Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 539.214

В. Г. Сутырин

МОДЕЛИ УПРУГИХ СРЕД С РЕЛАКСАЦИЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ

Процесс релаксации напряжений связывается с изменением во времени метрического тензора ненапряженного состояния среды. Обсуждаются возможные типы термодинамически обоснованных релаксационных уравнений.

1. Уравнения теории упругости. Упругая среда является частным случаем простой среды, т. е. среды, состояние которой определяется тремя функциями $x^i(\xi^a, t)$ закона движения и одной термодинамической функцией, в качестве которой здесь будет взята плотность энтропии на единицу массы $S(\xi^a, t)$.

Используются обозначения, принятые в [1]: x^i — координаты в эйлеровом трехмерном пространстве наблюдателя, ξ^a — в лагранжевом; индексами из середины латинского алфавита $i, j, k, \ldots$ обозначаются проекции тензоров на базисные векторы эйлерова пространства, индексами из начала латинского алфавита $a, b, c, d, \ldots$ отмечаются проекции на базисные векторы лагранжева пространства; $x_a{}^i = \partial x^i(\xi^b, t)/\partial\xi^a$, $\xi_i{}^a = \partial\xi^a(x^j, t)/\partial x^i$ — прямая и обратная дисторсии: g_{ij}, $g^{ij} = \|g_{ij}\|^{-1}$ — ковариантные и контрвариантные компоненты метрического тензора эйлерова пространства наблюдателя; жонглирование эйлеровыми индексами $i, j, k, \ldots$ осуществляется при помощи метрики g_{ij}; по повторяющимся верхним и нижним индексам проводится суммирование; жонглирование индексами $a, b, c, d, \ldots$ производится метрическим тензором среды в лагранжевой системе координат $g_{ab} = x_a{}^i x_b{}^j g_{ij}$, $g^{ab} = \xi_i{}^a\xi_j{}^b g^{ij}$ величины, относящиеся к начальному состоянию, отмечаются нулевым индексом: $g_{ab}{}^0$, $x_a{}^{0i}$, ρ^0, $S^0, \ldots$; $d/dt = \partial/\partial t + v^i\partial/\partial x^i$ — тензорная производная по времени при постоянных лагранжевых координатах; $v^i = dx^i(\xi^a, t)/dt$ — компоненты вектора скорости; p^{ij}, $p^{ab} = \xi_i{}^a\xi_j{}^b p^{ij}$, $p_b{}^a = p^{ac}g_{bc}$ — компоненты тензора напряжений Коши, спроектированного на разные базисы; U — плотность внутренней энергии среды на единицу массы; T — абсолютная температура; q^i, $q^a = q^i\xi_i{}^a$ — компоненты вектора потока тепла; ∇_i, $\nabla^i = g^{ij}\nabla_j = \nabla_j g^{ij}$ и $\nabla_a = x_a{}^i\nabla_i = \nabla_i x_a{}^i$, $\nabla^a = g^{ab}\nabla_b = \nabla_b g^{ab}$ — операторы ковариантного дифференцирования по метрике эйлерова и лагранжева пространств соответственно.

Система уравнений механики простых сред состоит из уравнений импульсов, энергии и баланса энтропии

$$\rho\frac{dv^i}{dt} = \nabla_j p^{ij} + \rho f^i$$
$$\rho\frac{dU}{dt} = p^{ij}\nabla_j v_i - \nabla_i q^i + r \tag{1.1}$$
$$\rho\frac{dS}{dt} + \nabla_i\left(\frac{q^i}{T}\right) - \frac{r}{T} = \left[q^i\nabla_i\frac{1}{T} + \frac{\rho}{T}q'\right] \equiv \sigma$$

Здесь f^i — плотность внешних объемных сил; r — внешний объемный источник тепла; ρ — плотность среды, явно выражающаяся через закон движения и плотность начального состояния при помощи формулы

$$\rho = \rho^0 (\xi^a) \sqrt{g^0 (\xi^a)}/\sqrt{g (\xi^a, t)} \tag{1.2}$$
$$g^0 = \det \| g_{ab}{}^0 \|, \quad g = \det \| g_{ab} \|$$

q' — некомпенсированное тепло, σ — производство энтропии, которое в силу второго закона термодинамики должно быть неотрицательно.

