Прикладная математика и механика. Том 56, вып. 1, 1992

УДК 539.3 + 624.074

© 1992 г. В. Д. Потапов

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Исследуется устойчивость стержня из нестареющего вязкоупругого материала, ядро релаксации которого представимо суммой экспонент. Получены точные условия устойчивости движения по отношению к статистическим моментам амплитуды прогиба стержня при действии на него сжимающей силы, случайная составляющая которой пропорциональна белому шуму.

Исследованию устойчивости вязкоупругих стержней посвящена работа [1], в которой среднеквадратичный разброс внешней нагрузки, а также мера деформаций ползучести материала считались малыми. При таких предположениях для решения задачи воспользовались асимптотическим методом [2]. В итоге получены результаты, степень приближенности которых оставалась неизвестной. Рассмотрен [3, 4] ряд модельных задач устойчивости движения стержней. Вторым методом Ляпунова анализировалась [5] устойчивость стержня, материал которого является стандартным вязкоупругим телом, при воздействии продольной силы в виде белого шума. Найдено условие, при выполнении которого стержень устойчив почти наверное.

1. Устойчивость вязкоупругого стержня. Движение вязкоупругого стержня, находящегося под действием продольной силы F, описывается уравнением

$$EI\,(1-\Gamma)W'''' + (F_0+F_1)(W+W_0)'' + mW^{\cdot\cdot} + kW^{\cdot} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\Gamma W = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\,W(\tau)\,d\tau$$

Здесь k — коэффициент демпфирования, учитывающий внешнее сопротивление движению стержня, W_0 — начальное искривление оси стержня, F_0 и $F_1(t)$ — детерминированная (постоянная во времени) составляющая сжимающей силы и случайная пульсация с нулевым математическим ожиданием. Остальные обозначения общепринятые.

Допустим, что стержень имеет шарнирное опирание по концам и начальное искривление W_0, а также дополнительное искривление W его оси в начальный момент времени:

$$W_0(x) = f_0 \sin\frac{\pi}{l}x, \quad W(0,x) = f(0)\sin\frac{\pi}{l}x$$

Решение уравнения (1.1) ищем в виде такой же синусоиды, амплитуда которой определяется из уравнения

$$f^{\cdot\cdot} + 2\varepsilon f^{\cdot} + \omega^2\,[(1-\Gamma)f - (\alpha+\alpha_1)(f+f_0)] = 0 \qquad (1.2)$$

$$\varepsilon = \frac{k}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{\pi^4 EI}{ml^4}, \quad \alpha = \frac{F_0 l^2}{\pi^2 EI}, \quad \alpha_1(t) = \frac{F_1(t)\,l^2}{\pi^2 EI}$$

Далее будем считать справедливым равенство

$$\Gamma f = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i L_i \int_0^t e^{-\varkappa_i(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

причем $\varkappa_i$, L_i — постоянные, характеризующие вязкие свойства материала.

Воспользовавшись заменой

$$z_i^{\cdot} = \varkappa_i L_i \int_0^t e^{-\varkappa_i(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau$$

представим уравнение (1.2) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{gathered} f_1^{\cdot} = f_2 \\ f_2^{\cdot} = -2\varepsilon f_2 - \omega^2 \left[f_1 - \sum_{i=1}^{n} z_i - (\alpha + \alpha_1)(f_1 + f_0)\right] \\ z_i^{\cdot} = \varkappa_i (L_i f_1 - z_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Допустим, что случайная пульсация продольной силы пропорциональна гауссовскому белому шуму $\xi(t)$, т. е. $\alpha_1(t) = \beta\xi(t)$, β — детерминированная постоянная. Тогда система уравнений (1.3) описывает эволюцию $(n + 2)$-мерного марковского процесса.

Запишем для него уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\varkappa_i (z_i - L_i f_1) p\right] - \frac{\partial}{\partial f_1}(f_2 p) + \frac{\partial}{\partial f_2}\left\{\left[2\varepsilon f_2 + \omega^2 \left(f_1 - \sum_{i=1}^{n} z_i - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. - \alpha\right)(f_1 + f_0)\right] p\right\} + \frac{\beta^2\omega^4}{2} \frac{\partial^2}{\partial f_2^2}\left[(f_1 + f_0)^2 p\right] \tag{1.4}$$

