Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 531.36 : 534.1

П. Ф. Курчанов, А. Д. Мышкис, А. М. Филимонов

КОЛЕБАНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО СОСТАВА И ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА

Анализируется точное решение задачи о колебаниях одномерной цепочки из $(n+1)$ материальных точек, соединенных линейными связями, под действием внезапно приложенной к крайней точке постоянной силы F. Доказано, что для того, чтобы точная верхняя грань силы связи между крайней и предыдущей точками равнялась $(2Fn)/(n+1)$, необходимо и достаточно, чтобы число точек было простым либо степенью двойки. На примере шести точек показано, как изменится эта точная верхняя грань, если число точек не простое и не степень двойки. Обсуждается связь с колебаниями соответствующей сплошной среды и сходимостью метода прямых.

Простейшей и широко распространенной моделью поезда служит совокупность из $n+1$ $(n \geqslant 1)$ материальных точек, расположенных вдоль прямой линии и последовательно связанных друг с другом (см., например, [1]). Для простоты будем считать массы M всех точек одинаковыми, а связи — линейно упругими с одинаковым коэффициентом жесткости c. Обозначим перемещение j-й точки $(j = 0, 1, \ldots, n)$ от исходного ненагруженного положения равновесия через $y_j = y_j(t)$, а силу упругости между j- и $j-1$-й точками — через $\sigma_j = c(y_j - y_{j-1})$, $j = 1, \ldots, n$.

Если, начиная с момента $t = 0$, к 0-й точке («локомотиву») прилагается сила $f(t)$, то функции $\sigma_j(t)$ являются решениями системы уравнений

$$M\sigma_j^{\cdot\cdot}(t) = c(\sigma_{j+1} - 2\sigma_j + \sigma_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, n$$
$$\sigma_0 := -f(t); \quad \sigma_{n+1} := 0 \tag{1}$$

при нулевых начальных условиях.

Если n велико, то часто применяется переход от дискретной модели к непрерывной, т. е. система (1) заменяется на волновое уравнение

$$M\sigma_{tt}(x, t) = cH^2\sigma_{xx}(x, t) \tag{2}$$

где H — исходное расстояние между материальными точками, которое предполагается не зависящим от j, а $\sigma(x, t) = \sigma_j(t)$ — при $x = jH$. Для уравнения (2) тогда задаются нулевые начальные условия и граничные условия вида

$$\sigma(0, t) = -f(t), \quad \sigma(nH, t) = 0 \tag{3}$$

Такая задача решается методом характеристик.

Естественно, возникает вопрос о соотношении между решениями задач (1) и (2), (3). Постановка этого вопроса становится более ясной, если, задавшись некоторым значением $l > 0$, ввести новую переменную $\xi = l/(nH)\, x \in [0, l]$ и обозначить $nM/l = \rho$, $cl/n = E$, $l/n = h$ (это расстояние между точками на оси ξ). Тогда система (1) примет вид

$$\rho\sigma_j^{\cdot\cdot} = E\,\frac{\sigma_{j+1} - 2\sigma_j + \sigma_{j-1}}{h^2} \quad (j = 1, \ldots, n)$$
$$\sigma_0 = -f(t); \quad \sigma_{n+1} = 0 \tag{4}$$

Если же аналогично преобразовать уравнение (3), то получим

$$\rho\sigma_{tt} = E\sigma_{\xi\xi}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant t < \infty \tag{5}$$

Уравнение (5) получается из (4) при $n \to \infty$, $h \to 0$ и постоянных $nh = l, \rho, E$.

Таким образом, ставится вопрос о соотношении между дискретной и непрерывной моделями продольных упругих линейных колебаний сплошной среды. Если же заметить, что система (4) получается из (5) при помощи стандартной разностной аппроксимации производной $\sigma_{\xi\xi}$, то, по существу, приходим к вопросу о возможности применения метода прямых для приближенного решения уравнения (5).