Для замыкания системы уравнений (1.1) необходимо задать уравнения состояния, выражающие величины U, p^{ij}, q^i и q' через четыре основные искомые функции $x^i (\xi^a, t)$ и $S (\xi^a, t)$.

В теории упругости уравнения состояния определены, если известна зависимость плотности внутренней энергии U от компонент метрического тензора среды g_{ab} и энтропии S

$$U = U (g_{ab}, S), \quad p^{ab} = 2\rho \partial U / \partial g_{ab}, \quad T = \partial U / \partial S \tag{1.3}$$
$$q' = 0 \tag{1.4}$$

В качестве соотношения, выражающего вектор потока тепла $\mathbf{q}$, можно взять закон теплопроводности Фурье

$$q^i = -\varkappa^{ij} \nabla_j T \tag{1.5}$$

где $\varkappa$ — симметричный тензор коэффициентов теплопроводности.

Система уравнений (1.1) при учете (1.2)—(1.4) состоит из пяти соотношений для четырех искомых функций $x^i (\xi^a, t)$ и $S (\xi^a, t)$, однако переопределенности не возникает, так как уравнения энергии и баланса энтропии (последние два уравнения (1.1)) взаимозависимы в силу уравнений состояния (1.3), (1.4). Вычитанием из второго уравнения (1.1), умноженного на T, третьего уравнения (1.1) устанавливается, что

$$dU/dt = \rho^{-1} p^{ij} \nabla_j v_i + T dS/dt - q' \tag{1.6}$$

Можно убедиться в справедливости тождества (1.6) прямой подстановкой в него уравнений (1.3), (1.4); при этом следует воспользоваться кинематическим тождеством [1]

$$dg_{ab}/dt = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a = x_a{}^i x_b{}^j (\nabla_i v_j + \nabla_j v_i)$$

Соотношение (1.6) — одна из записей основного термодинамического тождества Гиббса. Взаимозависимость уравнений (1.1) и существование их тождественного следствия в силу уравнений состояния вместе с условием неотрицательности производства энтропии σ являются законами, ограничивающими возможный вид уравнений состояния.

При усложнении среды добавлением новых функций, определяющих ее состояние, необходимо для каждой вновь введенной характеристики конструировать свое уравнение. Дополнительные уравнения вместе с системой (1.1) и уравнениями состояния обязаны опять допускать существование тождественного следствия и обеспечивать неотрицательность производства энтропии σ.

2. Релаксационные уравнения в изотропной среде. Следствием скалярности функции $U (g_{ab}, S)$ служит наличие в числе ее аргументов дополнительных тензорных величин [2]. В изотропном случае в качестве таких дополнительных тензорных аргументов можно взять компоненты метрического тензора (МТ) стандартного ненапряженного состояния (СНС), состояния, реализующего при некотором фиксированном стандартном значении энтропии S_*. Компоненты МТ СНС в дальнейшем обозначаются η_{ab} (ковариантные компоненты) и $\eta^{ab} = \| \eta_{ab} \|^{-1}$ (контравариантные компоненты), а значения всех других величин в СНС отмечаются звездочкой.

В теории упругости СНС обычно совпадает с начальным, при этом $\eta_{ab} = g_{ab}{}^0 = x_a{}^{0i} x_b{}^{0j} g_{ij}$ и

$$d\eta_{ab}/dt = 0 \tag{2.1}$$

Далее $\eta_{ab} \neq g_{ab}{}^0$ и рассматриваемая среда усложняется путем допущения переменности во времени компонент МТ СНС η_{ab} (ξ^a, t), которые наравне с функциями x^i (ξ^a, t) и S (ξ^a, t) становятся величинами, определяющими состояние среды. Уравнения, описывающие изменение во времени МТ η_{ab}, ниже называются релаксационными. Под деформацией среды теперь понимается отличие МТ g_{ab} актуального состояния среды от МТ η_{ab} СНС. В литературе эта деформация часто называется упругой, чтобы отличить ее от пластической, с которой связывается отличие МТ η_{ab} от МТ среды в начальном состоянии $g_{ab}{}^0$, при этом отличие g_{ab} от $g_{ab}{}^0$ называется полной деформацией. С физической точки зрения, пожалуй, более естественно деформацией называть отличие актуального состояния среды от СНС, т. е. отличие g_{ab} от η_{ab}, а отличие η_{ab} от $g_{ab}{}^0$ рассматривать как эволюцию внутреннего состояния среды. В таким образом принятой терминологии процесс релаксации напряжений сопровождается изменением деформаций, хотя при этом может отсутствовать внешнее движение среды. Поэтому термины «релаксация напряжений» и «релаксация деформаций» относятся к одному и тому же процессу.