При помощи этого уравнения можно записать уравнения для статистических моментов любого порядка величин f_1, f_2, z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В частности, для первых и вторых моментов получим следующие системы уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{d\langle f_1\rangle}{dt} = \langle f_2\rangle \\ \frac{d\langle f_2\rangle}{dt} = -2\varepsilon\langle f_2\rangle - \omega^2\left[\langle f_1\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle z_i\rangle - \alpha(\langle f_1\rangle + f_0)\right] \\ \frac{d\langle z_i\rangle}{dt} = \varkappa_i (L_i\langle f_1\rangle - \langle z_i\rangle), \quad i = 1, 2, \ldots, n \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dt}\langle f_1^2\rangle = 2\langle f_1 f_2\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle f_1 f_2\rangle = \langle f_2^2\rangle - \left\{2\varepsilon\langle f_1 f_2\rangle + \omega^2\left[\langle f_1^2\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle f_1 z_i\rangle - \alpha(\langle f_1^2\rangle + \langle f_1\rangle f_0)\right]\right\}$$

$$\frac{d}{dt}\langle f_2^2\rangle = -2\left\{2\varepsilon\langle f_2^2\rangle + \omega^2\left[\langle f_1 f_2\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle f_2 z_i\rangle - \alpha(\langle f_1 f_2\rangle + \langle f_2\rangle f_0)\right]\right\} +$$
$$+ \beta^2\omega^4\left[\langle f_1^2\rangle + 2\langle f_1\rangle f_0 + f_0^2\right] \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{dt}\langle z_k z_j\rangle = -\left[\varkappa_j(\langle z_k z_j\rangle - L_j\langle z_k f_1\rangle) + \varkappa_k(\langle z_k z_j\rangle - L_k\langle z_j f_1\rangle)\right]$$

$$\frac{d}{dt}\langle z_k f_1\rangle = -[\varkappa_k(\langle z_k f_1\rangle - L_k\langle f_1^2\rangle)] + \langle f_2 z_k\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle z_k f_2\rangle = -[\varkappa_k(\langle z_k f_2\rangle - L_k\langle f_2 f_1\rangle)] -$$

$$-\left\{2\varepsilon\langle z_k f_2\rangle + \omega^2\left[\langle z_k f_1\rangle - \sum_{i=1}^{n}\langle z_k z_i\rangle - \alpha(\langle z_k f_1\rangle + \langle z_k\rangle f_0)\right]\right\}$$

Здесь и далее угловыми скобками обозначено усреднение по множеству реализаций.

Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова позволяет не только получить уравнения относительно статистических моментов амплитуды прогиба стержня, но и решить, в частности, задачу о выбросах функции $f(t)$ за границы области допустимых значений, что позволяет ответить на вопрос об устойчивости стержня на конечном промежутке времени. Если же задача сводится только к получению уравнений в моментах, то для этого можно воспользоваться непосредственно уравнениями движения (1.3) (см. [6]).

Рассмотрим стержень с нулевым начальным искривлением оси ($f_0 = 0$). Устойчивость прямолинейного положения равновесия стержня при возмущении начальных условий по отношению к статистическим моментам первого и второго порядков определяется знаком вещественной части характеристических корней уравнений вида

$$|\mathbf{A}^{(m)} - \lambda\mathbf{E}| = 0$$

где под $\mathbf{A}^{(m)}$ понимается матрица постоянных коэффициентов системы дифференциальных уравнений относительно моментов соответствующего порядка, $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Возьмем ядро релаксации материала стержня в форме

$$\Gamma(t-\tau) = \varkappa L e^{-\varkappa(t-\tau)}$$

Тогда, рассматривая систему уравнений относительно математических ожиданий $\langle f_1\rangle$, $\langle f_2\rangle$, $\langle z_1\rangle$, можно убедиться в том, что стержень устойчив, причем асимптотически, по отношению к моментам первого порядка [8], если соблюдается условие

$$\alpha < 1 - L$$

Заметим, что это соотношение совпадает с условием устойчивости вязкоупругого стержня при детерминистической постановке задачи.

Рассматривая далее систему уравнений относительно статистических моментов второго порядка, получим условие (при $\delta > 0$):

$$-\beta^2\omega^4\eta < \delta 2\,[2\varepsilon\omega^2(1-\alpha) + \varkappa\omega^2 L + 2\varepsilon\varkappa(\varkappa + 2\varepsilon)] \qquad (1.7)$$

при выполнении которого стержень оказывается асимптотически устойчивым в среднеквадратичном.

Здесь

$$\eta = 1 - L - \alpha + \varkappa(\varkappa + 2\varepsilon)/\omega^2, \quad \delta = 1 - L - \alpha$$

2. Частные случаи. *1°. Упругий стержень.* При $\varkappa = L = 0$ неравенство (1.7) принимает вид

$$\beta^2 < 4\varepsilon/\omega^2(1-\alpha) \qquad (2.1)$$

что совпадает с результатом, полученным [7].

Отсюда следует, что с увеличением внешнего демпфирования и уменьшением частоты собственных колебаний стержня ω наблюдается больший случайный разброс продольной силы.

