

УДК 539.3

© 1992 г. А. А. Евтушенко, О. М. Уханская

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ФРИКЦИОННЫЙ РАЗОГРЕВ ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ УПРУГИХ СЖИМАЕМЫХ ТЕЛ

Исследуется перераспределение контактного давления от действия тепловой энергии, образующейся при скольжении с трением двух упругих изотропных тел. Пластическая прочность пары трения представляется как результат сложения силовой и температурной составляющих тензора напряжений. Предлагается методика контроля пластических деформаций, связанных с износом.

1. Рассматривается задача о контакте двух упругих разнородных тел, одно из которых — полупространство, а второе ограничено осесимметричной поверхностью круговой в плане формы. Тела находятся в контакте под воздействием сжимающей P и касательной fP сил, f — коэффициент трения. Поверхность полупространства скользит с постоянной скоростью V по неподвижной осесимметричной поверхности (неровности) в направлении некоторой оси x . Вследствие трения на площадке контакта происходит теплообразование, формирующее поток тепла, идущий внутрь неподвижного тела

$$Q(r) = \gamma f V p(r), \quad r \leq a \quad (1.1)$$

Здесь γ — коэффициент разделения тепловых потоков, $p(r)$ — контактное давление в соответствующей изотермической контактной задаче [1]

$$p(r) = p_0 (1 - \rho^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} X_m P_m^*(\rho), \quad \rho = r/a$$

$$X_m = \frac{2E^* G_m \sigma_m}{a^3 \rho_0 \lambda_m^2}, \quad G_m = \int_0^a \frac{r G(r) P_m^*(\rho)}{\sqrt{1 - \rho^2}} dr \quad (1.2)$$

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2m-1)!!}{2^m m!}, \quad P_m^*(\rho) = P_{2m}(\sqrt{1 - \rho^2}), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$G(r) = \Delta - g(r), \quad \frac{1}{2E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}, \quad p_0 = \frac{P}{\pi a^2}, \quad \sigma_m = \frac{1}{2} + 2m, \\ m = 0, 1, \dots$$

$z = g(r)$ — уравнение поверхности, ограничивающей неровность, Δ — вертикальное перемещение центра тяжести неровности, E_i, ν_i — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материалов неподвижного тела ($i = 1$) и полупространства ($i = 2$), $P_m(\cdot)$ — полином Лежандра. Из условия равновесия

$$2\pi \int_0^a r p(r) dr = P$$

следует, что $X_0 = 1/2$. Достаточно полный перечень существующих форм реальных контактных поверхностей приведен в [2].

Для исследования теплового режима осесимметричного тела требуется найти решение уравнения теплопроводности

$$\nabla^2 T = \frac{a^2}{k} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad (1.3)$$

(T — температура, t — время, k — коэффициент температуропроводности материала неровности, $Z = z/a$) с граничными условиями

$$\frac{\partial T}{\partial Z} \begin{cases} -\Lambda (1 - \rho^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} X_m P_m^*(\rho), & 0 \leq \rho < 1, \quad Z = 0 \\ 0, & \rho > 1, \quad Z = 0 \end{cases} \quad (\Lambda = Q_0 a / \lambda, \quad Q_0 = \gamma f V p_0) \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} = 0, \quad \rho = 0, \quad 0 \leq Z < \infty \quad (1.5)$$

при условиях регулярности

$$T \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow 0 \text{ при } Z \rightarrow \infty \quad (1.6)$$

и начальном условии

$$T = 0 \text{ при } t = 0 \quad (1.7)$$

(λ — коэффициент теплопроводности материала неподвижного тела).

Применяя к уравнению (1.3) последовательно интегральное преобразование Ганкеля нулевого порядка по переменной ρ и Лапласа по времени t с использованием условий (1.5)–(1.7), получаем

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial Z^2} - \xi^2 \bar{T} = \frac{a^2 s}{k} \bar{T} \quad (1.8)$$

$$\bar{T}(\xi, Z, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} T(\xi, Z, t) dt$$

$$T(\xi, Z, t) = \int_0^{\infty} \rho J_0(\xi \rho) T(\rho, Z, t) d\rho$$

($J_0(\cdot)$ — функция Бесселя). Трансформированные условия (1.4) и (1.6) дают

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial Z} = -\Lambda \varphi(\xi) / s \text{ при } Z = 0, \quad T \rightarrow 0 \text{ при } Z \rightarrow \infty \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.8), удовлетворяющее условиям (1.9), имеет вид

$$\bar{T}(\xi, Z, s) = \Lambda \varphi(\xi) [s \sqrt{\xi^2 + a^2 s / k} \exp(Z \sqrt{\xi^2 + a^2 s / k})]^{-1} \quad (1.10)$$