Без ограничения общности релаксационные уравнения можно принять в виде

$$d\eta_{ab}/dt = 2\varphi_d{}^c\eta_{cb} \tag{2.2}$$

где компоненты релаксационного тензора φ необходимо задать как функции определяющих параметров.

Заметим, что шаровая часть тензора φ отвечает за изменение плотности СНС. Действительно

$$\rho_* \frac{d}{dt}\frac{1}{\rho^*} = \frac{\rho^0\sqrt{g^0}}{\sqrt{\eta}}\frac{d}{dt}\frac{\sqrt{\eta}}{\rho^0\sqrt{g^0}} = \frac{1}{2\eta}\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2\eta}\frac{\partial\eta}{\partial\eta_{ab}}\frac{d\eta_{ab}}{dt} =$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{ab}\frac{d\eta_{ab}}{dt} = \varphi_a{}^c\eta_{cb}\eta^{ab} = \varphi_a{}^a, \quad \eta = \det\|\eta_{ab}\|$$

Ясно, что девиаторная часть тензора φ будет отвечать за релаксацию сдвиговой деформации и касательных напряжений.

Во избежание недоразумений попутно заметим, что функции $x_*{}^i$ (ξ^a, t), определяющие закон изменения СНС, для которых $\eta_{ab} = x_{*a}{}^i x_{*b}{}^j g_{ij}$, могут не существовать, если функции η_{ab} (ξ^a, t) не обращают в нуль соответствующий тензор кривизны [2]. Это означает, что среда в таком случае не способна чисто упругим образом сбросить все напряжения, оставаясь в трехмерном пространстве, т. е. СНС в трехмерном пространстве наблюдателя не реализуется. Однако для дальнейшего это не имеет значения, так как основные переменные — компоненты МТ СНС η_{ab} — остаются хорошо определенными функциями.

На временах, меньших по сравнению с характерным временем релаксации, т. е. на временах, в течение которых уравнение (2.2) не успевает себя проявить и практически совпадает с уравнением (2.1), среда ведет себя как обычное упругое тело, поэтому для среды с релаксацией естественно сохранить вид функции плотности внутренней энергии U (g_{ab}, η_{ab}, S) и уравнений состояния (1.3) теории упругости. Тогда из тождества (1.6) в силу уравнений состояния получим следующее выражение для производства тепла в релаксационном процессе:

$$q' = -(\partial U/\partial \eta_{ab})\, d\eta_{ab}/dt = \rho^{-1} p_b{}^a \varphi_a{}^b \tag{2.3}$$

Здесь использовано тождество

$$(\partial U/g g_{ac})\, g_{cb} + (\partial U/\partial \eta_{ac})\, \eta_{cb} = 0 \tag{2.4}$$

а также первое соотношение (1.3) и уравнение (2.2).

Тождество (2.4) есть следствие условия скалярности функции U:

$$U(g_{ab}, \eta_{ab}, S) = U(g_{cd} a_a{}^c a^d{}_b,\ \eta_{cd} a_a{}^c a_b{}^d,\ S) \tag{2.5}$$

где $a_b{}^a$ — матрица произвольной замены системы координат. Для получения (2.4) необходимо продифференцировать равенство (2.5) по $a_b{}^a$ и положить $a_b{}^a = \delta_b{}^a$, где $\delta_b{}^a$ — символ Кронекера.

Для замыкания системы уравнений (1.1)—(1.3), (2.2), (2.3) остается задать выражения для вектора потока тепла $\mathbf{q}$ и релаксационного тензора $\boldsymbol{\varphi}$, удовлетворяющие требованию положительности величины производства энтропии

$$\sigma = -T^{-2} (\nabla_i T)\, q^i + T^{-1} p_b{}^a \varphi_a{}^b \tag{2.6}$$

Структура выражения (2.6) подсказывает, что тензор $\boldsymbol{\varphi}$ играет роль термодинамического потока релаксационного процесса, а тензор напряжений $\mathbf{p}$ — роль термодинамической силы. В соответствии с общими принципами механики необратимых процессов термодинамические потоки естественно выразить через термодинамические силы.

