

УДК 539.3: 534.1

© 1991 г.

А. М. Гомилко, В. Т. Гринченко, О. Н. Мартыненко

КРАЕВОЙ РЕЗОНАНС В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ УПРУГОМ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОМ ВОЛНОВОДЕ

На основании численного анализа выявлен и проанализирован краевой резонанс в полубесконечном упругом волноводе со смешанными граничными условиями, когда часть поверхности жестко закреплена, а на другой части задана гармонически зависящая от времени силовая нагрузка. При этом найденная частота краевого резонанса находится ниже первой частоты запертия волновода, так что краевой резонанс в рассматриваемой ситуации имеет такой же характер, как и резонанс в системе без демпфирования: наблюдается неограниченный рост амплитуд характеристик волнового поля при стремлении частоты колебаний к величине Ω_e в отличие от условного характера резонанса с конечными амплитудами [1—3]. Обнаружено специфическое поведение в окрестности частоты краевого резонанса Ω_e амплитуды возбуждения нормальной волны с чисто мнимой постоянной распространения.

1. Рассматривается задача о вынужденных гармонических колебаниях упругого полубесконечного волновода $0 < X < \infty$, $0 < Z < 2H$ со свободным от напряжений торцом $X = 0$, $0 \leq Z \leq 2H$ и жестко закрепленной нижней гранью $Z = 0$, $X > 0$. Поле возбуждается нормальной силовой нагрузкой, приложенной к верхней грани, касательное напряжение на этой грани считается отсутствующим. Таким образом, граничная задача для вектора смещений $\mathbf{u} = \{u_x(x, z), u_z(x, z)\}$ в безразмерных координатах $x = X/H$, $z = Z/H$ (временной множитель всюду опускается) имеет вид

$$G\nabla^2 \mathbf{u} + G(1 - 2\nu)^{-1} \text{grad div } \mathbf{u} + \rho\omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$u_x(x, 0) = u_z(x, 0) = 0, \quad x \geq 0$$

$$\sigma_x(0, z) = \tau_{zx}(0, z) = 0, \quad z \in [0, 2]$$

$$\sigma_z(x, 2) = 2Gf(x), \quad \tau_{zx}(x, 2) = 0, \quad x \geq 0$$

где G — модуль сдвига материала, ν — коэффициент Пуассона, ρ — удельная плотность, а поле напряжений согласно закону Гука имеет вид

$$\frac{\sigma_x}{2G} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad \frac{\sigma_z}{2G} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\tau_{zx}}{2G} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

В дополнение к (1.1) предполагается выполнение условия интегрируемости плотности энергии в окрестностях угловых точек волновода. Далее рассматривается диапазон частот до первой частоты запертия волновода, так что можно считать вектор смещений из (1.1) убывающим при $x \rightarrow \infty$.

Решение граничной задачи (1.1) строим по методу суперпозиции [1, 4]. Опуская промежуточные выкладки, представим вектор смещений в виде (всюду ниже суммирование ведется по n от 1 до ∞):

$$u_x(x, z) = \frac{2}{\pi} \sum M_n \int_0^\infty \frac{q_1 h_{1n}(\tau) P_1(\tau, z) + (-1)^n h_{2n}(\tau) P_2(\tau, z)}{\Delta(\tau)} \cos(\tau x) d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum M_n \left(p_1 \exp(-p_1 x) - \frac{\theta(\beta_n)}{p_2} \exp(-p_2 x) \right) \cos(\beta_n z) + \\
& \quad + 2 \int_0^\infty \frac{\tau F(\tau) P_3(\tau, z)}{\Delta(\tau)} \cos(\tau x) d\tau \\
u_z(x, z) = & \frac{2}{\pi} \sum M_n \int_0^\infty \frac{q_1 h_{1n}(\tau) R_1(\tau, z) + (-1)^n h_{2n}(\tau) R_2(\tau, z)}{\Delta(\tau)} \sin(\tau x) d\tau - \\
& - \sum M_n \left(\beta_n \exp(-p_1 x) - \frac{\theta(\beta_n)}{\beta_n} \exp(-p_2 x) \right) \sin(\beta_n z) + \\
& \quad + 2 \int_0^\infty \frac{q_1 F(\tau) R_3(\tau, z)}{\Delta(\tau)} \sin(\tau x) d\tau
\end{aligned}$$

$$p_j = p_j(n) = \begin{cases} \sqrt{\beta_n^2 - \Omega_j^2}, & \beta_n \geq \Omega_j, \\ -i \sqrt{\Omega_j^2 - \beta_n^2}, & \beta_n < \Omega_j, \end{cases}$$

$$q_j = q_j(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & \tau \geq \Omega_j \\ -i \sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & 0 < \tau < \Omega_j \end{cases}$$

$$\Omega_j = \frac{\omega H}{c_j}, \quad j = 1, 2, \quad \beta_n = \frac{\pi(2n-1)}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\theta(\xi) = \xi^2 - \frac{\Omega_2^2}{2}, \quad \xi \in \{\tau, \gamma, \beta_n\}$$

