Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 539.3

© 1992 г. **С. М. Козлов**

ОБ ОБЛАСТИ ИЗМЕНЕНИЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС, ПОЛЯРИЗАЦИИ И ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ

Уточняется известный результат Полиа — Шиффера об оценке следа тензора присоединенной массы (ПМ) и поляризации. Найдена точная область изменения тензоров ПМ и поляризации тела фиксированного объема. Показано, что известные в теории композитов оценки возможных значений матрицы эффективной проводимости являются прямым аналогом соответствующих оценок для ПМ и поляризации. Предлагаемый метод доказательства отличается лишь большей длиной вычислений в теории композитов, но более перспективен для изучения ряда других задач теории композитов. Кроме того, вычисляется точное значение ПМ двух движущихся независимо цилиндров в момент их соприкосновения.

В динамике идеальной несжимаемой жидкости для ПМ известно неравенство Полиа — Шиффера [1], согласно которому средняя (по направлениям) ПМ тела не меньше ПМ шара того же объема. Как ни странно, в литературе не удалось обнаружить ответа на вопрос об области возможных значений тензора ПМ тела заданного объема.

Вместе с тем в более сложной задаче оценки эффективной проводимости двухфазного композита этот ответ получен и составляет содержание известных вилок Хашина — Штрикмана — Лурье — Черкаева — Мюра — Тартара (X — T) [2—4]. Как уже отмечалось автором [5], оценка Полиа — Шиффера является низкоконцентрационным пределом вилки X — T. В результате более внимательного рассмотрения оригинального доказательства Полиа — Шиффера автор обнаружил, что оно позволяет, во-первых, дать полный ответ на вопрос об области изменения ПМ, а во-вторых, с небольшой модификацией может быть перенесено на случай двухфазных композитов, откуда получается прямой вывод вилки X — T. Отметим, что ранее одна из оценок Хашина — Штрикмана сходным способом была получена в [6], где также было указано на эту аналогию. Хотя в настоящее время известно немало доказательств вилок X — T см. [7], [8], [9], эти доказательства не столь непосредственны и используют более глубокие соображения.

Интерес автора к изучению ПМ возник в связи с задачей об определении силы удара дрейфующего айсберга о буровую платформу (см. например [10] по поводу экспериментального и численного обсуждения проблемы). Здесь идет речь о вычислении ПМ цилиндра, но не в безграничной жидкости, а в присутствии второго неподвижного цилиндра в момент их контакта. Ниже дано простое, точное решение этой задачи, при помощи конформного отображения.

1. Области изменения присоединенных масс и поляризации. Напомним, что тензором присоединенных масс (ПМ) $m = (m_{ij})$ называется значение следующей вариационной задачи, где плотность жидкости считается равной единице:

$$m\xi\cdot\xi = \sup_{\Phi}\left\{2\int_{\partial V}\Phi n\cdot\xi\, dS - \int_{V}|\nabla\Phi|^2\, dV\right\}$$

и аналогично тензором поляризации $b = (b_{ij})$ — значение задачи

$$b\xi\cdot\xi = \sup_{\Phi}\left\{2\int_{\partial V}\frac{\partial\Phi}{\partial n}y\cdot\xi\,dS - \int_{V}|\nabla\Phi^2|\,dV\right\}$$

Следующая теорема отвечает на вопрос о том, какой в принципе может быть ПМ (поляризация) тела фиксированного объема v.

Теорема 1. Собственные значения M_j (B_j) тензора ПМ (поляризации) тела объема v заполняют область, выделяемую неравенствами

$$M_j > 0,\quad j = 1,\ldots,n;\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{v+M_j}\leqslant\frac{n-1}{v} \tag{1.1}$$

$$B_j > 0,\quad j = 1,\ldots,n;\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{v+B_j}\leqslant\frac{1}{v} \tag{1.2}$$