3. Выражение релаксационного тензора через тензор напряжений. Предположим сначала, что между тепловыми и релаксационными процессами нет термодинамического взаимодействия. Тогда для вектора $\mathbf{q}$ можно принять закон теплопроводности Фурье (1.5) (в изотропном случае $\varkappa^{ij} = \varkappa g^{ij}$, а тензор $\boldsymbol{\varphi}$ будет выражаться только через тензор $\mathbf{p}$.

В первом приближении можно принять линейную зависимость между $\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{p}$, которую в изотропной среде всегда можно представить в виде

$$\varphi_b{}^a = \tau_S^{-1} [p_b{}^a - {}^1/_3 p_c{}^c \delta_b{}^a] + \tau_V^{-1} [{}^1/_3 p_c{}^c]\, \delta_b{}^a \tag{3.1}$$

где τ_S и τ_V — характерные времена релаксации, сдвиговых и объемных деформаций соответственно (точнее, величины τ_S и τ_V отвечают за характерные времена, но не равны им хотя бы потому, что имеют другую размерность). При этом

$$q' = (\rho\tau_V)^{-1} [{}^1/_3 p_c{}^c]^2 + \\ + (\rho\tau_S)^{-1} [p_a{}^b - {}^1/_3 p_c{}^c \delta_a{}^b]\, [p_b{}^a - {}^1/_3 p_c{}^c\, \delta_b{}^a] \tag{3.2}$$

Неотрицательность этого выражения обеспечивается положительностью величин τ_S и τ_V.

В формулу (3.1) можно ввести нелинейность при помощи зависимости величин τ_S и τ_V от инвариантов тензоров и скалярных функций, связанных с состоянием среды. Эта зависимость в общем случае может быть произвольной и требует экспериментального определения.

Произвольную зависимость $\boldsymbol{\varphi}$ от $\mathbf{p}$, удовлетворяющую требованию положительности величины q', в изотропном случае всегда можно представить в виде

$$\varphi_a{}^b = A_1 p_a{}^b + A_2 p_a{}^c p_c{}^d p_d{}^b \tag{3.3}$$

где A_1 и A_2 — положительные функции от инвариантов тензора напряжений $\mathbf{p}$, а также и от других скалярных параметров среды. При этом

$$q' = \rho^{-1} [A_1 p_a{}^b p_b{}^a + A_2 p_a{}^c p_c{}^b p_b{}^d p_d{}^a] \tag{3.4}$$

4. Выражение релаксационного тензора через МТ СНС. Так как тензор напряжений выражается через тензор η, то формула (3.3) фактически и дает выражение релаксационного тензора φ через МТ СНС η. Здесь же рассматривается вопрос о возможности непосредственного выражения φ через η. Поскольку тензоры φ, $\mathbf{p}$ и η выражаются друг через друга изотропным образом, то они соосны (это соответствует и экспериментальному факту, согласно которому главные оси тензора напряжений и деформаций в релаксационном процессе не изменяются). Тогда

$$q' = \frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{3} p_n\varphi_n = \frac{1}{6\rho}\left[\sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{3}(p_n - p_m)(\varphi_n - \varphi_m) + 2\left(\sum_{n=1}^{3} p_n\right)\left(\sum_{m=1}^{3}\varphi_m\right)\right] \tag{4.1}$$

$$(\det\| p_b{}^a - p_n\delta_b{}^a \| = 0, \;\; \det\| \varphi_b{}^a - \varphi_n\delta_b{}^a \| = 0)$$

где p_n и φ_n — собственные значения тензоров $\mathbf{p}$ и φ соответственно, т. е. корни уравнений, приведенных выше в скобках.