$$\Delta(\tau) = q_1 q_2 (\tau^4 + \theta^2(\tau)) \operatorname{ch} 2q_1 \operatorname{ch} 2q_2 - \tau^2 (q_1^2 q_2^2 + \theta^2(\tau)) \operatorname{sh} 2q_1 \operatorname{sh} 2q_2 - 2\tau^2 q_1 q_2 \theta(\tau)$$

$$P_j(\tau, z) = \operatorname{ch} q_2 a_{1+j}(\tau) f_1(\tau, z) + \operatorname{sh} q_2 a_{4+j}(\tau) f_2(\tau, z), \quad j = 1, 2$$

$$P_3(\tau, z) = \{ \operatorname{ch} q_1 z \Delta(\tau) + q_1 \theta(\tau) \operatorname{ch} 2q_1 [\operatorname{ch} q_2 a_1(\tau) f_1(\tau, z) + \operatorname{sh} q_2 a_4(\tau) \cdot f_2(\tau, z)] \} / (\theta(\tau) \operatorname{ch} 2q_1)$$

$$R_j(\tau, z) = \operatorname{ch} q_2 a_{1+j}(\tau) d_1(\tau, z) + \operatorname{sh} q_2 a_{4+j}(\tau) d_2(\tau, z), \quad j = 1, 2$$

$$R_3(\tau, z) = \{ \operatorname{sh} q_1 z \Delta(\tau) + \tau \theta(\tau) \operatorname{ch} 2q_1 [\operatorname{ch} q_2 a_1(\tau) d_1(\tau, z) + \operatorname{sh} q_2 a_4(\tau) \cdot d_2(\tau, z)] \} / (\theta(\tau) \operatorname{ch} 2q_1)$$

$$F(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(x) \sin(\tau x) dx \quad (1.3)$$

$$a_1(\tau) = \theta(\tau) \operatorname{sh} q_2 + \tau^2 \operatorname{sh} q_2 \operatorname{ch} 2q_1 - q_1 q_2 \operatorname{ch} q_2 \operatorname{sh} 2q_1$$

$$a_2(\tau) = \tau^2 q_1 q_2 \operatorname{sh} 2q_1 \operatorname{ch} q_2 - \theta^2(\tau) \operatorname{ch} 2q_1 \operatorname{sh} q_2 - \tau^2 \theta(\tau) \operatorname{sh} q_2$$

$$a_3(\tau) = -\tau^2 \theta(\tau) \operatorname{sh} 2q_1 \operatorname{sh} q_2 - \tau^2 q_1 q_2 \operatorname{ch} q_2 + q_1 q_2 \theta(\tau) \operatorname{ch} 2q_1 \operatorname{ch} q_2$$

$$a_4(\tau) = \tau^2 \operatorname{ch} 2q_1 \operatorname{ch} q_2 - q_1 q_2 \operatorname{sh} 2q_1 \operatorname{sh} q_2 - \theta(\tau) \operatorname{ch} q_2$$

$$a_5(\tau) = \theta^2(\tau) \operatorname{ch} q_2 \operatorname{ch} 2q_1 - \tau^2 q_1 q_2 \operatorname{sh} 2q_1 \operatorname{sh} q_2 - \tau^2 \theta(\tau) \operatorname{ch} q_2$$

$$a_6(\tau) = \tau^2 q_1 q_2 \operatorname{sh} q_2 + q_1 q_2 \theta(\tau) \operatorname{sh} q_2 \operatorname{ch} 2q_1 - \tau^2 \theta(\tau) \operatorname{sh} 2q_1 \operatorname{ch} q_2$$

$$h_{1n}(\tau) = \frac{\tau^2 (\Omega_2^2 - 2\Omega_1^2) - \beta_n^2 \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2}{2(\tau^2 + \beta_n^2 - \Omega_1^2)(\tau^2 + \beta_n^2 - \Omega_2^2)}$$

$$h_{2n}(\tau) = (-1)^n \frac{4\tau^2 \beta_n^2 (\Omega_2^2 - \Omega_1^2) - (\tau^2 + \beta_n^2) \Omega_2^4 + \Omega_1^2 \Omega_2^4}{4\beta_n (\tau^2 + \beta_n^2 - \Omega_1^2)(\tau^2 + \beta_n^2 - \Omega_2^2)}$$

$$f_1(\tau, z) = \frac{\tau^2 \operatorname{sh} q_1 (z-2)}{q_1 \operatorname{ch} 2q_1} - \frac{\tau^2 q_2 \operatorname{sh} q_2 \operatorname{ch} q_1 z}{\theta(\tau) \operatorname{ch} q_2 \operatorname{ch} 2q_1} + q_2 \frac{\operatorname{sh} q_2 (z-1)}{\operatorname{ch} q_2}$$

$$f_2(\tau, z) = \frac{\tau^2 \operatorname{sh} q_1 (z-2)}{q_1 \operatorname{ch} 2q_1} - \frac{\tau^2 q_2 \operatorname{ch} q_2 \operatorname{ch} q_1 z}{\theta(\tau) \operatorname{sh} q_2 \operatorname{ch} 2q_1} + q_2 \frac{\operatorname{ch} q_2 (z-1)}{\operatorname{sh} q_2}$$

