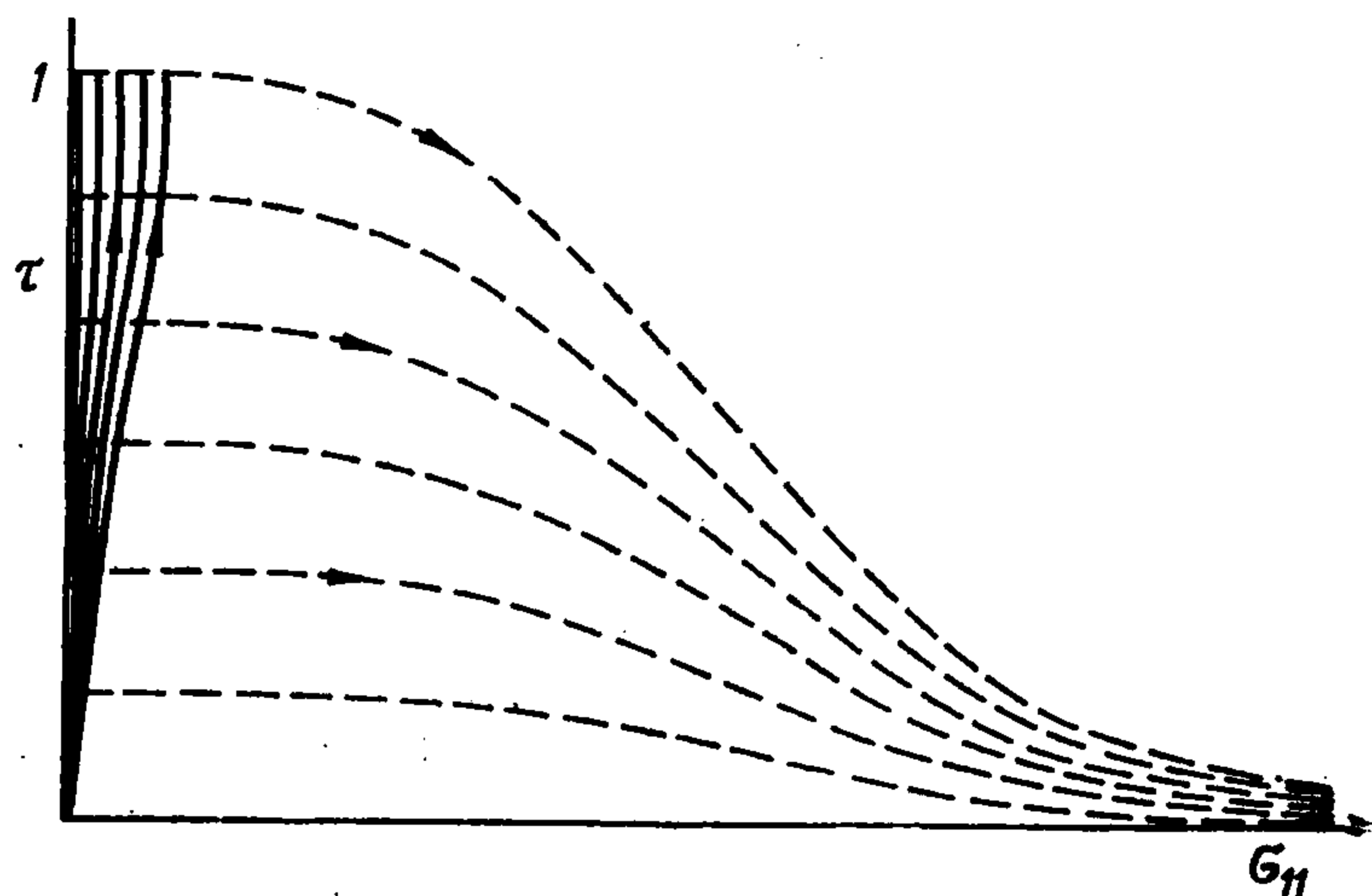
Эти два однопараметрические семейства кривых изображены на фиг. 4 в результате расчета по формулам (3.2), (3.3) при  $\beta > 0$ . В случае  $\beta = 0$  имеем  $s = \tau^{\frac{1}{2}}$ , поэтому достаточно построить проекции ИКПВ на плоскость  $\sigma_{11}, s$ .