Обеспечение неотрицательности величины q' в условиях прямой зависимости φ от η основано на неравенстве

$$(p_n - p_m)/((k_n)^2 - (k_m)^2) > 0 \tag{4.2}$$

которое было получено [3] как необходимое условие корректности задачи Коши для системы уравнений теории упругости. Здесь $k_n{}^2$ — собственные значения тензора η, т. е. корни уравнения

$$\det\| \eta^{ac}g_{cb} - k_n{}^2\delta_b{}^a \| = 0$$

С физической точки зрения неравенство (4.2) естественно, так как означает, что усилие, возникающее при сдвиге, направлено против него.

Если в среде отсутствует релаксация плотности СНС (отсутствует релаксация давления), то в качестве релаксационного тензора φ подойдет девиатор любой монотонно возрастающей функции $f(x)$, примененной к матрице $\eta^{ac}g_{cb}$:

$$\varphi_a{}^b = \operatorname{dev}\,[f(\eta^{bc}g_{ca})] \tag{4.3}$$

Функция f от матрицы A понимается в обычном смысле как $f(A) = \Sigma c_n A^n$, где $f(x) = \Sigma c_n x^n$ — какое-либо разложение функции $f(x)$ по степеням x. Если

$$\eta^{ac}g_{cb} = \sum_{n=1}^{3} k_n{}^2 w_n{}^a w_{nb}$$

— разложение матрицы η^{ab} в собственном базисе w_{na} (n — номер собственного вектора),

$$w_n{}^a w_{ma} = \delta_{nm}, \quad \sum_{n=1}^{3} w_n{}^a w_{nb} = \delta_b{}^a, \quad w_n{}^a = g^{ab}w_{nb}$$

то

$$f(\eta^{ac}g_{cb}) = \sum_{n=1}^{3} f(k_n{}^2)\, w_n{}^a w_{nb}$$

При этом

$$q' = \frac{1}{6\rho}\sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{3}(p_n - p_m)(f(k_n{}^2) - f(k_m{}^2)) \tag{4.4}$$

Ясно, что неотрицательность величины q' следует из неравенства (4.2), если $f(x)$ — монотонно возрастающая функция своего аргумента.

1°. В частности, в качестве $f(x)$ можно взять $f(x) = x/\tau_1$, тогда

$$\varphi_b{}^a = \tau_1^{-1}\,[\eta^{ac}g_{cb} - {}^1/_3\delta_b{}^a\eta^{cd}g_{cd}] \tag{4.5}$$

Здесь, как всегда, τ_1 — характерное время релаксации может быть функцией от скалярных параметров среды.

Релаксационное уравнение (2.2), (4.5) было предложено в работе [3]. Для приведения в соответствие изложенных выше формул с формулами работы [3] необходимо заметить, что тензор эффективных деформаций g_{*ij}, принятый в качестве основной релаксационной переменной в [3], можно интерпретировать как выражение МТ СНС η в эйлеровом пространстве

$$g_{*ij} = \xi^a{}_i\xi^b{}_j\eta_{ab}, \quad \eta_{ab} = x^i{}_a x_b{}^j g_{*ij} \tag{4.6}$$

Тогда

$$d\eta_{ab}/dt = x_a{}^i x_b{}^j dg_{*ij}/dt + g_{*ij}x_b{}^j\,\nabla_a v^i + g_{*ij}x_a{}^i\nabla_b v^j \tag{4.7}$$

Здесь использовано равенство $dx_a{}^i/dt = \nabla_a v^i$.

Уравнение для g_{*ij} получается из (4.7) и (2.2) умножением на $\xi_i{}^a$ по индексам a и b:

$$dg_{*ij}/dt + g_{*ik}\,\nabla_j v^k + g_{*jk}\nabla_i v^k = g_{*ik}\varphi_j{}^k \tag{4.8}$$

После подстановки в соотношение (4.3) выражения (4.5) и замены переменной τ_1 на переменную τ из работы [3] по формуле $\tau_1 = {}^1/_3\tau\eta^{cd}g_{cd}$ можно убедиться, что правая часть первого равенства (4.8) совпадает с правой частью соответствующего уравнения из работы [3]. При этом необходимо еще учесть, что введенные в работе [3] производные $\rho_{\varepsilon_{ij}}$ от плотности $\rho = \rho^0\sqrt{g_*}$ ($g_* = \det\|g_{*ij}\|$) по компонентам тензора деформации $\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(g_{ij} - g_{*ij})$ выражаются следующим образом:

$$\frac{1}{\rho}\rho_{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\rho^0\sqrt{g^*}}\frac{\partial\rho^0\sqrt{g_*}}{\partial\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2g_*}\frac{\partial g_*}{\partial g_{*kl}}\frac{\partial g_{*kl}}{\partial\varepsilon_{ij}} =$$
$$= \frac{1}{2}g_*{}^{kl}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_{ij}}(g_{kl} - 2\varepsilon_{kl}) = -g_*{}^{ij}$$