$$d_1(\tau, z) = \frac{\tau \operatorname{ch} q_1 (z-2)}{\operatorname{ch} 2q_1} - \frac{\tau q_1 q_2 \operatorname{sh} q_2 \operatorname{sh} q_1 z}{\theta(\tau) \operatorname{ch} q_2 \operatorname{ch} 2q_1} + \tau \frac{\operatorname{ch} q_2 (z-1)}{\operatorname{ch} q_2}$$

$$d_2(\tau, z) = \frac{\tau \operatorname{ch} q_1 (z-2)}{\operatorname{ch} 2q_1} - \frac{\tau q_1 q_2 \operatorname{ch} q_2 \operatorname{sh} q_1 z}{\theta(\tau) \operatorname{sh} q_2 \operatorname{ch} 2q_1} + \tau \frac{\operatorname{sh} q_2 (z-1)}{\operatorname{sh} q_2}$$

Здесь $c_1 = (2G(1-\nu)/(\rho(1-2\nu)))^{1/2}$, $c_2 = (G/\rho)^{1/2}$ — скорости продольных и поперечных волн в материале волновода, M_n ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность неизвестных чисел. При этом уравнение $\Delta(\tau) = 0$ является дисперсионным для бесконечного слоя $|x| < \infty$, $0 < z < 2$ с жестко заземленной нижней гранью $z = 0$ и свободной от напряжений гранью $z = 2$ [4]. Вектор смещений в форме (1.3) удовлетворяет всем граничным условиям из (1.1), за исключением условия $\tau_{zx}(0, z) = 0$ (вне зависимости от значений коэффициентов M_n). Удовлетворение этому оставшемуся граничному условию приводит к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных M_n :

$$M_n = \frac{2p_2\beta_n}{\theta^2(\beta_n) - p_1p_2\beta_n^2} \left\{ (-1)^{n-1} \int_0^\infty \frac{\tau q_1^2 F(\tau) d\tau}{\theta(\tau)(q_1^2 + \beta_n^2)} + \right. \\ \left. + (-1)^n \int_0^\infty [C(\tau) \operatorname{th} q_2 + D(\tau) \operatorname{cth} q_2] a_{31}(\tau, n) d\tau + \right. \\ \left. + \beta_n \int_0^\infty [C(\tau) - D(\tau)] a_{32}(\tau, n) d\tau \right\}$$

$$C(\tau) \Delta(\tau) = \tau q_1 F(\tau) \operatorname{ch} q_2 a_1(\tau) + q_1 S_{1n}(\tau) \operatorname{ch} q_2 a_2(\tau) + S_{2n}(\tau) \operatorname{ch} q_2 a_3(\tau)$$

$$D(\tau) \Delta(\tau) = \tau q_1 F(\tau) \operatorname{sh} q_2 a_4(\tau) + q_1 S_{1n}(\tau) \operatorname{sh} q_2 a_5(\tau) + S_{2n}(\tau) \operatorname{sh} q_2 a_6(\tau)$$

$$S_{1n}(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum M_n \left(\frac{p_1^2}{\tau^2 + p_1^2} - \frac{\theta(\beta_n)}{\tau^2 + p_2^2} \right)$$

$$S_{2n}(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum (-1)^n M_n \left(\frac{p_1^2 \beta_n}{\tau^2 + p_1^2} - \frac{\theta^2(\beta_n)}{\beta_n(\tau^2 + p_2^2)} \right)$$

$$a_{11}(\tau) = \tau^2 \frac{\operatorname{th} 2q_1}{q_1} - \frac{\tau^2 q_2 \operatorname{th} q_2}{\theta(\tau) \operatorname{ch} 2q_1} - q_2 \operatorname{th} q_2$$

$$a_{12}(\tau) = -\tau^2 \frac{\operatorname{th} 2q_1}{q_1} - \frac{\tau^2 q_2 \operatorname{cth} q_2}{\theta(\tau) \operatorname{ch} 2q_1} + q_2 \operatorname{cth} q_2$$

$$a_{21}(\tau) = \theta(\tau) - \frac{\tau^2 q_1 q_2 \operatorname{th} 2q_1 \operatorname{th} q_2}{\theta(\tau)} - \frac{\tau^2}{\operatorname{ch} 2q_1} \quad (1.4)$$

$$a_{22}(\tau) = \theta(\tau) - \frac{\tau^2 q_1 q_2 \operatorname{th} 2q_1 \operatorname{cth} q_2}{\theta(\tau)} + \frac{\tau^2}{\operatorname{ch} 2q_1}$$

$$a_{31}(\tau, n) = q_2 \left(\frac{\tau^2 q_1^2}{\theta(\tau)(q_1^2 + \beta_n^2)} - \frac{\theta(\tau)}{q_2^2 + \beta_n^2} \right)$$

$$a_{32}(\tau, n) = \frac{\theta(\tau)}{q_2^2 + \beta_n^2} - \frac{\tau^2}{q_1^2 + \beta_n^2}$$