Итак, проекции ИКПВ на плоскости  $\sigma_{11}, s$  и  $\sigma_{11}, \tau$  получаются из однопараметрических семейств кривых, изображенных на фиг. 2—4.

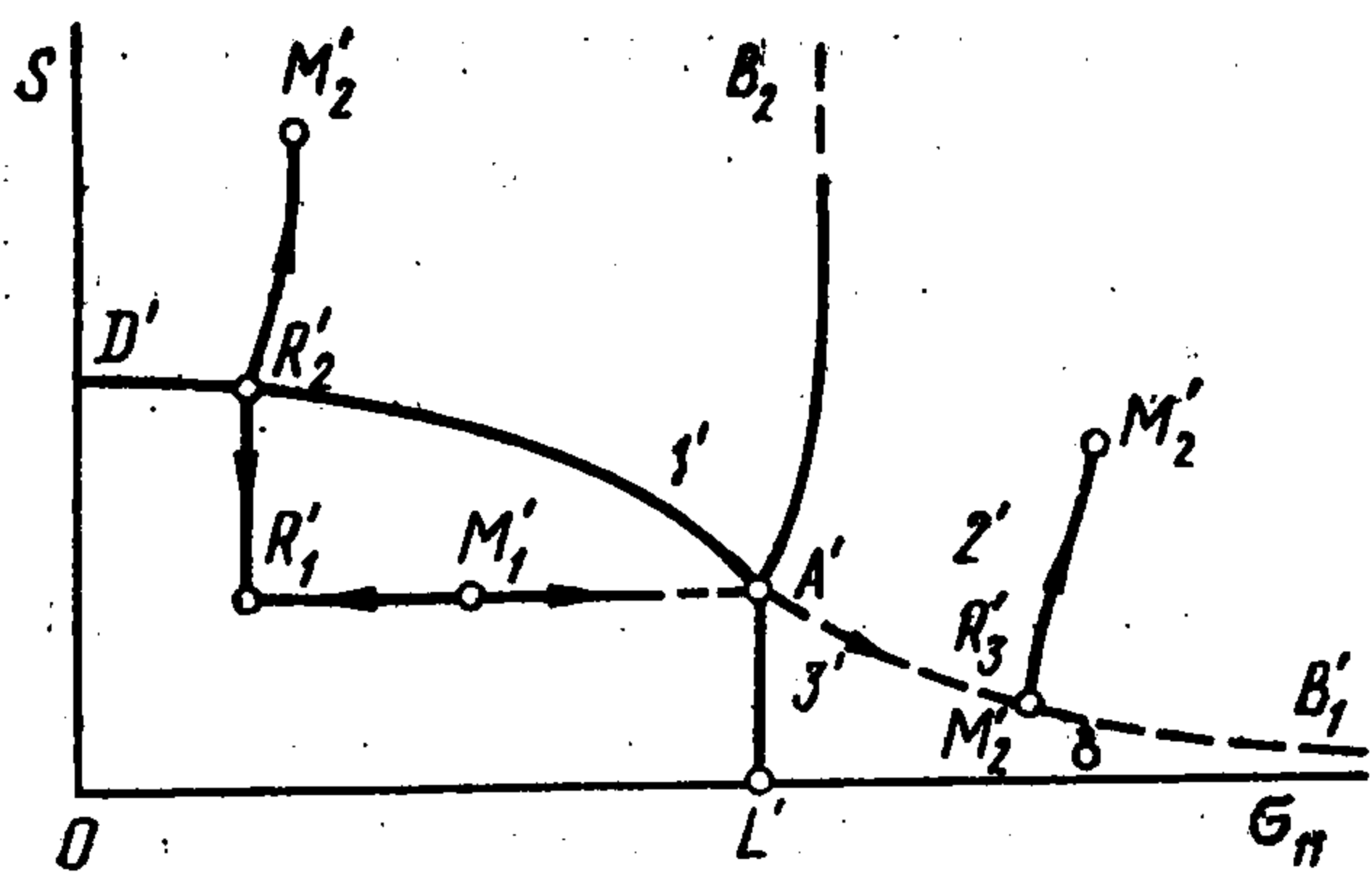
**4. Задача о косом ударе по предварительно напряженному упруго-пластическому полупространству.** Исследуем движение линейно упрочняющейся среды (идеальнопластической при  $\beta = 0$ ), имеющей постоянные однородные начальные напряжения  $\sigma_{ij}^0$  и заполняющей собой полупространство  $x > 0$ . К поверхности полупространства прикладываются постоянные во времени нормальные и касательные напряжения  $\sigma_{11}^f, \sigma_{12}^f, \sigma_{13}^f$ , возникающие в момент  $t = 0$  и остающиеся в дальнейшем постоянными.