Применяя к соотношению (1.10) обратные трансформации Лапласа и Ганкеля, получаем ($Fo = a^{-2} kt$ — критерий Фурье)

$$T(\rho, Z, t) = \Lambda \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \Phi_0(\xi, Z, Fo) J_0(\xi \rho) d\xi \quad (1.11)$$

$$\Phi_0(\xi, Z, Fo) = \frac{1}{2} \left[e^{-\xi Z} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{Fo}} - \xi \sqrt{Fo} \right) - e^{\xi Z} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{Fo}} + \xi \sqrt{Fo} \right) \right]$$

Интеграл в правой части соотношения (1.11) оценивался численно при помощи процедуры DQAGS пакета QUADPACK [3]. Значения безразмерной температуры $T^* = T/\Lambda$ при $Fo = 1$, $\nu_1 = 0,3$ для цилиндрической ($m = 0$, сплошная линия) и сферической ($m = 1$, штриховая) форм неровности показана на фиг. 1.

2. Неравномерное распределение температуры (1.11) приводит к возникновению в теле температурных напряжений. Упругие перемещения, индуцированные в упругом теле температурным полем при отсутствии массовых сил определяем из уравнения

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu_1} u_{j,ji} = \frac{2(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} \alpha_t T_{,i} \quad (2.1)$$

Здесь α_t — коэффициент линейного температурного расширения материала осесимметричного тела. Вводя в рассмотрение термоупругий потенциал $\Phi_{,i} = u_i$, в безразмерных координатах ρ и Z уравнение (2.1) запишем в виде эквивалентного ему дифференциального уравнения

$$\nabla^2 \Phi = \beta T, \quad \beta = a^2 \alpha_t (1 + \nu_1) / (1 - \nu_1) \quad (2.2)$$

Температурные напряжения определяем по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{2\mu}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \nabla^2 \Phi \right), & \sigma_{\theta 1} &= \frac{2\mu}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \nabla^2 \Phi \right) \\ \sigma_{z1} &= \frac{2\mu}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} - \nabla^2 \Phi \right), & \sigma_{rz1} &= \frac{2\mu}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial Z}, & \mu &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Построим решение уравнения (2.2), удовлетворяющее граничным условиям

$$\sigma_{z1} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} - \nabla^2 \Phi = 0 \text{ при } Z = 0, 0 \leq \rho < \infty \quad (2.4)$$

$$\sigma_{rz1} = 0 \text{ или } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial Z} = 0 \text{ при } Z = 0, 0 \leq \rho < \infty \quad (2.5)$$