Применимость метода прямых для задач рассматриваемого типа при соответствующих предположениях [2, 3], а также естественность перехода от дискретной модели к непрерывной и обратно, обсуждавшаяся еще классиками (Лагранж, Релей, Жуковский), привели к широкому применению перехода от модели (1) к модели (2) при расчетах. Однако между этими моделями существуют и принципиальные различия, которые необходимо иметь в виду.

Рассмотрим простейший случай, когда $f(t) = -F$ $(F = \text{const} > 0)$ («трогание поезда постоянной тягой»). В этом случае решение задачи (2), (3) есть кусочно-постоянная функция, которую можно записать в виде

$$\sigma(x, t) = F\theta\left(nH \arcsin\left|\sin\left(\frac{\pi}{2n}\sqrt{\frac{c}{M}}\,t\right)\right| - x\right) \tag{6}$$

где $\theta(t)$ — единичная функция Хевисайда. Ясно, что $0 \leqslant \sigma(x, t) \leqslant F$ для всех $t \in R_+$, $x \in [0, nH]$.

Исходя из приведенных и некоторых других аппроксимационных соображений, некоторые авторы (например, [1, 4]) полагали, что при $f(t) = -F$ аналогичное неравенство имеет место и для всех компонент решения системы (1) при достаточно большом n. Это подтверждалось и простым анализом решения системы (1) при $n = 1$:

$$\sigma_1(t) = {}^1/_2 F\left(1 - \cos\sqrt{2c/M}\,t\right)$$

Однако проделанные непосредственные расчеты при больших $n = 40$ 80, 120 показали, что значения $\sigma_j(t)$ в отдельные моменты t_j^*, различные для разных j, существенно (на десятки процентов) превышают величину F, что имеет непосредственные практические последствия, если речь идет, например, о железнодорожном составе.

В настоящей заметке подробно разберем данный вопрос.

Система (1) при $f(t) = -F$ допускает точное решение (см. [4], с 281):

$$\sigma_j(t) = \frac{F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi k}{n+1}\, j \operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)}\right)(1 - \cos\omega_k t) \tag{7}$$

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{c}{M}}\sin\frac{\pi k}{2(n+1)}, \quad k = 1, \ldots, n$$

Из (7) сразу следует двусторонняя оценка при всех $t > 0$

$$-\frac{2F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi k}{n+1}\, j\right)_{(-)}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)} \leqslant \sigma_j(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi k}{n+1}\, j\right)_{(+)}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)} \tag{8}$$

$$a_{(+)} = a\theta(a) = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ 0, & a < 0, \end{cases} \qquad a_{(-)} = a[\theta(a) - 1] = \begin{cases} 0, & a \geqslant 0 \\ |a|, & a < 0 \end{cases}$$

Напомним, что числа $\beta_1, \ldots, \beta_n$ называются линейно независимыми над полем рациональных чисел Q, если из равенства $r_1\beta_1 + \ldots + r_n\beta_n = 0$, где все $r_k \in Q$, следует, что все $r_k = 0$.

Теорема 1. Если числа

$$\beta_k = \sin\frac{\pi k}{2(n+1)}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{9}$$

линейно независимые над Q, то для любого $T \geqslant 0$ при $T \leqslant t < \infty$ оценка (8) неулучшаема, т. е. для каждого $j = 1, \ldots, n$ имеем

$$\sup_{t\geqslant T} \sigma_j(t) = \frac{2F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi k}{n+1}j\right)_{(+)}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)} \tag{10}$$

$$\inf_{t\geqslant T} \sigma_j(t) = -\frac{2F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi k}{n+1}j\right)_{(-)}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)} \tag{11}$$

причем при $n > 1$ — верхняя грань (10), а при $j > 1$ — нижняя грань (11) недостижима (при $j = 1$ нижняя грань (11) достигается только при $t = 0$).

Доказательство этой теоремы, как и теоремы 2, вынесено в приложение. Отметим только, что доказательство теоремы 1 вытекает из известной теоремы Кронекера о диофантовых неравенствах.