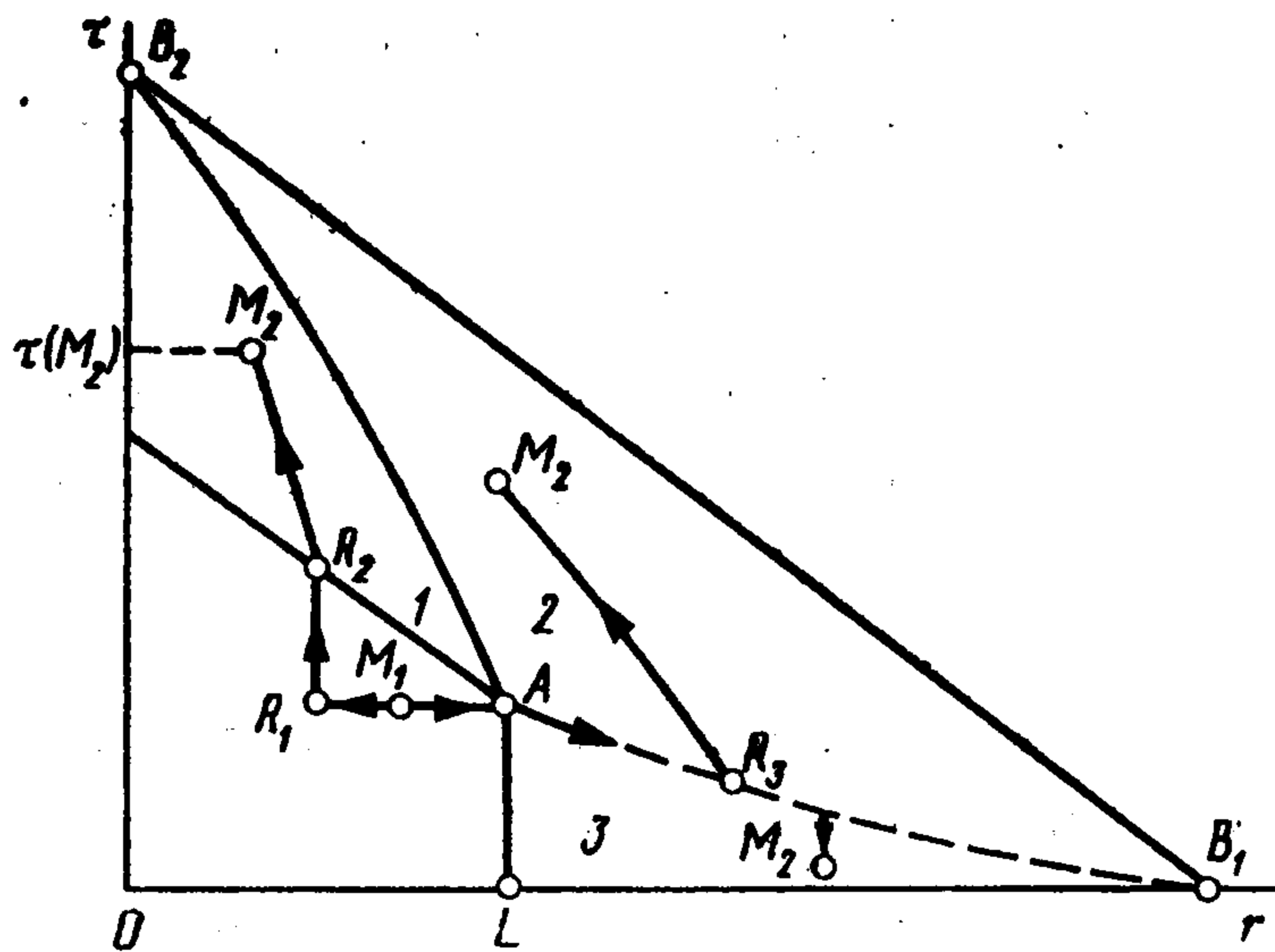
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Все постоянные, входящие в уравнения (1.2) и начальные условия задачи, имеют размерности скорости, плотности или напряжения, поэтому из  $x$  и  $t$  можно образовать лишь одну безразмерную комбинацию (например  $xt^{-1}(\mu/\rho_0)^{-1/2}$ ); задача автомодельна.