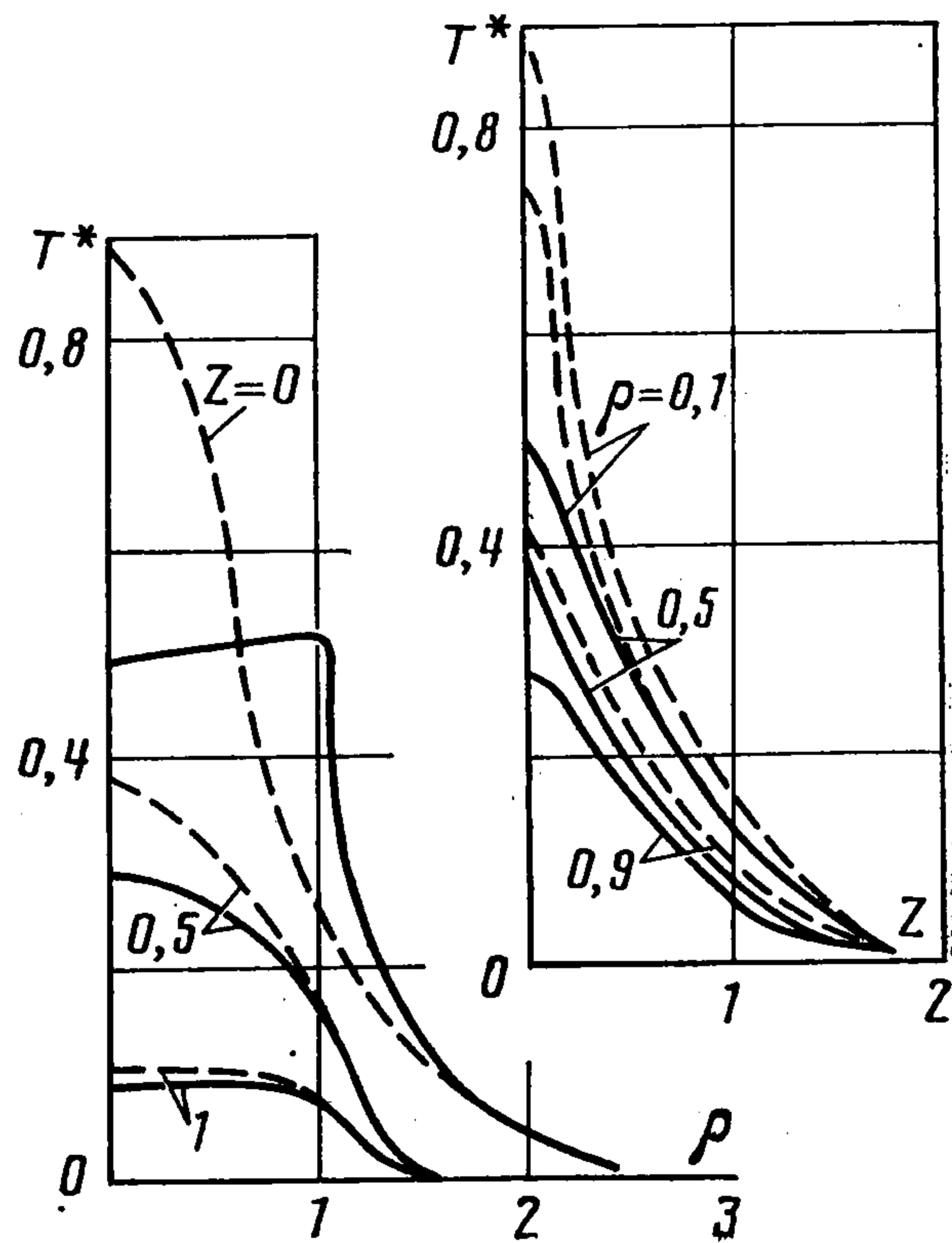
$$u_r = 0 \text{ или } \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 0 \text{ при } \rho = 0, 0 \leq Z < \infty \quad (2.6)$$

и условиям убывания

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty, u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \rightarrow 0 \text{ при } Z \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.2), полученное путем последовательного применения прямого и обратного преобразований Ганкеля нулевого порядка и Лапласа, удовлетворяющее условиям (2.4), (2.6), (2.7), имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, Z, t) &= \Lambda \beta \int_0^\infty \varphi(\xi) \Phi_1(\xi, Z, Fo) J_0(\xi \rho) d\xi \\ \Phi_1(\xi, Z, Fo) &= e^{-\xi Z} \left(\frac{Fo}{2} - \frac{Z}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{Fo}} - \xi \sqrt{Fo} \right) - \end{aligned}$$



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
& - e^{\xi Z} \left(\frac{F_0}{2} + \frac{Z}{4\xi} - \frac{1}{4\xi^2} \right) \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{F_0}} + \xi\sqrt{F_0} \right) - \\
& - e^{-\xi Z} \left(F_0 - \frac{1}{2\xi^2} \right) \operatorname{erf}(\xi\sqrt{F_0}) + e^{-\xi^2 F_0} \frac{\sqrt{F_0}}{\xi\sqrt{\pi}} (e^{-Z^2/(4F_0)} - e^{-\xi Z}) \quad (2.8)
\end{aligned}$$