Для учета вклада всех неизвестных M_n бесконечной системы (1.4) при ее редукции к конечной алгебраической системе уравнений относительно M_n ($n = 1, \dots, N$), а также для полного анализа в рамках принятого подхода ближнего волнового поля в окрестности торца волновода, определяющее значение имеет априорное знание асимптотического поведения неизвестных M_n при $n \rightarrow \infty$. Исследование системы (1.4) с использованием техники интегрального преобразования Меллина (см. [5]) показывает, что для ограниченного решения $\{M_n\}_{n=1}^\infty$ системы (1.4) справедлива асимптотика

$$M_n = a\beta_n^{-\gamma} + b(-1)^n \beta_n^{-1} + O(\beta_n^{-2}), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

где a, b — некоторые постоянные, линейным образом зависящие от заданной нагрузки $f(x)$, а $\gamma = \gamma(\nu) \in (1/2, 1)$ — первый по возрастанию действительных частей корень уравнения

$$(3 - 4\nu) \cos^2 \frac{1}{2} \pi \gamma + (1 - 2\nu)^2 - \gamma^2 = 0, \quad \operatorname{Re} \gamma > 0 \quad (1.6)$$

при этом второе слагаемое в правой части равенства (1.5) отвечает первому корню уравнения $\sin^2 \frac{\pi\gamma}{2} - \gamma^2 = 0$ в той же полуплоскости $\operatorname{Re} \gamma > 0$.

Относительно организации вычислительного процесса при решении усеченной системы (1.4) и качественном и количественном анализе напряженно-деформированного состояния волновода в окрестностях угловых точек на основании использования асимптотики M_n в (1.4) и (1.3) соответственно (см. [1, 5]).

2. Численное решение граничной задачи (1.1) на основании представления (1.3) и системы (1.4) проводилось для нагрузки

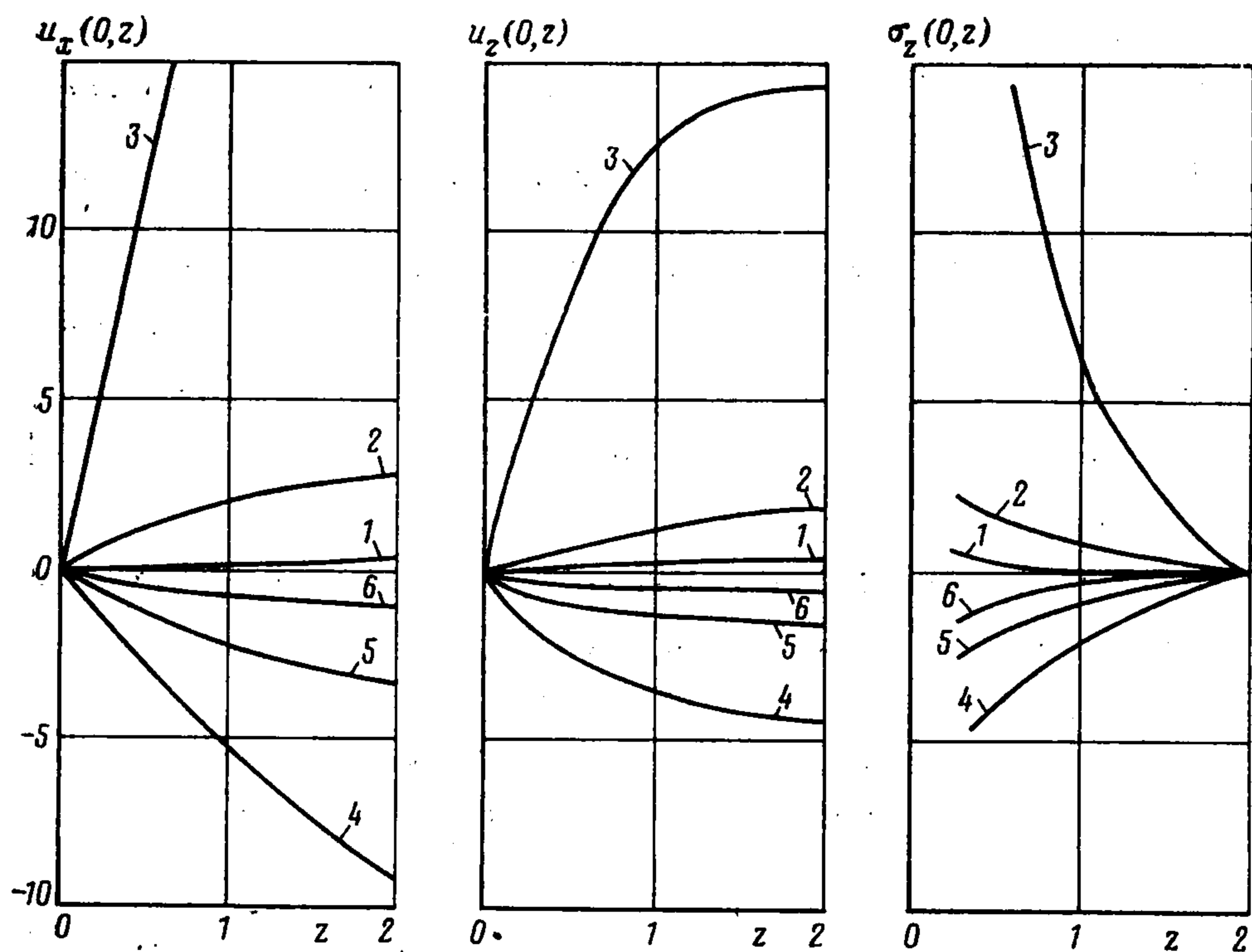
$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [1/2, 1] \\ 0, & x \in [0, 1/2] \end{cases} \quad (2.1)$$