Из полученного результата, в частности, следует, что решение (6) (при $t \to +\infty$) заведомо не является равномерным асимптотическим пределом решения (7) при $n \to \infty$, если частоты ω_k линейно независимы над Q,— во всяком случае, без того или иного осреднения по x.

Критерий линейной независимости системы чисел (9) дает

Теорема 2. Для линейной независимости чисел (9) необходимо и достаточно, чтобы число $n + 1$ было либо простым, либо имело вид 2^N, где $N = 2, 3, \ldots$

Следствие. Если $n + 1 \geqslant 3$, причем $n + 1$ простое, либо $n + 1 = 2^N$ $(N \geqslant 2)$, то справедливы равенства (10) и (11).

В некоторых случаях оценке (8) можно придать более простой вид. Так, при $j = 1$ все $\sin\frac{\pi k}{n+1}j > 0$, поэтому при помощи известной формулы

$$\sum_{r=0}^{m-1}\cos(\alpha + rb) = \cos\left(\alpha + \frac{m-1}{2}b\right)\sin m\frac{b}{2}\Big/\sin\frac{b}{2} \tag{12}$$

получаем, что правая часть оценки (8) равна

$$\frac{2F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n+1}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)} = \frac{2F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\cos\frac{\pi k}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}F \tag{13}$$

тогда как левая часть равна 0. Таким образом, при $j = 1$ оценка (8) приобретает вид

$$0 \leqslant \sigma_1(t) \leqslant \frac{2n}{n+1}F \tag{14}$$

Аналогично при $j = n$ при помощи формулы (12) получаем

$$\frac{2F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi n}{n+1}k\right)_{(+)}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)} =$$

$$= \frac{2F}{n+1}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sin\left(\frac{2r+1}{n+1}\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{2r+1}{2(n+1)}\pi = F$$

$$\frac{2F}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{\pi n}{n+1}k\right)_{(-)}\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)}=\frac{2F}{n+1}\sum_{r=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\times$$

$$\times\sin\left(\frac{2r+1}{n+1}\pi\right)\operatorname{ctg}\frac{2r+2}{2(n+1)}\pi=\frac{n-1}{n+1}F$$

так что оценку (8) при $j = n$ можно записать так

$$-\frac{n-1}{n+1}F\leqslant\sigma_n(t)\leqslant F \tag{15}$$

Оценки (14) и (15) становятся неулучшаемыми, если $n + 1$ — простое или $n + 1 = 2^N$ $(N \geqslant 2)$.

Видно, что хотя величина $\sigma_1(t)$ всегда меньше $2F$, но может стать как угодно близкой к $2F$ при достаточно больших n указанного вида. В отличие от этого всегда $|\sigma_n(t)| \leqslant F$.

Далее имеет место формула

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{n+1}j\operatorname{ctg}\frac{\pi k}{2(n+1)}=n-j+1\,(n=1,2,\ldots;\ j=1,\ldots,n)$$

При $j = 1$ она равносильна формуле (13), а при $j > 1$ может быть доказана индукцией по j с привлечением формулы (12). Из приведенной формулы следует, что сумма правых частей формул (10) и (11) равна $2(n - j + 1)F/(n + 1)$, т. е. достаточно подсчитать лишь одну из них. При небольших n при помощи непосредственного подсчета значений тригонометрических функций получаем неулучшаемые оценки:

$$n=1:\ 0\leqslant\sigma_1(t)\leqslant F$$

$$n=2:\ 0\leqslant\sigma_1(t)\leqslant {}^4/_3F;\ -{}^1/_3F<\sigma_2(t)<F$$

$$n=3:\ 0\leqslant\sigma_1(t)<{}^3/_2F;\ -0{,}2071F<\sigma_2(t)<1{,}2071F;\ -0{,}5F<$$
$$<\sigma_3(t)<F$$

$$n=4:\ 0\leqslant\sigma_1(t)<1{,}6F;\ -0{,}2944F<\sigma_2(t)<1{,}4944F$$
$$-0{,}4944F<\sigma_3(t)<1{,}2944F;\ -0{,}6F<\sigma_4(t)<F$$