2°. *Вязкоупругий стержень без внешнего демпфирования.* Полагая $\delta > 0$, при $\varepsilon = 0$ из (1.7) получим

$$\varkappa\beta^2 < 2\,(\varkappa/\omega)^2 L\delta/\eta_0 \tag{2.2}$$

или

$$\alpha < 1 - L - (\varkappa/\omega)^2\Lambda^{-1}, \quad \Lambda = 2\,(\varkappa/\omega)^2 L/(\varkappa\beta^2) - 1 \tag{2.3}$$

причем

$$\eta_0 = 1 - L - \alpha + (\varkappa/\omega)^2, \quad \Lambda > 0$$

Неравенства (2.2), (2.3) свидетельствуют о том, что значения параметров β^2 или α, обеспечивающие устойчивость стержня в среднеквадратичном, зависят не только от параметра L, определяющего предельную величину релаксации напряжений в вязкоупругом стержне, но и от соотношения параметров $\varkappa/\omega$. В частности, если

$$(\varkappa/\omega)^2\Lambda^{-1} = 1 - L$$

стержень может быть устойчив только при растягивающей постоянной составляющей продольной силы.

Если для определения условий устойчивости, аналогичных (2.2), (2.3), воспользоваться асимптотическим методом [1, 3], получим (при $1 - \alpha > 0$)

$$\varkappa\beta^2 < 2\,(\varkappa/\omega)^2 L\,(1 - \alpha)\,(1 - \alpha + \varkappa^2/\omega^2)^{-1}$$

$$\alpha < 1 - (\varkappa/\omega)^2\Lambda^{-1}$$

Сопоставляя эти неравенства с неравенствами (2.2), (2.3), можно заметить, что при малых L они дают близкие результаты.

Таким образом, при применении асимптотического метода достаточно оговаривать малость параметра L, не налагая каких-либо ограничений на параметр $\varkappa$, характеризующий время релаксации материала.

С целью сравнения степени влияния сопротивления движению, пропорционального скорости изменения прогиба, и вязких свойств материала на устойчивость движения стержня представим соотношение (1.7) следующим образом:

$$\beta^2\omega < 2\,(1 - L - \alpha)\{2\varepsilon/\omega + L\,(2\varepsilon/\omega + \varkappa/\omega)[1 - L - \alpha + \varkappa\,(\varkappa + 2\varepsilon)/\omega^2]^{-1}\} \tag{2.4}$$

Допустим, что ε/ω и $\varkappa/\omega$ — величины, приблизительно равные, тогда

$$\beta^2\omega < 4\,(1 - L - \alpha)(\varepsilon/\omega)[1 + {}^3/_2 L\,(1 - L - \alpha + 3\varepsilon^2/\omega^2)^{-1}]$$

Если принять $\varepsilon^2/\omega^2 \approx 0$, то

$$\beta^2\omega < 4\,(\varepsilon/\omega)(1 + {}^1/_2 L - \alpha) \tag{2.5}$$

При этом постоянная L может принимать значения от 0 до 1 (для упругого материала $L = 0$, а для вязкоупругого материала, описываемого моделью Максвелла, $L = 1$).

Сравнение неравенства (2.5) с аналогичным неравенством для упругого стержня (2.1) показывает, что верхняя граница для величины $\beta^2\omega$ значительно больше для вязкоупругого стержня, чем для упругого.

Если же предположить, что справедливы соотношения $\varkappa/\omega \ll \varepsilon/\omega$ и $\varepsilon\varkappa/\omega^2 \approx 0$, то из неравенства (2.4) получим условие устойчивости, в точности совпадающее с условием устойчивости упругого стержня.

Наконец рассмотрим ситуацию, при которой $L = 1$. Тогда неравенство (1.7) принимает вид

$$\beta^2\omega < -2\alpha\,\{2\varepsilon/\omega + (2\varepsilon/\omega + \varkappa/\omega)[\varkappa\,(\varkappa + 2\varepsilon)/\omega^2 - \alpha]^{-1}\}$$

причем

$$\varkappa(\varkappa + 2\varepsilon)/\omega^2 - \alpha > 0$$

Отсюда видно, что стержень может быть устойчивым в случае, когда математическое ожидание продольной силы представляет собой постоянную (во времени) растягивающую силу.

3°. Невесомый стержень в вязкой среде. При $m \to 0$ частота собственных колебаний ω неограниченно увеличивается, а отношение $2\varepsilon/\omega^2$ остается неизменным и равным $1/\gamma$, причем

$$\gamma = \pi^4 EI/(kl^4)$$

Тогда из неравенства (1.7) имеем

$$\gamma\beta^2 < 2\delta\eta_1^{-1}(1 - \alpha + \varkappa\gamma^{-1}) \qquad (2.6)$$

$$\eta_1 = 1 - L - \alpha + \varkappa\gamma^{-1}$$

Как видно, условие устойчивости вязкоупругого стержня при квазистатической постановке задачи не совпадает с аналогичным условием (2.2), найденным при динамической постановке той же задачи.