На основании соотношения (2.8) из (2.3) находим

$$\begin{aligned}
\sigma_{r1} &= C \int_0^\infty \varphi(\xi) \Phi_1(\xi, Z, F_0) \left[\frac{\xi}{\rho} J_1(\xi\rho) - \xi^2 J_0(\xi\rho) \right] d\xi - C_1 T \\
\sigma_{\theta 1} &= -C \int_0^\infty \varphi(\xi) \Phi_1(\xi, Z, F_0) \frac{\xi}{\rho} J_1(\xi\rho) d\xi - C_1 T \\
\sigma_{z1} &= C \int_0^\infty \varphi(\xi) \Phi_1(\xi, Z, F_0) \xi^2 J_0(\xi\rho) d\xi \\
\sigma_{rz1} &= -C \int_0^\infty \varphi(\xi) \Phi_2(\xi, Z, F_0) \xi^2 J_1(\xi\rho) d\xi \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Phi_2(\xi, Z, F_0) &= \left(\frac{Z}{4\xi} - \frac{F_0}{2} \right) \left[e^{-\xi Z} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{F_0}} - \xi\sqrt{F_0} \right) + \right. \\
& + e^{\xi Z} \operatorname{erfc} \left(\frac{Z}{2\sqrt{F_0}} + \xi\sqrt{F_0} \right) \left. \right] + e^{-\xi Z} \left(F_0 - \frac{1}{2\xi^2} \right) \times \\
& \times \operatorname{erf}(\xi\sqrt{F_0}) + \frac{\sqrt{F_0}}{\xi\sqrt{\pi}} e^{-(\xi^2 F_0 + \xi Z)}, \quad C = \Lambda C_1, \quad C_1 = 2\mu\beta a^{-2} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

При $Z = 0$ из последних двух соотношений (2.9) с учетом (2.10) получим

$$\begin{aligned}
\sigma_{rz1}(\rho, 0, t) &= -C \int_0^\infty \varphi(\xi) \Phi_3(\xi, F_0) \xi^2 J_1(\xi\rho) d\xi \\
\sigma_{z1}(\rho, 0, t) &= 0 \quad (2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3(\xi, F_0) &\equiv \Phi_2(\xi, 0, F_0) = -F_0 \operatorname{erfc}(\xi\sqrt{F_0}) - \\
& - \frac{1}{2\xi^2} \operatorname{erf}(\xi\sqrt{F_0}) - e^{-\xi^2 F_0} \frac{\sqrt{F_0}}{\xi\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Из формул (2.11) следует, что граничное условие (2.5) не выполняется. Поэтому рассмотрим дополнительную задачу о действии на поверхность полупространства распределенных усилий, инициирующих напряжения (обозначаемые индексом 2), такие, что

$$\sigma_{z2} + \sigma_{z1} = 0, \quad \sigma_{rz2} + \sigma_{rz1} = 0 \quad \text{при } Z = 0 \quad (2.12)$$

Напряженное состояние, обусловленное усилиями, осесимметрично распределенными по поверхности упругого полупространства, определим при помощи функции Лява [4], являющейся решением бигармонического уравнения

$$\nabla^4 L = 0 \quad (2.13)$$

Компоненты тензора напряжений связаны с функцией L соотношениями

$$\begin{aligned}
\sigma_{r2} &= \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\nu_1 \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial \rho^2} \right), \quad \sigma_{\theta 2} = \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\nu_1 \nabla^2 L - \frac{1}{\rho} \frac{\partial L}{\partial \rho} \right) \\
\sigma_{z2} &= \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial Z} \left[(2 - \nu_1) \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial Z^2} \right], \quad \sigma_{rz2} = \frac{1}{a^3} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[(1 - \nu_1) \nabla^2 L - \frac{\partial^2 L}{\partial Z^2} \right] \quad (2.14)
\end{aligned}$$

Общее решение уравнения (2.13), ограниченное при $\rho \rightarrow \infty$ и $Z \rightarrow \infty$, имеет вид

$$L = \int_0^{\infty} e^{-\xi Z} (A_1 + Z A_2) J_0(\xi \rho) d\xi \quad (2.15)$$

$$\nabla^2 L = - \int_0^{\infty} 2\xi A_2 e^{-\xi Z} J_0(\xi \rho) d\xi$$

Подставляя функцию L (2.15) в граничные условия (2.12), при учете двух последних формул (2.14), получаем

$$A_1 = (2\nu_1 - 1)\xi^{-1}A_2, \quad A_2 = -Ca^3 \varphi(\xi)\Phi_3$$

Тогда из решения (2.15) находим

$$L = -Ca^3 \int_0^{\infty} \varphi(\xi)\Phi_3(\xi, F_0) \left(\frac{2\nu_1 - 1}{\xi} + Z \right) e^{-\xi Z} J_0(\xi \rho) d\xi \quad (2.16)$$