при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,3$ в диапазоне частот $0,4 \leq \Omega_2 \leq 0,78$, так что $\Omega_2 < \pi/4 = \Omega^{(1)}$, где $\Omega^{(1)}$ — первая частота запираия рассматриваемого волновода, т. е. в рассмотренном диапазоне частот отсутствуют бегущие волны. Это исследование показало, что при подходе к частоте $\Omega_2 \rightarrow \Omega_e = 0,761$ наблюдается резкое увеличение абсолютных величин коэффициентов M_n ($n = 1, \dots, 10$), являющихся решением конечной алгебраической системы, получающейся усечением системы (1.4) с использованием асимптотики (1.5). При этом с переходом от частоты $\Omega_2 = 0,761$ к частоте $\Omega_2 = 0,7615$ происходит изменение знака всех неизвестных и знака частотного определителя системы. С дальнейшим удалением от частоты $\Omega_2 = 0,7615$ абсолютные величины неизвестных M_n уменьшаются, точность удовлетворения граничным условиям (1.1) повышается. Указанные особенности являются признаками краевого резонанса [1].

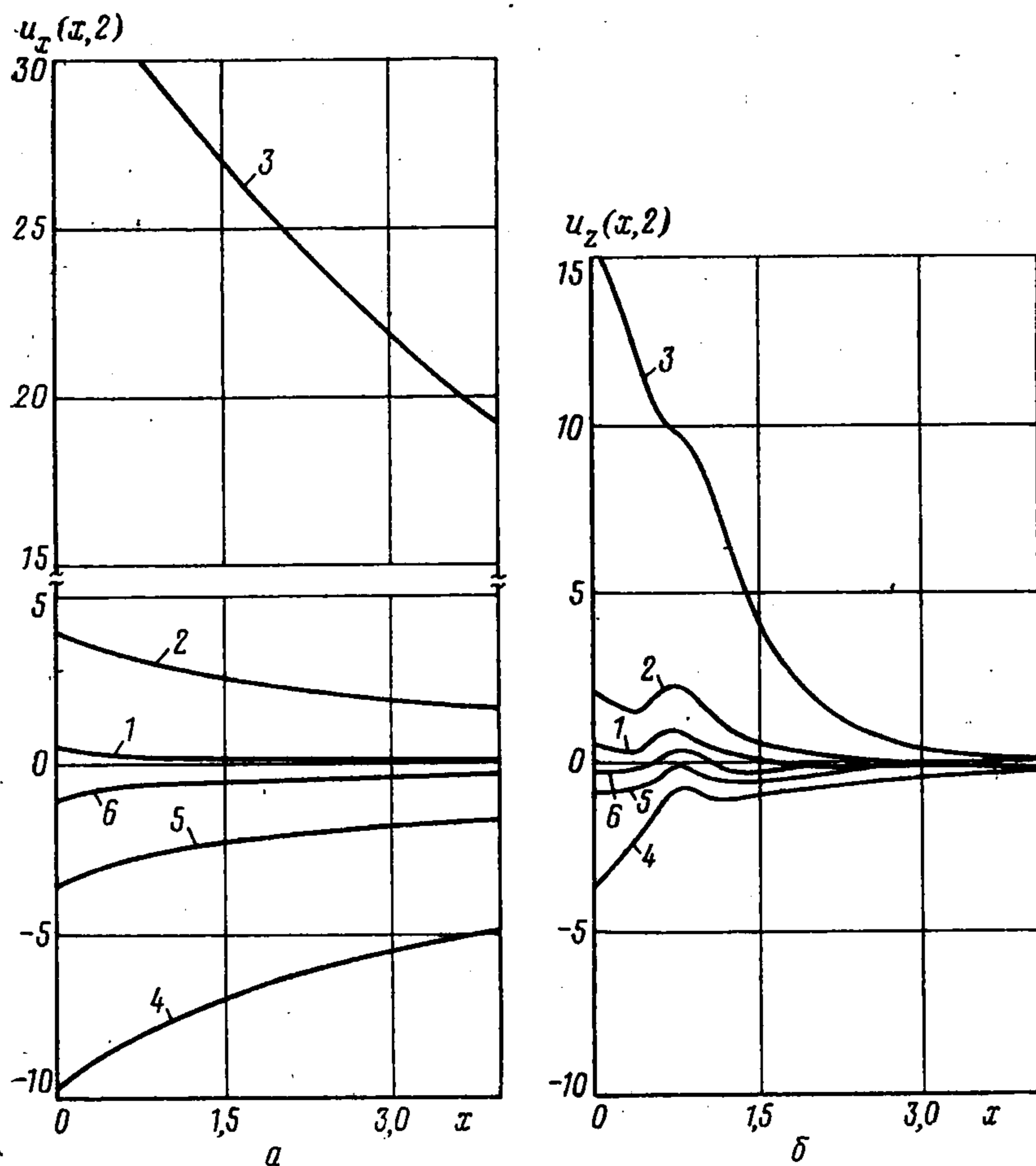
На фиг. 1 показаны смещения $u_x(0, z)$, $u_z(0, z)$ и напряжение $\sigma_z(0, z)$ на торце $x = 0$ волновода при различных значениях частоты. Кривые 1—6 отвечают значениям частоты $\Omega_2 = 0,4; 0,75; 0,76; 0,765; 0,77; 0,78$ соответственно. При $\Omega_2 = 0,4$ и $\Omega_2 = 0,78$ смещения на торце практически равны нулю. При приближении к частоте краевого резонанса $\Omega_e = 0,761$ резко возрастают абсолютные величины смещений и напряжения $\sigma_z(0, z)$ на торце, при переходе через частоту краевого резонанса смещения и напряжение меняют знак, а при удалении от Ω_e они резко уменьшаются по абсолютной величине.