В области  $x > 0$  автомодельное решение состоит из распространяющихся вправо упругих ударных ( $J_1$  — продольная волна,  $J_2$  — поперечная волна) и простых пластических волн ( $S_1$  — быстрая ПВ,  $S_2$  — медленная ПВ), разделенных областями, в которых все параметры постоянны. Порядок распространения волн —  $J_1 S_1 J_2 S_2$  устанавливается теоремой Мандела [5].

Покажем, как решить задачу о косом ударе, используя полученные в разд. 3 картины интегральных кривых ПВ.

Будем пользоваться безразмерными переменными, введенными в разд. 2.

В упругих волнах  $J_1, J_2$ , как известно, величины меняются следующим образом:

в продольной волне

$$\Delta\sigma_{11} = -\mu(k_0)^{-1} c \Delta v_1, \quad \Delta\sigma_{22} = \Delta\sigma_{33} = \mu(k_0)^{-1} \frac{-3K + 2\mu}{3K + 4\mu} c \Delta v_1 \quad (4.1)$$

$$\Delta v_2 = \Delta v_3 = \Delta s_{12} = \Delta s_{13} = 0, \quad c^2 = l_0 + 1/3$$

в поперечной волне

$$\Delta s_{12} = -\mu(k_0)^{-1} \Delta v_2, \quad \Delta s_{13} = -\mu(k_0)^{-1} \Delta v_3 \quad (4.2)$$

$$\Delta v_1 = \Delta\sigma_{11} = \Delta\sigma_{22} = \Delta\sigma_{33} = 0$$

Решением задачи о косом ударе является некоторая кривая  $\Gamma$  в пространстве  $\sigma_{ij}$ , соединяющая начальную точку  $\sigma_{ij}^0$  с точкой соответствующие три координаты которой равны  $\sigma_{1i}^f$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Кривая  $\Gamma$  состоит из кривых ударных переходов  $J_1, J_2$ , определяемых соотношениями (4.1), (4.2) и кривых переходов по пластическим ПВ, т. е. интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4). Порядок следования кривых, образующих  $\Gamma$ , определяется порядком распространения волн —  $J_1 S_1 J_2 S_2$ .

В разд. 2 было показано, что в пластической ПВ изменение всех величин определено, если известна траектория изменения величин  $r, \tau$ , т. е. ИК уравнения (2.2). Согласно формулам (4.1), (4.2) в упругих ударных волнах  $J_1, J_2$  изменение всех величин выражается через приращения переменных  $r, \tau$  соответственно (причем необходимо отдельно задать приращение  $s_{12}$  в волне  $J_2$ ). Следовательно, искомая кривая  $\Gamma$  определяется своей проекцией на плоскость  $r, \tau$ . Поэтому решение будем строить на плоскости  $r, \tau$ .