Полное поле температурных напряжений получаем суперпозицией полей напряжений (2.9), связанных с термоупругим потенциалом Φ , и напряжений, обусловленных функцией Лява L и определяемых по формулам (2.14). Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = C \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \Phi_1(\xi, Z, F_0) \left[\frac{\xi}{\rho} J_1(\xi \rho) - \xi^2 J_0(\xi \rho) \right] - \right. \\ \left. - \xi e^{-\xi Z} \Phi_3(\xi, F_0) \left[(2\xi - \xi^2 Z) J_0(\xi \rho) + (2\nu_1 - 2 + \xi Z) \frac{J_1(\xi \rho)}{\rho} \right] \right\} d\xi - C_1 T \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = -C \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \Phi_1(\xi, Z, F_0) \frac{\xi}{\rho} J_1(\xi \rho) + \xi e^{-\xi Z} \Phi_3(\xi, F_0) \times \right. \\ \left. \times \left[2\nu_1 \xi J_0(\xi \rho) - (2\nu_1 - 2 + \xi Z) \frac{J_1(\xi \rho)}{\rho} \right] \right\} d\xi - C_1 T \end{aligned}$$

$$\sigma_{zz} = C \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \Phi_1(\xi, Z, F_0) \xi^2 J_0(\xi \rho) - \xi^3 Z e^{-\xi Z} \Phi_3(\xi, F_0) J_0(\xi \rho) \right\} d\xi$$

$$\sigma_{rz} = -C \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \left\{ \Phi_2(\xi, Z, F_0) \xi^2 J_1(\xi \rho) - \xi^2 e^{-\xi Z} \Phi_3(\xi, F_0) (1 - \xi Z) J_1(\xi \rho) \right\} d\xi$$

При вычислении интегралов в формулах (2.17) использовалась та же процедура численного интегрирования [3], что и при нахождении температуры T (1.11).

3. Результирующее поле напряжений, возникающее в неровности, представим в виде суммы

$$\sigma_{ij} = p_0 [\bar{\sigma}_{ij}^t(X, \nu_1, f) + C \bar{\sigma}_{ij}^t(X, \nu_1, F_0)], \quad \bar{\sigma}_{ij}^t = \sigma_{ij}^t / p_0 \quad (3.1)$$

Здесь σ_{ij}^t — изотермические напряжения в произвольной точке $X = (x, y, z)$ полупространства от действия на его границе внутри круговой области (площадки контакта) нормальных и касательных усилий, $\bar{\sigma}_{ij}^t = \sigma_{ij}^t / (C p_0)$, σ_{ij}^t — температурные напряжения (2.17), параметр C на основании (2.10) равняется $C = E_1 \alpha_1 \gamma f V a / [\lambda (1 - \nu_1)]$. При помощи соот-

ношений (3.1) определяем безразмерное напряжение Губера — Мизеса

$$J2 = \frac{1}{p_0} \left\{ \frac{1}{6} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2] + \sigma_{r\theta}^2 + \sigma_{\theta z}^2 + \sigma_{rz}^2 \right\} \quad (3.2)$$

Подробно исследован случай скольжения упругого полупространства по поверхности шара из вольфрама (в условиях работы при повышенных температурах напыление поверхности вольфрамом улучшает ее фрикционные свойства [5]). Точные формулы для расчета изотермических напряжений σ_{ij}^i приведены в [6]. Предполагается, что напряжения в полупространстве, вызванные действием на его границе отдельно нормальных $\sigma_{zz} = -p(r)$ и касательных $\sigma_{xz} = -fp(r)$ ($p(r)$ находим из соотношения (1.2) при $m = 1$) усилий независимы и результирующее напряженно-деформированное состояние можно найти их наложением. При малых (по сравнению с единицей) значениях коэффициента трения такая гипотеза вполне приемлема [7].