На фиг. 2, а, б показаны смещения на свободной грани волновода на участке $x \in [0, 4]$ при тех же значениях частоты, что и на фиг. 1. Здесь наблюдается сильная локализация движения вблизи торца около частоты Ω_e и резкое убывание смещений при удалении от торца. При переходе через частоту Ω_e смещения меняют знак. Характерные всплески на фиг. 2 отвечают смещениям на участке поверхности $x \in [1/2, 1]$ под заданной нагрузкой. Поведение кривых на фиг. 2 наглядно показывает возможность получить достоверные данные о собственной форме колебаний волновода при рассмотрении вынужденных движений. Если при малых Ω_2 прогиб следует за нагрузкой (кривые 1, 2), то при Ω_2 , близких к резонансной частоте, движение поверхности определяется собственной формой и мало искажаемо внешней нагрузкой.

Указанные черты краевого резонанса в полубесконечном волноводе с жестко заземленной гранью аналогичны проявлениям краевого резонанса при продольных колебаниях свободного полубесконечного волно-



Фиг. 1



Фиг. 2

вода, возбуждаемого нагрузкой на торце в случае $\nu = 0$ [6], а также при колебаниях длинного цилиндра с заземленной боковой поверхностью [7].

3. Поскольку в рассматриваемой ситуации частота $\Omega_e \in (0, \Omega^{(1)})$, то представляет интерес проследить за вкладом каждой неоднородной волны в формирование волнового поля вблизи торца волновода. Решение граничной задачи (1.1) в виде (1.3) может быть переразложено в виде ряда по однородным решениям для соответствующего слоя. А именно [4] в случае нагрузки (2.1) вектор смещений при $x \in (0, 1/2)$ представляется в виде

$$\mathbf{u}(x, z) = \sum c_k^+ \mathbf{u}_{\gamma_k^+}(z) \exp(i\gamma_k^+ x) + \sum c_k^- \mathbf{u}_{\gamma_k^-}(z) \exp(i\gamma_k^- x)$$

$$\mathbf{u}_{\gamma}(z) = \{u_x(\gamma, z), u_z(\gamma, z)\},$$

$$u_x(\gamma, z) = [q_1 q_2 N(\gamma) (\operatorname{ch} q_2 z - \operatorname{ch} q_1 z) - M(\gamma) (\gamma^2 \operatorname{sh} q_1 z - q_1 q_2 \operatorname{sh} q_2 z)] / (\gamma M(\gamma))$$

$$u_z(\gamma, z) = -iq_1 [\gamma^2 M(\gamma) (\operatorname{ch} q_2 z - \operatorname{ch} q_1 z) + N(\gamma) (\gamma^2 \operatorname{sh} q_2 z - q_1 q_2 \operatorname{sh} q_1 z)] / (\gamma^2 M(\gamma))$$

$$M(\gamma) = \theta(\gamma) \operatorname{sh} 2q_2 - q_1 q_2 \operatorname{sh} 2q_1, \quad N(\gamma) = \gamma^2 \operatorname{ch} 2q_1 - \theta(\gamma) \operatorname{ch} 2q_2$$

$$c_k^+ = 2\pi i T(\tau) \frac{S_{1n}(\tau) d_{21}(\tau) - S_{2n}(\tau) d_{11}(\tau) + \tau q_1 F^+(\tau) d_{33}(\tau)}{d_{11}(\tau) \Delta'(\tau)} \Big|_{\tau=\nu_k^+} \quad (3.1)$$

$$c_k^- = -2\pi i \frac{\tau q_1 F^-(\tau) d_{33}(\tau)}{d_{11}(\tau) \Delta'(\tau)} \Big|_{\tau=\nu_k^-}$$