Доказательство неравенств (1.1) заключается в подстановке в вариационное представление ПМ потенциала простого слоя:

$$\Phi = \int_{\partial V}\zeta\cdot nG(x-y)\,dS_y \tag{1.3}$$

где G — фундаментальное решение оператора Лапласа ($\Delta G = \delta$). После использования формулы Грина и скачка нормальной производной простого слоя в полученном интеграле по области V используем неравенство Коши — Буняковского для оценки интеграла Дирихле. Тогда после оптимального выбора $\zeta\in R^n$ получается матричное неравенство

$$(M^{-1}+v^{-1})^{-1}\geqslant\Pi,\quad \Pi = \{\pi_{ij}\} = \left\{\int_V\int_V\frac{\partial^2 G(x-y)}{\partial x_i\partial x_j}\,dx\,dy\right\} \tag{1.4}$$

и нужно отметить, что, как это следует из (1.4) и $\Delta G = \delta$, $\operatorname{Tr}\Pi = v$. Чтобы получить неравенства (1.2), нужно проделать то же с потенциалом двойного слоя

$$\Phi_* = \int_{\partial V}\zeta\cdot y\,\frac{\partial G(x-y)}{\partial n_y}\,dS_y \tag{1.5}$$

Как видно из приведенного доказательства, неравенства (1.1) точны, когда гармоническая внутри области V функция с граничным значением, равным значению на ∂V потенциала ПМ, линейна в V. Известно, что это имеет место для эллипсоидов. Чтобы построить тело заданного объема с ПМ из области, выделяемой неравенствами (1.1), достаточно приклеить к такому эллипсоиду подходящие плоские куски, которые не изменяют объем, но увеличивают в соответствующем направлении ПМ.

Интересно отметить, что в доказательстве Шиффера $\zeta = \xi$. Такой выбор точен только для сферы и его достаточно для правильной оценки только следа ПМ. Оценка Полиа — Шиффера получается из (1.1), если дополнительно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Отметим также одно полезное неравенство, связывающее ПМ M_1 тела B_1 и M_2 объемлемого им тела B_2. Если обозначить через v_1 и v_2 их объемы, то справедливо тензорное неравенство $M^1 + v_1 \geqslant M^2 + v_2$. Оно получается подстановкой потенциала ПМ тела B_2 в качестве пробной функции в вариационную задачу, выражающую M_1. Более удобно, однако, понимать это неравенство в контексте теории композитов, рассматривая два композита — один с периодическим включением B_1, другой с B_2 и считая эти включения непроводящими. Тогда, очевидно, эффективная проводимость первого из них меньше, что в низкоконцентрационном пределе [5] дает требуемое неравенство.

2. Вилка $X - T$. Пусть $0 \leqslant \sigma_1 \leqslant \sigma_2 \leqslant \infty$ и v, $0 < v < 1$ — объемная доля фазы σ_1. Эффективная проводимость $\sigma^\circ = (\sigma_{ij}^\circ)$ композита, заполняющего куб $[0, 1]^n$, определяется соотношением

$$\sigma_{ij}^\circ \xi_i \xi_j = \inf_{\langle \nabla \Phi \rangle = \xi} \int_{[0,1]^n} \sigma(x) (\nabla \Phi)^2 \, dx \tag{2.1}$$

$$\sigma_{ij}^{\circ -1} \xi_i \xi_j = \inf_{\substack{\langle p \rangle = \xi \\ \partial_i p_i = 0}} \int_{[0,1]^n} \sigma^{-1}(x) \, |p|^2 \, dx \tag{2.2}$$

$$(\sigma(x) = \sigma_1 \chi(x) + \sigma_2 (1 - \chi(x)), \quad \langle \chi \rangle = v)$$

где χ — характеристическая функция множества V, $\sigma^{\circ -1}$ — матрица, обратная к σ°, а минимум разыскивается по периодическим функциям (2.1) и вектор-функциям (2.2), где $\langle \cdot \rangle$ — среднее периодической функции.