При $n = 5$ $(n + 1 = 6)$ теорема 1 неприменима, так как по теореме 2 числа (9) линейно зависимы над Q. И действительно, можно проверить, что при $n + 1 = 6$ имеем

$$\beta_1+\beta_3-\beta_5=0 \tag{16}$$

а числа $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ линейно независимы.

Разберем случай $n + 1 = 6$, $j = 1$. Здесь правая часть равенства (7), в силу формул (13) и (16) равна

$$\frac{F}{6}\left[5-\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\omega_1t+\frac{3}{2}\cos\omega_2t-\cos\omega_3t-\frac{1}{2}\cos\omega_4t-\right.$$
$$\left.-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos(\omega_1t+\omega_3t)\right] \tag{17}$$

Непосредственно проверяется, что при $0 \leqslant a \leqslant 1$:

$$\max_{u,v\in R}(-\cos u-\cos v-a\cos(u+v))=2-a$$

и этот максимум достигается при $\cos u = \cos v = -1$. Поэтому в силу все той же теоремы Кронекера получаем, что верхняя грань (не достигающаяся) выражения (17) равна

$$\frac{F}{6}\left[5+2-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right]=\frac{8+\sqrt{3}}{6}F=1{,}622F$$

Таким образом, при $n+1=6$ точная оценка улучшает общую оценку (14) всего на 2,7%.

Аналогично можно исследовать другие значения j, n, однако с ростом n аналитические трудности точного исследования быстро возрастают и становится более рациональным непосредственный подсчет значений по формуле (7). Было бы интересно строго доказать какие-либо общие свойства функций σ_j, например, исследовать случай, когда масса нулевой точки («локомотив») превосходит массу M каждой из остальных точек.

Конечно, приведенные рассмотрения не противоречат обоснованию метода прямых, так как предполагается, что при росте n временной интервал фиксирован. Но при использовании метода прямых в данной задаче периодическое решение аппроксимируется почти-переодическими функциями, и тогда из близости на конечном интервале, вообще говоря, не вытекает равномерная близость при всех $t>0$. Напротив, при переходе от системы (1) к уравнению (2) происходит потеря тонких эффектов («всплесков»), хотя для анализа осредненных характеристик такой переход вполне возможен.

На языке механики изложенное выше означает, что одномерную сплошную среду, на неограниченных временных интервалах при анализе так называемых локальных свойств нельзя рассматривать как предельный случай одномерной цепочки точечных масс при неограниченном увеличении количества таких точек.

Естественно, возникает вопрос о том, насколько реально должен быть велик интервал времени, чтобы заметить упомянутые всплески. Из полученных нами результатов следует, что факт наличия всплесков зависит лишь от арифметической природы числа точек (простое или степень двойки), но не от значений масс M и жесткостей c. Однако численные значения моментов времени наступления всплесков, как видно из формулы для частот ω_k, зависят от $\sqrt{c/M}$. Практически диапазон возможных изменений величин M, c довольно велик (например, значение M может изменяться от масс атомов до масс железнодорожных вагонов). Произведенные нами подсчеты показали, что в случае параметров M, c, соответствующих железнодорожному составу, всплески сил, превышающие величину F примерно на 30%, достигались уже на 15-секундном временном интервале.

Наконец отметим, что все результаты сохраняются, если сила тяги $f(t)$ возрастает не скачком до величины F, а непрерывно, но достаточно быстро; например при $f(t)=F(1-e^{\varkappa t})$ с достаточно большим значением $\varkappa>0$.

Авторы благодарят Ю. В. Кузьмина за обсуждения.