Чтобы удовлетворить граничным условиям задачи, удобно использовать также плоскость  $\sigma_{11}, s$ . Действительно, если проекция на плоскость  $\sigma_{11}, s$  некоторой кривой  $\Gamma$ , указанного выше вида, соединяет начальную точку  $\sigma_{11}^0, s^0 = ((s_{12}^0)^2 + (s_{13}^0)^2)^{1/2}$  с конечной  $\sigma_{11}^f, s^f = ((s_{12}^f)^2 + (s_{13}^f)^2)^{1/2}$ , то эта кривая  $\Gamma$  является решением.

Покажем сначала, что если в конечной точке решения  $s = s^f$ , то правильный выбор изменения  $s_{12}$  в скачке  $J_2$  обеспечивает в конечной точке  $s_{12} = s_{12}^f, s_{13} = s_{13}^f$ . В самом деле, если после волны  $J_1$  имеем  $s = s_1$ , то в волне  $J_2$  на плоскости  $s_{12}, s_{13}$  можно достичь любой точки окружности  $s_{12}^2 + s_{13}^2 = s_1^2$ , в том числе и пары точек  $N^i = (s_{12}^i, s_{13}^i)$  ( $i = 1, 2$ ), определяемых условием  $s_{12}^i/s_{13}^i = s_{12}^f/s_{13}^f$ . Однозначный выбор скачка  $J_2$  обеспечивается условием  $\text{sgn } s_{12}^i = \text{sgn } s_{12}^f$ . В этом случае в силу (1.6) в конечной точке решения  $s_{12} = s_{12}^f, s_{13} = s_{13}^f$ .

В силу предпоследнего соотношения (1.4) и формул (2.1), (4.1), (4.2) проекция поверхности нагружения на плоскость  $\sigma_{11}, s$  имеет вид

$$\frac{n_1^2}{12} \left( \sigma_{11} - \frac{n_2}{n_1} \right)^2 + s^2 = 1 - \frac{1}{4} (\sigma_{22}^0 - \sigma_{33}^0)^2, \quad s \geq 0 \quad (4.3)$$

$$n_1 = \frac{4}{l_0 + 4/3}, \quad n_2 = 2 \frac{2/3 - l_0}{l_0 + 4/3} \sigma_{11}^0 + \sigma_{22}^0 + \sigma_{33}^0$$

Заметим, что, не нарушая общности, можно положить  $n_2 = 0$ .

Действительно, из соотношений (1.4), (4.1)–(4.3) вытекает, что изменение величин  $\sigma_{11}^f, \sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$  при  $\sigma_{11}^f - \sigma_{11}^0 = \text{const}, r_0 = \text{const}, \gamma_0 = \text{const}$  не влияет на решение. Поэтому если оставить постоянными величины  $\sigma_{11}^f - \sigma_{11}^0, r_0, \gamma_0$  и изменить  $\sigma_{11}^f, \sigma_{11}^0, \sigma_{22}^0, \sigma_{33}^0$  так, чтобы  $n_2 = 0$ , то решение останется тем же. Заметим также, что в силу симметрии, вытекающей из соотношений (2.8), (4.1)–(4.3), можно ограничиться случаем  $\sigma_{11}^0 > 0, \sigma_{11}^f > 0$ .

Итак, в силу сделанных замечаний, проекция решения на плоскость  $\sigma_{11}, s$  расположена в первом квадранте, а часть начальной поверхности нагружения проектируется в дугу  $D'A'$  эллипса (4.3) (фиг. 5) (точка  $A'$  соответствует выходу на поверхность нагружения в волне  $J_1$ ).