Во избежание путаницы отметим, что формула для плотности $\rho = \rho^0\sqrt{g_*}$, принятая в работах [3, 4], в рамках настоящего изложения неверна и должна быть заменена на обычную формулу

$$\rho = \rho^0\sqrt{g^0}/\sqrt{g} = \rho^0\sqrt{g^0}\sqrt{g^*}/\sqrt{\eta\det\|g_{ij}\|}$$

2°. Если в качестве $f(x)$ взять монотонно возрастающую функцию $f(x) = -(\tau_2 x)^{-1}$, то

$$\varphi_b{}^a = -\tau_2^{-1}\,[g^{ac}\eta_{cb} - {}^1/_3\delta_b{}^a g^{cd}\eta_{cd}] \tag{4.9}$$

3°. Из общей теории тензорных функций следует, что если тензор φ выражается через тензор η (в отсутствие объемной релаксации: $\varphi_a{}^a = 0$) при помощи соотношения (4.3), то его всегда можно представить следующим образом:

$$\varphi_b{}^a = \tau_1^{-1}\,[\eta^{ac}g_{cb} - {}^1/_3\eta^{cd}g_{cd}\delta_b{}^a] -$$
$$- \tau_2^{-1}\,[g^{ac}\eta_{cb} - {}^1/_3 g^{cd}\eta_{cd}\delta_b{}^a] \tag{4.10}$$

где τ_1 и τ_2 — положительные скалярные функции произвольных скалярных аргументов.

4°. Несмотря на то что любая зависимость φ от η, удовлетворяющая требованию неотрицательности величины q', представима в виде (4.10), при аппроксимации эмпирических данных может оказаться удобнее использование какого-либо другого выражения. Например, изучался [4] релаксационный тензор φ, выраженный через тензор деформации Генки

$$D_b = {}^1/_2\ln(\eta^{ac}g_{cb}) = \sum_{n=1}^{3}\ln k_n w_n{}^a w_{nb}$$

что соответствует выбору $f(x) = \tau^{-1}\ln x$. Тогда

$$\varphi_b{}^a = \tau^{-1}\,[D_b{}^a - {}^1/_3\delta_b{}^a D_c{}^c] \tag{4.11}$$

Установление соответствия между (4.11) и формулами из [4] осуществляется также на основе соотношений (4.6)—(4.8).

Для определения объемной релаксации в деформационных терминах необходимо задать выражение следа тензора φ через инварианты тензора η. Однако среди необходимых условий корректности задачи Коши нет условия для шаровой части тензора напряжений, аналогичного соотношению (4.2) для касательных напряжений, и обеспечение неотрицательности величины q' становится затруднительным. Поэтому в рамках изложенного подхода не существует общих уравнений, учитывающих общую релаксацию в деформационных терминах. Но в некоторых частных случаях в силу специфических особенностей конкретных функций $U(g_{ab}, \eta_{ab}, S)$ может оказаться, что какие-либо из выражений $p_a{}^a \eta^{cb} g_{cb}$, $p_a{}^a g^{cb} \eta_{cb}$ или $p_a{}^a D^b{}_b$ положительно определены. Тогда в формулы (4.5), (4.9)—(4.11) можно включить соответствующие шаровые части.

Вопрос о том, каким из выражений тензора φ проще аппроксимируются эмпирические данные, остается открытым.

5. **Релаксационные уравнения в анизотропной среде.** В качестве дополнительных тензорных аргументов функций $U(g_{ab}, S)$ для анизотропной среды общего положения можно взять тройку векторов a_{na} (индекс n — номер вектора, индекс a — проекция), задающих ориентацию выделенных направлений в среде:

$$U = U(g_{ab}, \ a_{na}, \ S) \tag{5.1}$$

Для анизотропных сред с высокой симметрией (кубической, гексагональной и др.) тройка векторов $\mathbf{a}_n$ определена неоднозначно, однако для дальнейшего это не имеет значения.