Для заданных значений $f = 0,1$, C и F_0 по формулам (3.2) определяем напряжение $J2$ в прямоугольнике $-1,5a \leq x \leq 1,5a$, $y = 0$, $0 \leq z \leq a$ с шагом $0,1a$ и в круге $r \leq 1,5a$, $z = 0$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ с шагом 15° .

Максимальные значения $J2$ ($J2_{\max}$) в плоскостях $y = 0$ и $z = 0$ в зависимости от параметра C для различных значений F_0 представлены на фиг. 2. Как видно, существует локальный минимум значений $J2_{\max}$ и, таким образом, при небольших значениях температурные напряжения, возникающие в неровности вследствие теплообразования от трения, понижают общий уровень напряженного состояния.

Пусть прочность материала шара σ_y — линейно убывающая функция температуры

$$\sigma_y = \sigma_y^\circ - nT \quad (3.3)$$

Здесь σ_y° — изотермическая прочность материала, n можно найти экспериментально или, например, используя формулу Ито — Шишюкина [8] для твердости

$$H = H^* e^{-\alpha(273+T)} \quad (3.4)$$

(H^* — твердость при 20°C ; для вольфрама $H^* = 4,35$ ГПа). Так как для металлов $\alpha = 0,002$, то при малых градиентах температуры из формул (3.3), (3.4) находим $n = 1,68 \cdot 10^6$ Па/град. Согласно соотношению (1.1), температура в шаре равна

$$T = p_0 C (1 - \nu_1) (E_1 \alpha_t)^{-1} T^* \quad (3.5)$$

Для вольфрама $E_1 = 344$ ГПа, $\nu_1 = 0,3$, $\alpha_t = 4,44 \cdot 10^{-6}$ 1/град.

Зависимость (3.3) при учете (3.5) запишем в виде

$$\sigma_y/p_0 = \sigma_y^\circ/p_0 - 0,77CT^* \quad (3.6)$$

Критериальное соотношение пластического течения Губера — Мизеса

$$J2 \geq 3^{-1/2} \sigma_y/p_0$$

и равенство (3.6) дают

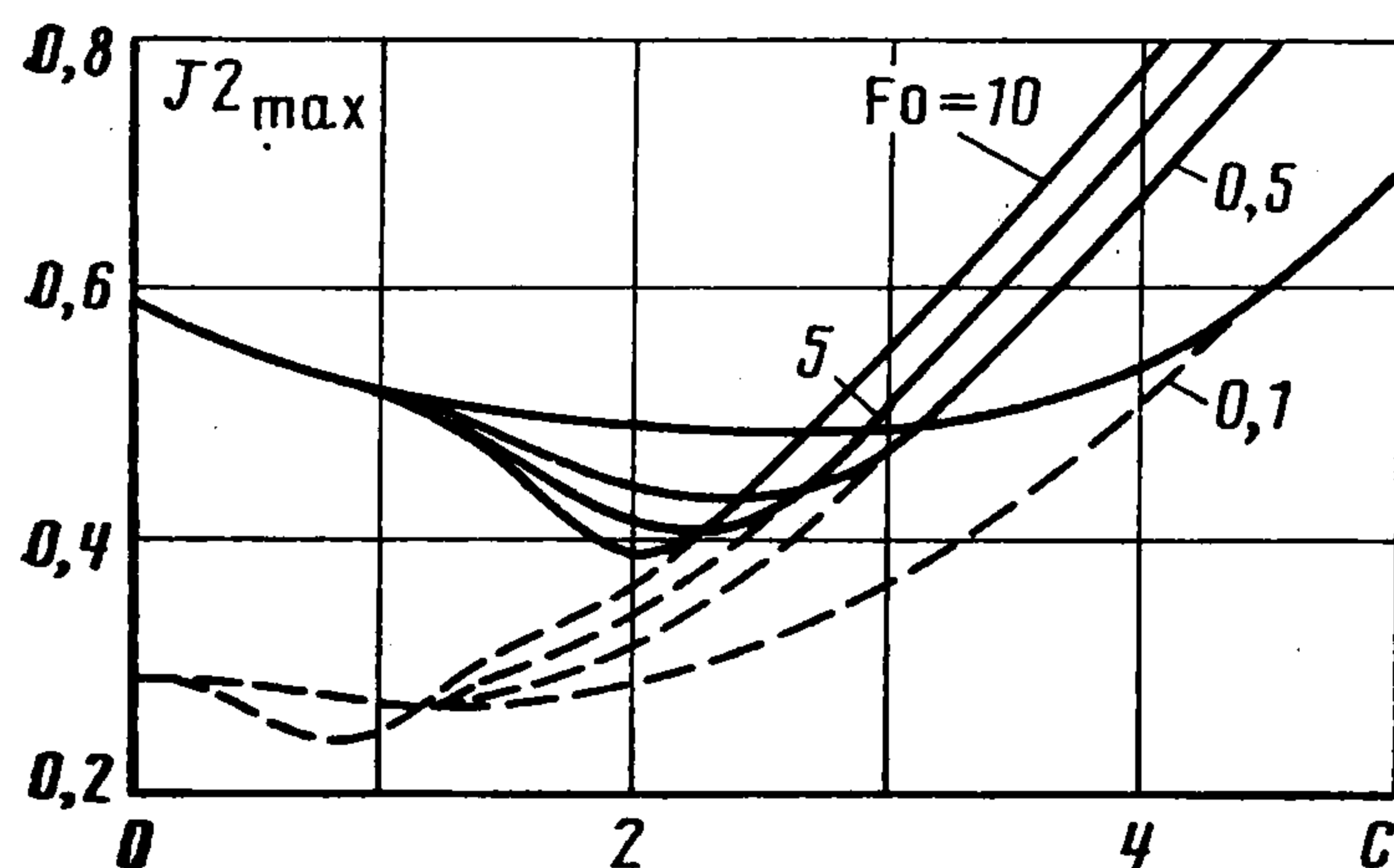
$$J2^t \geq \sigma_y/p_0, \quad J2^t = 3^{1/2} J2 + 0,77CT^* \quad (3.7)$$