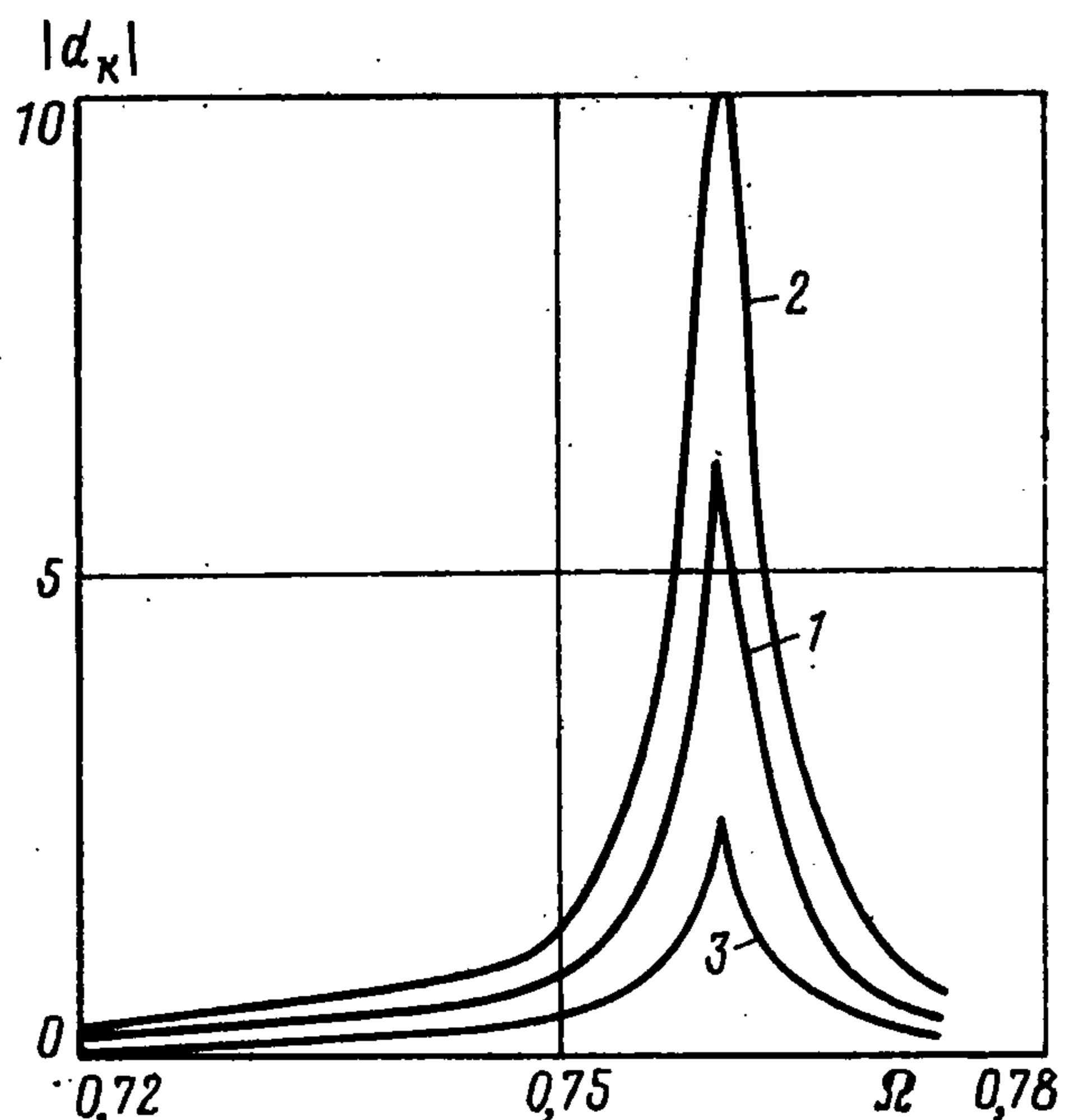
$$T(\tau) = \tau q_2 (\tau^2 \operatorname{ch} 2q_2 - \theta(\tau) \operatorname{ch} 2q_1)$$

$$F^\pm(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty f(x) \exp(\pm i\tau x) dx.$$