Не ограничивая общности, можно считать, что векторы $\mathbf{a}_n$ ортонормированы в метрике СНС:

$$a_{na} a_{mb} \eta^{ab} = \delta_{nm}, \quad a_n{}^a = a_{nb} \eta^{ab}$$
$$\eta_{ab} = a_{na} a_b{}^n, \quad a_n{}^a a_b{}^n = \delta_b{}^a \tag{5.2}$$

Здесь и ниже, несмотря на то, что индекс n не обладает тензорным характером, к нему применяется правило суммирования по повторяющимся верхним и нижним индексам, а жонглирование производится при помощи δ — символа Кронекера. Векторы $\mathbf{a}_n$ относятся к ненапряженному состоянию, поэтому жонглирование их индексами осуществляется при помощи метрики η ненапряженного состояния.

В теории упругости анизотропной среды вектора $\mathbf{a}_n$ не зависят от времени: $da_{na}/dt = 0$.

Далее, согласно вышеизложенной схеме, для построения теории релаксирующей анизотропной среды допускается переменность векторов $\mathbf{a}_n$ во времени, а функция $U(g_{ab}, a_{na}, S)$ и уравнения состояния (1.3) оставляются без изменения. При этом следствием требования тождественности соотношения (1.6) получается выражение

$$q' = -\partial U / \partial a_{na} da_{na}/dt \tag{5.3}$$

Величину $-\rho \partial U/\partial a_{na}$ естественно обозначить через p^{na}.

Используя тождество

$$2\partial U/\partial g_{ac} g_{bc} + \partial U/\partial a_{na} a_{nb} = 0 \tag{5.4}$$

(оно получается так же, как и тождество (2.4)), можно вывести, что

$$p^{na} = p_b{}^a a^{nb} \quad (p^{na} = -\rho \partial U/\partial a_{na})$$

Во избежание недоразумения заметим, что $p^{na} \neq p^{ab}a_b{}^n$, так как $p^{ab} = p_c{}^a g^{cb}$, $a_b{}^n = a^{nc}g_{cb}$, а $g^{cb}\eta_{ac} \neq \delta_a{}^b$. Также $p_b{}^a = p^{na}a_{nb}$, но $p^{ab} \neq p^{na}a_n{}^b$.

Без умаления общности релаксационные уравнения анизотропной среды можно представить в виде

$$da_{na}/dt = \varphi_a{}^b a_{nb} \tag{5.5}$$

Для полноты изложения отметим справедливость формул

$$da_n{}^a/dt = -\varphi_b{}^a a_n{}^b$$

$$d\eta_{ab}/dt = \varphi_a{}^c\eta_{bc} + \varphi_b{}^c\eta_{ac}$$

как следствий соотношений (5.2) и (5.5).

Для обозначения релаксационного тензора φ использована та же буква, что и в изотропном случае, поскольку между этими тензорами много общего. В частности, шаровая часть тензора φ, как и раньше, отвечает за изменение плотности ненапряженного состояния:

$$\rho_* d\rho_*{}^{-1}/dt = {}^1/_2\eta^{ab}d\eta_{ab}/dt =$$

$$= {}^1/_2\eta^{ab}\,[\varphi_a{}^c\eta_{bc} + \varphi_b{}^c\eta_{ac}] = \varphi_a{}^a$$

Используя тождество (5.4), выражение для q' (5.3) можно переписать так

$$q' = \rho^{-1}p_b{}^a\varphi_a{}^b \tag{5.6}$$

Соотношение (5.6) совпадает по форме с (2.3) и, следовательно, для φ справедливо все, что было сказано о тензоре в разд. 2 и 3. Однако теперь зависимость между φ и $\mathbf{p}$ не обязана быть изотропной. В линейном случае она принимает вид

$$\varphi_a{}^b = \tau_{a\cdot c\cdot}^{\cdot b\cdot d}p_d{}^c \tag{5.7}$$

где четырехвалентный тензор τ естественно назвать тензором характерных времен релаксаций (не в буквальном смысле, так как размерность τ опыть не совпадает с размерностью времени).