Неравенство (3.7) представляет собой температурозависимый критерий пластичности для вольфрама. Материал неровности начинает течь в некоторой точке, если в ней эффективное напряжение $J2^t$ превышает относительную прочность на растяжение (сжатие).

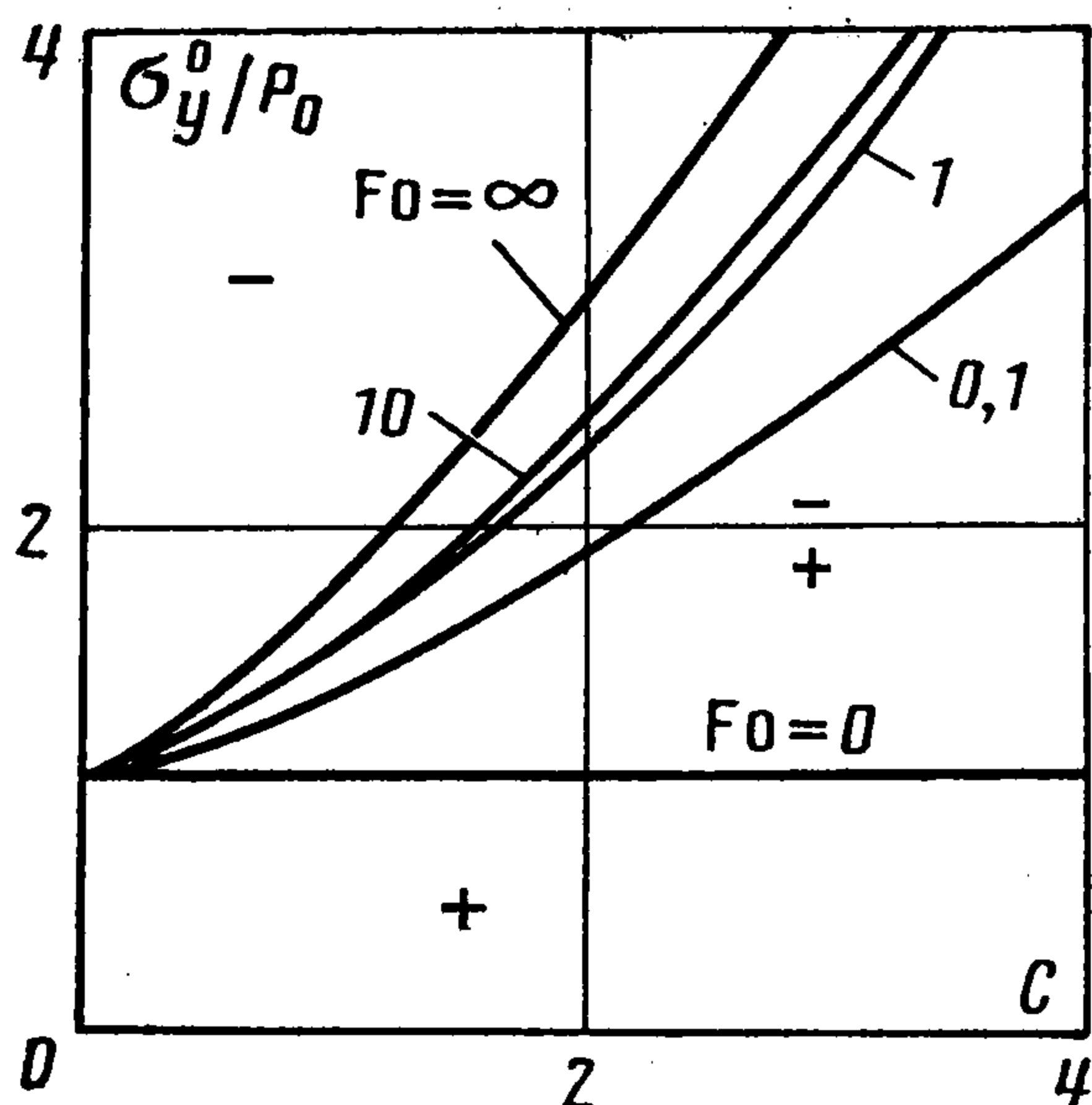
На поверхности шара $z = 0$ неравенство (3.7) можно записать как