Вилка $X - T$ утверждает, что собственные значения $\{\lambda_j\}$-матрицы σ° заполняют область, выделяемую неравенствами

$$(-1)^{\alpha-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j - \sigma_\alpha} \leqslant \frac{1}{\sigma_\Gamma - \sigma_\alpha} + \frac{n-1}{\sigma_a - \sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \tag{2.3}$$

$$\sigma_\Gamma \leqslant \lambda_j \leqslant \sigma_a \quad j = 1, \ldots, n$$

$$(\sigma_a = (\sigma_1 v + \sigma_2 (1 - v)), \quad \sigma_\Gamma = (\sigma_1^{-1} v + \sigma_2^{-1} (1 - v))^{-1})$$

Для вывода оценки (2.3) при $\alpha = 2$ воспользуемся представлением (2.1) и аналогично (1.4) возьмем пробную функцию в виде

$$\Phi(x) = x \cdot \xi + \psi(x), \quad \Psi(x) = \int_{\partial V} G(x - y) \, n \cdot \zeta \, dS_y \xi, \ \zeta \in R^n \tag{2.4}$$

где $G(z)$ — периодическое фундаментальное решение оператора Лапласа:

$$\Delta_z G(z) = \sum_{k \in Z^n} \delta(z - k) - 1 \tag{2.5}$$

Z^n — целочисленная решетка, а вычитание единицы необходимо для получения периодической функции G.

Вычисление по формуле (1.5), цель которого записать энергию по области V занятой меньшей фазой σ_1, приводит к соотношению

$$(\sigma^\circ - \sigma_a) \xi \cdot \xi \leqslant \int_V [2 (\sigma_1 - \sigma_2) \cdot \xi \cdot \nabla \psi + \sigma_2 \zeta \cdot \nabla \psi] \, dx + (\sigma_1 - \sigma_2) \int_V |\nabla \psi|^2 \, dx$$

Оценивая последнее слагаемое по неравенству Коши — Буняковского

$$\int_V |\nabla \psi|^2 \, dx \geqslant \frac{1}{v} \left| \int_V \nabla \psi \, dx \right|^2$$

положив $\Pi \zeta = \int_V \psi dx$, после выбора оптимального ζ приходим к матричному неравенству

$$\frac{\sigma^\circ - \sigma_a}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \leqslant -\left(\sigma_2 \Pi^{-1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{V} \right)^{-1}$$

Разрешив это неравенство относительно П и использовав соотношение Tr П $=$ $= v\,(1 - v)$, получаем неравенство (2.3) при $\alpha = 2$.

Для вывода этого неравенства при $\alpha = 1$, который с вычислительной точки зрения оказался много сложнее, следует взять в (2.2) пробную функцию вида

$$p = \nabla\Phi_*, \quad \Phi_* = x\cdot\xi + \psi_*, \quad \psi_*(x) = \int\limits_{\partial V_*} y\cdot\zeta\,\frac{\partial G(x-y)}{\partial n}\,dS_y$$

$$V_* = I^n \setminus V,\ I^n = [0, 1]^n$$

Такая вектор-функция будет допустимой ввиду непрерывности нормальной производной двойного слоя.

Используя формулу Грина о скачке потенциала двойного слоя, получим

$$\int \sigma_* |p|^2\,dx = \sigma_a^* |\xi|^2 + 2\int\limits_{I^n} \sigma_*\xi\cdot\nabla\psi\,dx + \int\limits_{I^n} \sigma_* |\nabla\psi|^2\,dx$$

$$\sigma_* = \sigma^{-1}(x),\ \sigma_1^* = \sigma_2^{-1},\ \sigma_2^* = \sigma_1^{-1},\ \sigma_a^* = \sigma_1^* v_* + \sigma_2^* v$$

$$\int\limits_{I^n} \sigma\,\xi\cdot\nabla\psi\,dx = \sigma_1^* K_* + \sigma_2^* K = (\sigma_2^* - \sigma_2^*)\,K_* + \sigma_2^* v_*\zeta\cdot\xi$$

$$K = \int\limits_V \xi\cdot\nabla\psi\,dx, \qquad K_* = \int\limits_{V_*} \xi\cdot\nabla\psi\,dx$$

Здесь использовано преобразование]

$$K = \int\limits_{\partial V} n\cdot\xi\psi\,dS, \qquad K_* = \int\limits_{\partial V_*} \psi_{in} n\cdot\xi\,dS + \int\limits_{\partial V_*} \zeta\cdot y\cdot n\cdot\xi\,dS$$

где ψ_{in} — предельное значение ψ изнутри области. Аналогично имеем

$$\int\limits_{V_*} \sigma_* |\nabla\psi|^2\,dx = (\sigma_1^* - \sigma_2^*)\,L_* + \sigma_2^* \int \zeta\cdot\nabla\psi\,dS, \qquad L_* = \int\limits_{V_*} |\nabla\psi|^2\,dx$$