В силу второго закона термодинамики тензор τ должен быть положительно определенным, так как

$$q' = \rho^{-1}\tau_{abcd}p^{ab}p^{cd}$$

а в силу принципа Онзагера — симметричным

$$\tau_{abcd} = \tau_{cdab}, \quad \tau_{abcd} = \tau_{badc}$$

В общем нелинейном случае тензор τ может быть произвольной функцией от любых тензорных и скалярных параметров среды.

Аналогов неравенств (4.2) в анизотропном случае неизвестно, поэтому тензор τ не может быть непосредственно выражен через η или $\mathbf{a}_n$.

В качестве выражения для вектора потока тепла $\mathbf{q}$ можно опять использовать закон теплопроводности Фурье (1.5).

6. Взаимодействие между тепловыми и релаксационными процессами. Теперь предполагается, что между релаксационными и тепловыми процессами существует термодинамическое взаимодействие. Уравнения, связывающие между собой термодинамические потоки и силы, в этом случае должны обеспечить положительность полного производства энтропии

$$\sigma = -[T^{-2}\nabla_a T]\,q^a + T^{-1}p_b{}^a\varphi_a{}^b \tag{6.1}$$

Здесь величины $\mathbf{q}$ и φ — термодинамические потоки, а величины $-T^{-2}\nabla T$ и $\mathbf{p}$ — термодинамические силы. Если связь между ними линейна, то ее можно представить в виде

$$q^a = -\varkappa^{ab}\nabla_b T + \alpha^{ab\cdot}_{\cdot\cdot c} p_b{}^c$$

$$\varphi_b{}^a = \tau^{\cdot a\cdot d}_{b\cdot c\cdot} p_d{}^c - \beta^{ca\cdot}_{\cdot\cdot b} T^{-1}\nabla_c T$$

где в силу принципа Онзагера помимо симметричности τ и $\varkappa$ необходимо, чтобы

$$\alpha^{ab\cdot}_{\cdot\cdot c} = \beta^{ab\cdot}_{\cdot\cdot c}, \quad \alpha^{abc} = \alpha^{acb}$$

В общем случае тензоры $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ могут быть произвольными функциями параметров среды, обеспечивающими неотрицательность выражения (6.1) для величины производства энтропии.

7. Асимптотическая устойчивость по Ляпунову СНС. В чисто релаксационных изэнтропических, адиабатических и изотермических процессах асимптотическая устойчивость по Ляпунову СНС является следствием положительности величины σ.

Пусть в однородном по пространству чисто релаксационном процессе в неподвижной среде внешний источник тепла r поддерживает постоянную энтропию $S(\xi^a, t) = S^0$. Тогда из второго и третьего уравнений (1.1) следует, что $r = -\rho q'$ и

$$dU/dt = -q' < 0$$

Ясно, что функция U в таком процессе монотонно убывает и, играя роль функции Ляпунова, стремится к своему минимуму, который реализуется в соответствующем фиксированному значению энтропии S^0 СНС.

В адиабатическом процессе ($r = 0$) функция $U = U^0 = \mathrm{const}$, а роль функции Ляпунова исполняет энтропия (с обратным знаком) как функция от g_{ab}, η_{ab} (a_{na}) и U^0, которая, в силу последнего уравнения (1.1), также достигает своего экстремума в СНС, СНС, соответствующем фиксированному значению энергии U^0.

В изотермическом однородном чисто релаксационном процессе объемный источник тепла r поддерживает постоянной температуру $T = T^0$. Из соотношения (1.6) следует, что роль функции Ляпунова в этом случае исполняет свободная энергия $F = U - T^0 S$, минимум которой также реализуется в соответствующем СНС.

Ясно, что список частных процессов с некоторым асимптотически устойчивым конечным состоянием можно продолжить.

В заключение отметим, что линеаризация всех изложенных выше соотношений приводит к обычной максвелловской теории релаксации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бердичевский В. Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 447 с.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 528 с.
3. *Годунов С. К.*, *Роменский Е. И.* Нестационарные уравнения нелинейной теории упругости в эйлеровых координатах // ПМТФ. 1972. № 6. С. 124—144.
4. *Годунов С. К.* Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978. 303 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.IV.1989