$$\max_{z=0} J2^t \geq \sigma_y^\circ/p_0 \quad (3.8)$$

Результаты вычислений левой части соотношения (3.8) в зависимости от C для нескольких значений критерия Фурье и $f = 0,1$ представлены на фиг. 3. Горизонтальная прямая соответствует решению изотермической задачи ($F_0 = 0$). Связь между $J2$ и C нелинейна, поскольку величина $J2^t$ включает параметр C посредством соотношений (3.1). Для материалов, доминирующую роль в износе поверхности контакта которых играют пластические деформации, соотношение (3.8) является критерий



Фиг. 2



Фиг. 3

начала термомеханического износа. Структура параметра C включает в себя постоянную часть — механические и теплофизические свойства материала, так и изменяемую, зависящую от условий контактирования γ , f , V . Переменные σ_y^0/p_0 и C определяют точку на фиг. 3. Если эта точка локализована выше кривой $Fo = 0$, то термомеханический износ поверхности шара отсутствует (соответствующая область помечена знаком минус). Если же указанная точка расположена ниже кривой $Fo = 0$, износ поверхности начинается с началом контактирования упругих тел (область, помеченная знаком плюс). Когда же точка находится между кривыми $Fo = 0$ и $Fo = \infty$, то из фиг. 3 определяем время (Fo) начала износа (течения). Область условного износа помечена знаками минус и плюс. Таким образом, по заданным параметрам σ_y^0/p_0 и C конструируется карта пластического износа заданного материала.

Авторы благодарят Д. В. Грилицкого, под руководством которого выполнена работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 152—164.
2. Демкин Н. Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М.: Наука, 1970. 227 с.
3. Piessens R., De Doncker-Kapenga E., Uberhuber C. W., et al. QUADPACK: A subroutine package for automatic integration. Berlin: Springer — Verlag, 1983. 301 p.
4. Ляв А. Математическая теория упругости. М.: Глав. ред. общетехн. лит. и номогр., 1935. 674 с.
5. Порошковая металлургия. Материалы, технология, свойства, области применения. / Под ред. И. М. Федоренко, И. Н. Францевич, И. Д. Радомысльский и др. Киев: Наук. думка, 1985. 624 с.
6. Sackfield A., Hills D. A note on the Hertz contact problem: a correlation of standart formulae // J. Strain Analysis Eng. Des. 1983. V. 18. № 3. P. 195—197.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
8. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиноведение, 1977. 526 с.