Пусть начальное состояние изображается на плоскостях  $r, \tau$  и  $\sigma_{11}, s$  соответственно точками  $M_1, M_1'$ , которые лежат внутри или на поверхности нагружения (фиг. 5, 6). Если точка  $M_2'$ , соответствующая конечному состоянию на плоскости  $\sigma_{11}, s$ , лежит внутри или на границе фигуры  $D'A'L'O$ , то решение тривиально — оно состоит из двух упругих скачков  $J_1, J_2$ . Если точка  $M_2'$  лежит снаружи этой фигуры, то вид решения определяется областью, в которую она попадает. Покажем это.

Используя семейства кривых, изображенных на фиг. 2, 4; из любой точки, лежащей на начальной поверхности нагружения  $DA$ , можно, как было показано в разд. 3, выпустить ПВ и построить ее проекции на плоскости  $\sigma_{11}, s$  и  $\sigma_{11}, \tau$ . Из точки  $A$ , которая соответствует выходу на поверхность нагружения в волне  $J_1$ , выпустим быструю и медленную ПВ — соответственно  $AB_1$  и  $AB_2$ . На плоскости  $\sigma_{11}, s$  эти волны проектируются в  $A'B_1', A'B_2'$ .

Фигура  $DALB_1B_2$  разбивается волнами  $AB_1, AB_2$  на области 1—3, отмеченные на фиг. 6. Соответствующая часть первого квадранта плоскости  $\sigma_{11}, s$ , также разбивается волнами  $A'B_1', A'B_2'$  на области 1'—3', отмеченные на фиг. 5.

Можно заметить, что если точка  $M_2'$  принадлежит области 1', то на плоскости  $\tau, \tau$  конечная точка решения  $M_2$  принадлежит области 1, а решение имеет вид  $J_1J_2S_2$ . Аналогично если точка  $M_2'$  принадлежит одной из областей 2', 3', то решение соответственно имеет вид  $J_1S_1J_2S_2, J_1S_1J_2$ .

Покажем, как строится решение для случая когда точка  $M_2'$  принадлежит области 1'. В любую точку  $R_2$ , принадлежащую отрезку  $AD$ , из точки  $M_1$  попадаем упругими скачками  $J_1 - M_1R_1, J_2 - R_1R_2$ . По отрезку  $AD$  перемещаем точку  $R_2$  от точки  $A$  к точке  $D$  до тех пор, пока проекция на плоскость  $\sigma_{11}, s$  медленной ПВ, выпущенной из точки  $R_2$ , не пройдет через точку  $M_2'$ . Используя проекцию этой ПВ на плоскость  $\sigma_{11}, \tau$ , по значению  $\sigma_{11}'$  находим конечное значение переменной  $\tau$ , равное  $\tau(M_2)$ . Решение  $M_1R_1R_2M_2$  найдено.

Если точка  $M_2'$  принадлежит области 2', то по быстрой ПВ  $AB_1$  перемещаем точку  $R_3$  от точки  $A$  к точке  $B_1$  до тех пор, пока проекция на плоскость  $\sigma_{11}, s$  медленной ПВ, выпущенной из точки  $R_3$ , не пройдет через точку  $M_2'$ . В этом случае решением является  $M_1AR_3M_2$ . Для случая, когда точка  $M_2'$  принадлежит области 3', решение строится аналогично.

Автор благодарит Я. А. Каменяржа за советы и обсуждение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bleich H. H., Nelson J. Plane waves in a elastic-plastic half-space due to combined surface pressure and shear // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1966. V. 33. N 1. P. 149—158.
2. Ting T. C. T. Plastic wave propagation in linearly work-hardening materials // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. N 4. P. 1045—1050.
3. Ting T. C. T., Ning Nan. Plane waves due to combined compressive and shear stresses in half space // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1969. V. 36. N 2. P. 189—197.
4. Каменярж Я. А. О простых волнах и распаде разрыва в упругопластической среде с условием Мизеса // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 320—329.
5. Mandel J. Ondes plastiques dans un milieu indefini à trois dimensions // J. Méc. 1962. V. 1. N 1. P. 3—30.