Кроме того, $\langle\nabla\psi\rangle = v_*\zeta$, поэтому, заменив ξ на $\xi + v_*\zeta$, получаем

$$\sigma^{\circ *}(\xi + v_*\zeta)\cdot(\xi + v_*\zeta) \leqslant \langle\sigma^{-1}|p|^2\rangle = 2\,(\sigma_1^* - \sigma_2^*)\,\xi\cdot\int\limits_{V_*} \nabla\psi\,dx + \sigma_2^*\zeta\cdot\int\limits_{V^*} \nabla\psi\,dx +$$
$$+ 2\sigma_2^* v\xi\cdot\zeta + \sigma_a^* |\xi|^2 + L_*$$

где $\sigma^{\circ *}$ —матрица, обратная к σ°. Последнее слагаемое оценивается по неравенству Коши — Буняковского, в результате чего приходим к неравенству

$$(\sigma^{\circ *}\xi, \xi) \leqslant 2\xi\cdot A\,\zeta + B\zeta\cdot\zeta + \sigma_a^* |\xi|^2$$

$$A = (\sigma_1^* - \sigma_2^*)\cdot(\Pi_* - v_*), \qquad B = \frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{v_*}\cdot\Pi_*^2 - 2\,(\sigma_1^* - \sigma_2^* v_*)\cdot\Pi_* +$$
$$+ \sigma_2^*\cdot\Pi_* + (\sigma_a^* - 2\sigma_2^*)\,v_*^2, \qquad \Pi_*\zeta = \int\limits_{V_*} \nabla\psi_*\,dx$$

Замечательным образом B делится нацело на A, как полином по Π_*. Поэтому, оптимизируя ζ, получаем матричное неравенство

$$\sigma^{\circ *} - \sigma_a^{\circ *} \leqslant -AB^{-1}A = -v_*\,(\Pi_* - \alpha\cdot v_*)^{-1}\,(\sigma_1^* - \sigma_2^*)\,(\Pi_* - v_*^2)$$

$\alpha = (\sigma_a^* - 2\sigma_2^*)\,(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^{-1}$

Разрешая его относительно Π_* и используя соотношение Tr $\Pi_* = n\cdot v_* + v_*\,(1 -$ $- v_*)$, приходим к неравенству (2.3) для $\alpha = 1$. Проведенные оценки превращаются в равенство в случае, когда экстремальное поле линейно на фазе σ_1^* (в среде, образованной одетыми эллипсоидами [2]).

Оценки (1.1), (1.2) получаются из (2.3) для $\alpha = 2,1$ при $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 =$ $= 1$ и $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = \infty$ соответственно путем предельного перехода по малой концентрации периодического включения, причем в правой части

(2.3) сохраняется соответственно второе и первое слагаемое. Это утверждение получается методом работы [5].

3. Присоединенная масса цилиндра в присутствии неподвижного цилиндра. Имеются две окружности: S_R радиуса R и S_r радиуса r, причем они касаются, образуя восьмерку. Рассматривается задача о нахождении гармонической функции Φ вне восьмерки с граничным условием

$$\partial\Phi/\partial n\,|_{S_R}=0,\quad \partial\Phi/\partial n\,|_{S_r}=n\cdot\xi$$

где n — вектор внешней нормали к S_r. Требуется вычислить тензор ПМ

$$m\xi\cdot\xi=\int\limits_{S_r}\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\,dS=\int\limits_{S_r}\Phi n\cdot\xi\,dS$$

Теорема 2. Тензор (m_{ij}) шаровой $m_{ij}=m\cdot\delta_{ij}$ и $m=m\,(r,R)$

$$m\,(r,R)=\pi r^2\Big(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\beta n+1)^2}\Big),\quad 2\beta=I+\frac{r}{R}\tag{3.1}$$

В частности, при $R=\infty$:

$$m=\pi r^2\,(\pi^2/3-1)$$

Для получения соотношения (3.1) нужно сделать инверсию относительно точки касания. Тогда необходимо вычислить интеграл Дирихле функции, гармонической в полосе $-1/(2r)\leqslant x_1\leqslant 1/(2R)$, для которой выполняются условия