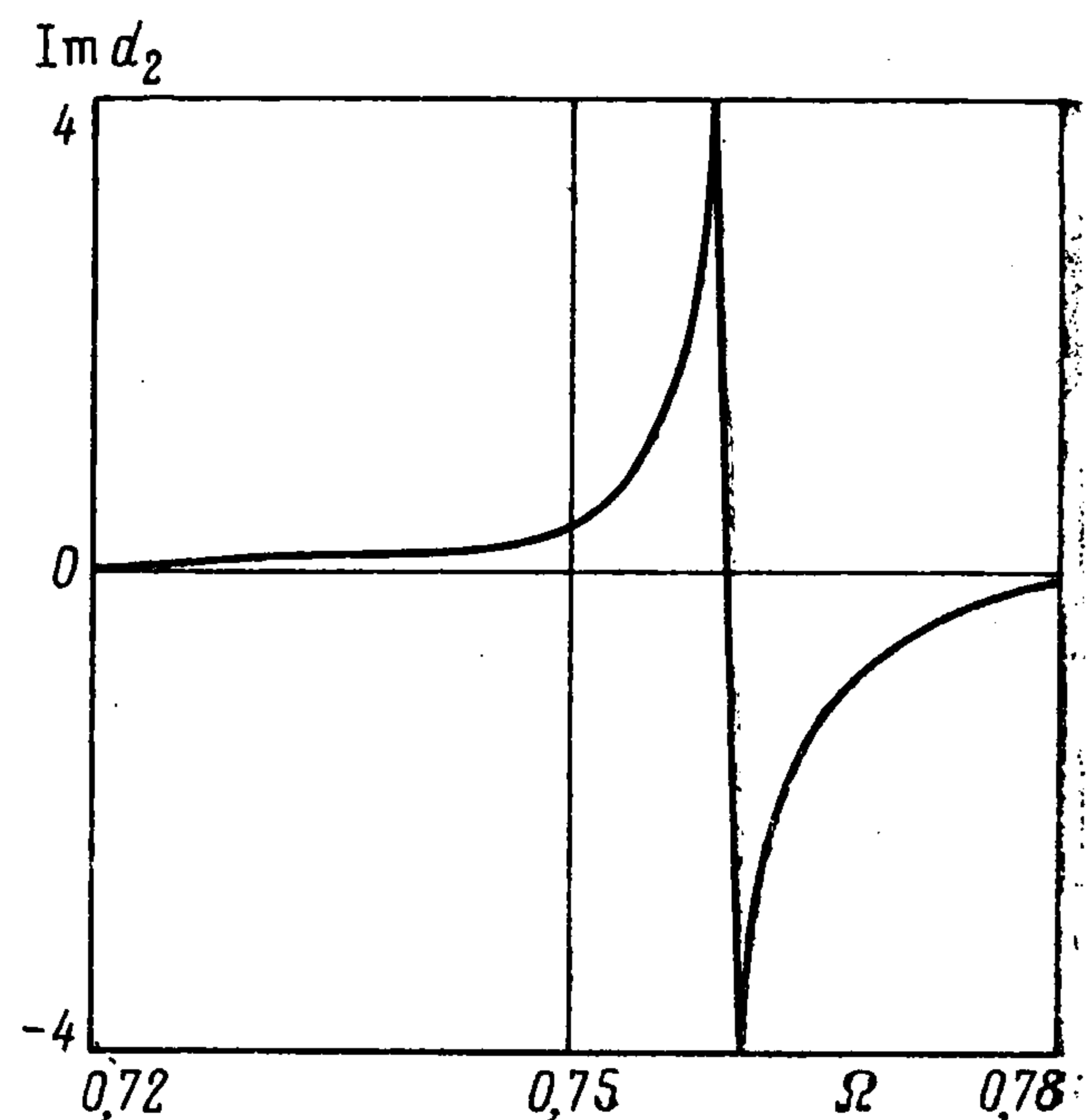
Представление (3.1) с коэффициентами c_k^\pm , выражаемыми через последовательность M_n , позволяет получать количественные оценки для коэффициентов возбуждения нормальных мод в зависимости от частоты.

На фиг. 3 показаны абсолютные величины нормированных амплитуд нормальных волн ($d_k = c_k / |u_x^k(0, 1)|$) в зависимости от частоты: кривая 1 — волна с чисто мнимой постоянной распространения, кривые 2 и 3 — волны с первой и второй комплексными постоянными распространения соответственно. Вблизи Ω_e в узком диапазоне частот наблюдается резкое увеличение нормированных амплитуд всех неоднородных волн. Как и в случае волновода со свободными боковыми гранями, наиболее сильно возбуждается неоднородная волна с первой комплексной постоянной распространения, являясь определяющей при формировании волнового поля на торце волновода. Отличие от случая краевого резонанса в свободном волноводе проявляется в наличии существенного вклада волны с чисто мнимой постоянной распространения. Подобное явление наблюдалось при анализе форм колебаний цилиндра с заземленной боковой поверхностью [7].

Изменение фазы нормированной амплитуды волны с первой комплексной постоянной распространения при переходе через частоту краевого резонанса Ω_e показано на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 283 с.
2. Torvik P. J., McClatchey J. J. Responce of an elastic plate to a cyclic longitudinal force // J. Acoust. Soc. Amerika. 1968. V. 44. № 1. P. 59—64.
3. Gladwell I., Gregory D. Axisymmetric waves in a semi-infinite elastic rod // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1989. V. 42. № 2. P. 327—337.
4. Мелешко В. В., Мартыненко О. Н. О связи методов суперпозиции и однородных решений в задачах распространения волн в полубесконечном жесткозащемленном упругом слое // Теоретическая и прикладная механика. Харьков: Вища школа, 1988. Вып. 19. С. 3—10.
5. Гомилко А. М., Мартыненко О. Н. Смешанная граничная задача теории упругости для полуполосы // Докл. АН УССР. 1987. Сер. А. № 5. С. 37—41.
6. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. механика. 1980. Т. 16. № 2. С. 77—81.
7. Гринченко В. Т., Комиссарова Г. Л. О нормальных колебаниях цилиндра конечной длины с защемленной боковой поверхностью // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 6. С. 25—31.

Киев

Поступила в редакцию
23.XI.1990