Приложение. Доказательство теоремы 1. Недостижимость верхней грани (10) и нижней грани (11) следует из линейной независимости частот ω_k над полем Q, и при $n>1$ и любом $j=1,\ldots,n$ по крайней мере два из чисел $\sin\dfrac{\pi k}{n+1}j$ $(k=1,\ldots,n)$ отличны от нуля, а при $j>1$ не все они одного знака. Неулучшаемость оценки (8), когда $\sigma_j(t)$ при всех $t\in R$ определена формулой (7), вытекает из следующего варианта (см., например, [5]) теоремы Кронекера: если вещественные числа $\omega_1,\ldots,\omega_n$ линейно независимы над Q, то для любого $\delta>0$ при любых вещественных $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ существуют такие целые m_k, что система неравенств

$$|\omega_k t^* - \lambda_k - 2\pi m_k| < \delta$$

разрешима относительно t^*. Если учесть почти-периодичность функций $\sigma_j(t)$, приходим к оценкам (10), (11).

Доказательство теоремы 2. Положим $\alpha_k = \cos\frac{\pi k}{2(n+1)}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда $\beta_k = \alpha_{n+1-k}$ и достаточно исследовать вопрос о линейной независимости над Q чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

При этом $\alpha_k + i\beta_k = \zeta^k$, где $\zeta = \exp\frac{2\pi i}{m}$, $m = 4(n+1)$.

Приведем некоторые сведения из алгебры, которые понадобятся в дальнейшем. Пусть P, U — числовые поля (подполя поля C комплексных чисел), причем $P \subseteq U$, т. е. U является расширением поля P. Числа $u_1, \ldots, u_n \in U$ называются линейно независимыми над P, если из равенства $p_1u_1 + \ldots + p_nu_n = 0$ (все $p_j \in P$) следует, что все $p_j = 0$. Отсюда определяется размерность поля U над P, которая называется степенью рассматриваемого расширения и обозначается $[U : P]$. Эта степень обладает свойствами: если P, U, V — числовые поля и $P \subseteq U \subseteq V$, то

$$[V : P] = [V : U]\cdot[U : P] \tag{18}$$

Доказательство теоремы 2. Из теории так называемого уравнения деления круга известно (см., например, [6]), что множество V всех чисел вида $r_0 + r_1\zeta + \ldots + r_{m-1}\zeta^{m-1}$ (все $r_j \in Q$) образует поле, причем $[V : Q] = \varphi(m)$, где $\varphi(m)$ — значение функции Эйлера, равное количеству натуральных чисел, не бо́льших m и взаимно простых с m. (Так, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$ и т. д. Из свойств этой функции нам понадобится такое: если $m_1, m_2 \in N$ — взаимно простые, то $\varphi(m_1, m_2) = \varphi(m_1)\,\varphi(m_2)$.) Из этой же теории следует, что ζ — нуль некоторого многочлена степени $\varphi(m)$ с коэффициентами из Q, определенного этими условиями однозначно с точностью до постоянного множителя, но не является нулем никакого многочлена степени, меньшей $\varphi(m)$, с коэффициентами из Q.

Обозначим через U множество всех вещественных чисел, принадлежащих V. Ясно, что U — поле и что все $\alpha_k = {}^1/_2\,(\zeta^k + \zeta^{m-k}) \in U$. Из равенства

$$\zeta^k = \left(\frac{\zeta^k + \zeta^{m-k}}{2}\right) + \left(\frac{\zeta^k + \zeta^{m-k}}{\zeta - \zeta^{m-1}}\right)\frac{\zeta - \zeta^{m-1}}{2}$$

и вещественности дробей, заключенных в скобки, следует, что каждое число из V можно представить в виде $u_1 + u_2(\zeta - \zeta^{m-1})$, где $u_1, u_2 \in U$. Значит, $[V : U] \leqslant 2$. Но $U \neq V$, а потому $[V : U] = 2$, и из равенства (18) следует, что $[U : Q] = {}^1/_2\varphi(m)$. Поэтому если $n > {}^1/_2\varphi(m)$, то числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ линейно зависимы над Q.