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\Big|_{x_1=1/(2R)}=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(u-\frac{x_1\xi_1-x_2\xi_2}{x_1^2+x_2^2}\Big)\Big|_{x_1=-1/(2r)}=0$$

После преобразования Фурье ($x_2\to k$) и решения обыкновенного дифференциального уравнения по x_1 получаем для $\xi=(1,0)$

$$u\,(x_1,k)=\frac{f^*(k)}{k}\Big[\operatorname{sh}\Big(k\frac{R+r}{2Rr}\Big)\Big]^{-1}\operatorname{ch}\Big(k\Big(x_1+\frac{1}{2R}\Big)\Big)$$

$$f^*(k)=F_{x_2\to k}\Big(\frac{(x_2^2-{}^1\!/_4r^{-2})}{(x_2^2+{}^1\!/_4r^{-2})}\Big)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,k\exp\Big(-\frac{k}{2r}\Big)$$

Вычисляя интеграл Дирихле в переменных x_1, k при помощи равенства Парсеваля, получаем

$$m\,(r,R)=\pi\int\limits_0^{\infty}k\operatorname{cth}\Big(k\frac{R+r}{2Rr}\Big)\exp\Big(-\frac{k}{r}\Big)dx$$

Отсюда, раскладывая cth в геометрическую прогрессию, получаем (3.1). Ряд в (3.1) может быть выражен через гамма-функцию [11]

$$m\,(r,R)=\pi r^2\Big(1+\frac{1}{2\beta^2}\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)\,|_{z=1/(2\beta)}\Big)$$

Аналогично вычисляется коэффициент пропорциональности между силой, действующей на покоящийся цилиндр, и ускорением движущегося цилиндра

$$m_{12}=\int dx_2\int\limits_{-{}^1\!/_2R^{-1}}^{{}^1\!/_2r^{-1}}dx_1\nabla u\cdot\nabla u^*$$

где гармоническая в полосе функция u^* удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_1}\bigg|_{x_1=\frac{1}{2}r^{-1}}=0 \qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(u^*-\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)\bigg|_{x_1=-\frac{1}{2}R^{-1}}=0$$

Выкладки, аналогичные приведенным выше, дают

$$m_{12} = \pi R_h^2\cdot\pi^2/12 \quad (R_h = (^1/_2R^{-1} + {^1/_2}r^{-1})^{-1})$$

Автор благодарит Г. С. Куликова, привлекшего его интерес к этой задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schiffer M.* Sur la polarisation et la masse virtuelle // C.R. Acad. Sci. Paris, 1957. V. 244. N 26. P. 3118—3121.
2. *Hashin Z.*, *Shtrickman S.* A variational approach to theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials // J. Applied Phys. 1962. V. 33. N 10. P. 3125—3131.
3. *Lurie K. A.*, *Cherkaev A. V.* Exact estimaites of conductivity of composites formed by two isotropically conducting media taken in prescribed proportion // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1984. V. 99A. N 1/2. P. 71—87.
4. *Murat F.*, *Tartar L.* Optimality conditions and homogenization // Research Notes in Maths. London: Pitman, 1985. V. 127. P. 1—8.
5. *Козлов С. М.* Геометрические аспекты усреднения // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44. N 2. С. 79—120.
6. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
7. *Golden K.* Bounds on the complex permittivity of a multicomponent materials // J. Mech. Phys. Solid. 1986. V. 34. No. 4. P. 333—358.
8. *Kohn R.* Recent progress in the mathematical modeling of composite materials // Proc. of a Workshop on «Composite materials Response» Glasgow. 1987.
9. *Milton G.* On characterising the set of possible effective tensors of composites: the variational methods and the translation methods // Communs. Pure Appl. Math. 1990. V. 43. N 1. P. 63—125.
10. *Isaacson M.*, *Kwok Fai Cheung.* Influence of added masses on ice impacts // Can. J. Civ. Eng. 1988. V. 15. N 4. P. 698—708.
11. *Уиттекер Э. Т.*, *Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 515 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.XI.1990