Если в соотношении (2.6) постоянные $\varkappa$, L положить равными нулю, т. е. рассмотреть упругий стержень в вязкой среде, получим [3, 4]

$$\alpha < 1 - {}^1/_2\gamma\beta^2$$

3. Стационарный режим. Когда начальное искривление оси стержня отлично от нуля ($f_0 \neq 0$), из систем уравнений (1.5), (1.6) можно определить траекторию изменения статистических моментов первого и второго порядков величин f_1, f_2, z_1. Если ограничиться получением решения только для установившегося режима, то значения производных от моментов в указанных системах можно положить равными нулю и тогда отыскание моментов каждого порядка сводится к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений.

Вновь принимая ядро релаксации материала в виде одной экспоненты и опуская промежуточные выкладки, запишем решения систем уравнений (1.5), (1.6) для математического ожидания и момента второго порядка амплитуды дополнительного прогиба стержня

$$\langle f_1\rangle = \frac{\alpha}{\delta} f_0, \quad \langle f_1^2\rangle = \frac{a}{\delta b} f_0^2$$

$$a = 2\alpha\,[(2\varepsilon\alpha + \beta^2\omega^2)\eta + \alpha(2\varepsilon + \varkappa)L] + \beta^2\omega^2\delta\eta$$

$$b = 2\delta\,[2\varepsilon(1 - \alpha) + \varkappa L + 2\varepsilon\varkappa(2\varepsilon + \varkappa)/\omega^2] - \beta^2\omega^2\eta$$

Как видно, найденные моменты существуют, если соблюдаются приведенные условия устойчивости стержня.

Рассмотрим несколько характерных частных случаев.

1°. Упругий стержень ($\varkappa = L = 0$):

$$\langle f_1\rangle = \frac{\alpha}{1-\alpha} f_0$$

$$\langle f_1^2\rangle = \frac{4\varepsilon\alpha^2 + \beta^2\omega^2(1+\alpha)}{(1-\alpha)[4\varepsilon(1-\alpha) - \beta^2\omega^2]} f_0^2$$

2°. Вязкоупругий стержень без внешнего демпфирования:

$$\langle f_1\rangle = \frac{\alpha}{1-L-\alpha} f_0$$

$$\langle f_1^2\rangle = \frac{2\alpha^2\varkappa L + \beta^2\omega^2(\delta + 2\alpha)\eta_0}{\delta[\delta(2\varkappa L - \beta^2\omega^2) - \beta^2\varkappa^2]} f_0^2$$

3°. Невесомый стержень в вязкой среде:

$$\langle f_1\rangle = \frac{\alpha}{1 - L - \alpha} f_0$$

$$\langle f_1^2\rangle = \{2\alpha[(\alpha + \gamma\beta^2)\eta_1 + \alpha L] + \delta\eta_1\gamma\beta^2\}\left[2\delta\left(1 - \alpha + \frac{\varkappa}{\gamma}\right) - \gamma\beta^2\eta_1\right]^{-1} f_0^2/\delta$$

Если стержень упругий ($\varkappa = L = 0$), получим

$$\langle f_1\rangle = \frac{\alpha}{1 - \alpha} f_0$$

$$\langle f_1^2\rangle = \frac{2\alpha(\alpha + \gamma\beta^2) + (1 - \alpha)\gamma\beta^2}{(1 - \alpha)[2(1 - \alpha) - \gamma\beta^2]}$$

что совпадает с аналогичным решением в [3].

Представленные результаты свидетельствуют, что значение второго момента $\langle f_1^2\rangle$ в стационарном режиме может изменяться даже при постоянном f_0 в весьма широких пределах в зависимости от соотношений между параметрами α, β^2, ε, ω^2, $\varkappa$, L.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Потапов В. Д.* Устойчивость вязкоупругих конструкций при действии стационарных случайных сжимающих нагрузок // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 3. С. 153—159.
2. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М.: Наука, 1980. 368 с.
3. *Потапов В. Д.* Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1985. 312 с.
4. *Потапов В. Д.* Об устойчивости стержней при стохастическом возбуждении // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1006—1013.
5. *Tylikowski A.* Stability and bounds on motion of viscoelastic columns with imperfections and time-dependent forces // IUTAM Creep in Structures IV. Abstracts of Lectures. Cracow Univ. Technol. Cracow: 1990. С. 150—151.
6. *Диментберг М. Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
7. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
8. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 368 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.XII.1990