Докажем, что если $n + 1$ не есть степень двойки и не простое, то это неравенство выполняется. Действительно, пусть $n + 1$ не есть степень двойки и не простое. Тогда $n + 1 = 2^Nq$, где $N = 0, 1, \ldots$; q — нечетное. Но тогда

$$\begin{aligned}{}^1/_2\varphi(m) &= {}^1/_2\varphi(2^{N+2}q) = {}^1/_2\varphi(2^{N+2})\,\varphi(q) = 2^N\varphi(q) \leqslant 2^N(q-1) = \\ &= n + 1 - 2^N \leqslant n\end{aligned}$$

Если q — не простое, то первое из неравенств в этой цепочке строгое; если же q — простое, то $N \geqslant 1$, и поэтому строгим является второе неравенство, что и требовалось доказать.

Перейдем теперь к доказательству линейной независимости чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ для случая, когда $n + 1$ — степень двойки или $n + 1$ — простое число. Пусть дана нетривиальная линейная зависимость.

$$r_1\alpha_1 + \ldots + r_n\alpha_n = 0 \tag{19}$$

где $r_1, \ldots, r_n \in Q$, причем не все $r_j = 0$. Поскольку $\alpha_k = {}^1/_2\,(\zeta^k + \zeta^{-k})$, то, умножая равенство (19) на $2\zeta^n$, получим, что ζ есть нуль многочлена

$$g(x) = r_1(x^{n+1} + x^{n-1}) + r_2(x^{n+2} + x^{n-2}) + \ldots + r_n(x^{2n} + 1)$$

Пусть $n + 1 = p$ — нечетное простое число. Тогда

$$\varphi(m) = \varphi(4p) = 2(p-1) = 2n$$

С другой стороны, из равенств

$$\zeta^{4p} - 1 = (\zeta^2 + 1)(\zeta^{2p} - 1)(\zeta^{2(p-1)} - \zeta^{2(p-2)} + \ldots - \zeta^2 + 1) = 0 \tag{20}$$

видно, что $s(\zeta) = 0$, где $s(x) = x^{2(p-1)} - x^{2(p-2)} + \ldots - x^2 + 1$. Так как степень $s(x)$ равна $\varphi(m)$, то многочлен $g(x)$ степени $\leqslant \varphi(m)$ должен быть пропорционален многочлену $s(x)$. Но это невозможно, так как коэффициент при x^n в многочлене $s(x)$ равен 1 или -1, а в многочлене $g(x)$ равен 0.

Если же $n + 1 = 2^N$, $N \geqslant 1$, **то**

$$\varphi(m) = \varphi(2^{N+2}) = 2^{N+1} = 2(n + 1)$$

Поэтому ни один многочлен над Q **степени меньшей, чем** $2(n + 1)$, **в том числе и** $g(x)$, **не может иметь значение** ζ **своим нулем.**

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* Работа (усилие) сквозного и несквозных тяговых приборов при трогании поезда с места и в начале его движения // Полн. собр. соч. М.— Л.: ОНТИ, 1937, Т. 8. С. 221—255.
2. *Лебедев В. И.* Уравнения и сходимость дифференциально-разностного метода (метода прямых) // Вестн. МГУ. Сер. физ-мат. и естеств. наук. 1955. Вып. 7. № 10. С. 47—57.
3. *Будак Б. М.* О методе прямых для некоторых краевых задач // Вестн. МГУ. Сер.— мат., мех., астрон., физ., хим. 1956. № 1. С. 3—12.
4. *Лурье А. И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. М.— Л.: Гостехиздат: 1960. 432 с.
5. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: Гостехиздат, 1953. 396 с.
6. *Боревич З. И.*, *Шафаревич И. Р.* Теория чисел. М.: Наука, 1985. 503 с.

Москва

Поступила в редакцию 12.II.1991