Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 539.3

И. А. Пашков, И. Е. Трояновский

МЕТОД РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ФОРМАМ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ТЕЛА С ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ ТРЕНИЕМ

Предлагается метод решения динамических задач для вязкоупругого тела (модель Кельвина — Фойхта), находящегося в безмассовой вязкой среде. При взаимодействии с внешней окружающей средой на границе тела возникают напряжения, пропорциональные скорости перемещений. Рассматриваемая модель внешнего трения используется, например, при моделировании динамических процессов в упругих средах, занимающих бесконечную область [1, 2]. В этом случае условия реализации численных методов решения требуют эквивалентной постановки задачи в конечной области, и с помощью внешнего вязкого трения учитывается излучение энергии на бесконечность.

С математической точки зрения при наличии трения спектральная задача на собственные значения перестает быть самосопряженной, а собственные функции не являются ортогональными. Ниже для упругого тела с трением показана возможность разложения решения стационарной и нестационарной задач в ряд по собственным функциям спектральной задачи. При этом коэффициенты в разложении определяются с помощью явных соотношений обобщенной ортогональности, полученных на основе подхода, предложенного ранее [3].

В начале статьи основные положения предлагаемого метода разбираются на конечномерной модели вязкоупругой системы.

1. Система с конечным числом степеней свободы. В общем случае как внешнего, так и внутреннего вязкого трения малые колебания произвольной механической системы с n степенями свободы описываются матричным уравнением с начальными условиями

$$\mathbf{A}\mathbf{u}^{\cdot\cdot} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{\cdot} + \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}^{\cdot}(0) = \mathbf{v}_0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ — векторы обобщенных координат и обобщенных сил размерности n; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — действительные симметрические $(n \times n)$-матрицы, из них $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ — невырожденные.

В стационарной задаче вектор-функция f изменяется по гармоническому закону $\mathbf{f} = \mathbf{F}e^{i\omega t}$ с заданной частотой ω и амплитудой $\mathbf{F}(\omega)$. Начальные условия не ставятся, вместо них требуется выполнение условия периодичности решения с той же частотой ω: $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{i\omega t}$. В результате относительно комплексных компонент искомого вектора $\mathbf{U}$ имеется система линейных алгебраических уравнений

$$(-\omega^2\mathbf{A} + i\omega\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{1.3}$$

Поставим в соответствие стационарной задаче (1.3) спектральную задачу по параметру λ

$$(\lambda^2\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{y} = \mathbf{0} \tag{1.4}$$

Решения задачи (1.4) суть собственные значения λ и собственные векторы $\mathbf{y}$ ($\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$) квадратичного пучка операторов в конечномерном комплексном векторном пространстве C^n. В отличие от стандартной задачи на собственные значения [4] в (1.4) спектральный параметр λ входит нелинейно.

Поэтому собственные значения здесь комплексные, а базиса из собственных векторов может не существовать.

Выполним линеаризацию задачи (1.4) по спектральному параметру, переходя в пространство координат — скоростей удвоенной размерности. Обозначим через $\mathbf{v}$ вектор $\lambda\mathbf{y}$ и запишем уравнение (1.4) в виде эквивалентной системы двух уравнений

$$\mathbf{Cy} + \lambda(\mathbf{By} + \mathbf{Av}) = 0, \quad \mathbf{A}(\mathbf{v} - \lambda\mathbf{y}) = 0 \tag{1.5}$$

или в матричной форме

$$(\mathbf{P} + \lambda\mathbf{R})\,\mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{P} = \begin{Vmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & -\mathbf{A} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{Vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A} & 0 \end{Vmatrix} \tag{1.6}$$

где $\mathbf{q} = \{\mathbf{y}, \mathbf{v}\}$ — элемент из пространства C^{2n}.

Отметим, что матрицы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ — симметрические, невырожденные, неопределенные.

Аналогичным образом неоднородная задача (1.3) может быть записана

$$(\mathbf{P} + i\omega\mathbf{R})\,\mathbf{Q} = \mathbf{G} \tag{1.7}$$

где $\mathbf{Q} = \{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ — искомый вектор амплитуд координат — скоростей; $\mathbf{G} = \{\mathbf{F}, 0\}$ — элемент пространства C^{2n}, составленный из вектора $\mathbf{F}$ и нулевого вектора.

В пространстве вектор-функций задача Коши (1.1) и (1.2) для уравнения второго порядка эквивалентна следующей задаче Коши для уравнения первого порядка относительно вектора обобщенных координат — скоростей $\mathbf{x} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$:

$$\mathbf{Px} + \mathbf{Rx}^{\cdot} = \mathbf{g}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1.8}$$

где вектор $\mathbf{x}_0$ составлен из векторов $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{v}_0$, а вектор $\mathbf{g}$ — из вектора $\mathbf{f}$ и нулевого вектора.

Собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$ спектральных задач (1.4), (1.8) являются корнями следующего характеристического уравнения:

$$\det(\lambda^2\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{C}) \equiv -(\det\mathbf{A})^{-1}\det(\mathbf{P} + \lambda\mathbf{R}) = 0 \tag{1.9}$$

Утверждение 1.1. Пусть $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ — решения задачи (1.4), отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2. Тогда справедливы следующие два соотношения обобщенной ортогональности:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_1 \equiv \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{By}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\,\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{Ay}_2 = 0 \tag{1.10}$$

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_2 \equiv \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{Cy}_2 - \lambda_1\lambda_2\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{Ay}_2 = 0 \tag{1.11}$$

где точкой обозначена операция свертки двух векторов.

Действительно, если $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ — решения задачи (1.4), то $\mathbf{q}_1 = \{\mathbf{y}_1, \lambda_1\mathbf{y}_1\}$ и $\mathbf{q}_2 = \{\mathbf{y}_2, \lambda_2\mathbf{y}_2\}$ удовлетворяют уравнениям

$$(\mathbf{P} + \lambda_1\mathbf{R})\,\mathbf{q}_1 = 0, \quad (\mathbf{P} + \lambda_2\mathbf{R})\,\mathbf{q}_2 = 0$$

Вычтем из свертки первого уравнения с вектором $\mathbf{q}_2$ свертку второго уравнения с вектором $\mathbf{q}_1$. В результате при учете симметрии матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ получим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{Rq}_2 = 0$$

Отсюда при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ следуют соотношения

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{Rq}_2 = 0, \quad \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{Pq}_2 = 0 \tag{1.12}$$

Раскрывая (1.12), приходим к (1.10) и (1.11).

Утверждение 1.2. Пусть система собственных векторов $\{\mathbf{q}_k\}$ спектральной задачи (1.6) образует базис в пространстве C^{2n}. Тогда величины скалярных квадратов $(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)_1$ и $(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)_2$ отличны от нуля для любого собственного вектора y_k, отвечающего простому собственному значению λ_k.

Доказательство. Предположим, что существует такой вектор $\mathbf{y}_k$, отвечающий простому собственному значению, для которого, например, $(\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k)_1 \equiv \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{R}\mathbf{q}_k = 0$. Так как система $\{\mathbf{q}_k\}$ образует базис, то любой вектор $\mathbf{a} \in C^{2n}$ можно представить в виде суммы

$$\mathbf{a} = C_1\mathbf{q}_1 + \ldots + C_{2n}\mathbf{q}_{2n}$$

Умножив это соотношение на матрицу $\mathbf{R}$ и выполнив свертку с $\mathbf{q}_k$, получаем, учитывая соотношения ортогональности (1.10),

$$\mathbf{q}_k \cdot \mathbf{R}\mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{R}\mathbf{q}_k = 0$$

Последнее возможно для любых $\mathbf{a}$, только если $\mathbf{q}_k = 0$, что недопустимо по условию.

Отметим, что условия утверждения 1.2 выполнены, если все корни уравнения (1.9) простые. Из утверждений 1.3 и 1.4, которые доказываются ниже, следует, что условие базисности системы собственных векторов в утверждении 1.2 можно опустить.

Покажем, что в случае кратных собственных векторов соотношения типа (1.12) остаются справедливыми для векторов из корневых подпространств, отвечающих различным собственным значениям.

Введем каноническую по Келдышу [5] систему собственных и присоединенных векторов $\{\mathbf{y}_k^\circ, \mathbf{y}_k^1, \ldots, \mathbf{y}_k^p\}$, отвечающих собственным значениям λ_k $(1 \leqslant k \leqslant 2n)$, где собственные векторы $\mathbf{y}_k^\circ$ кратности $p+1$, зависящей от k, удовлетворяют уравнению (1.4) при $\lambda = \lambda_k$, а присоединенные векторы $\mathbf{y}_k^i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ — уравнениям

$$(\lambda_k^2\mathbf{A} + \lambda_k\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{y}_k^1 + (2\lambda_k\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{y}_k^\circ = 0 \tag{1.13}$$

$$(\lambda_k^2\mathbf{A} + \lambda_k\mathbf{B} + \mathbf{C})\,\mathbf{y}_k^i + (2\lambda_k\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{y}_k^{i-1} + \mathbf{A}\mathbf{y}_k^{i-2} = 0, \qquad i > 1 \tag{1.14}$$

Каждой цепочке собственного и присоединенных векторов $\{\mathbf{y}_k^\circ, \mathbf{y}_k^1, \ldots, \mathbf{y}_k^p\}$ поставим в соответствие производную цепочку $\{\lambda_k y_k^\circ, \ldots, \lambda_k\mathbf{y}_k^p + \mathbf{y}_k^{p-1}\}$. Тогда можно проверить, что векторы $\mathbf{q}_k^\circ = \{\mathbf{y}_k^\circ, \lambda_k\mathbf{y}_k^\circ\}, \ldots, \mathbf{q}_k^p = \{\mathbf{y}_k^p, \lambda_k\mathbf{y}_k^p + \mathbf{y}_k^{p-1}\}$ образуют цепочку собственного и присоединенных элементов спектральной задачи (1.6), отвечающую тому же собственному значению λ_k, т. е. удовлетворяют уравнениям

$$(\mathbf{P} + \lambda_k\mathbf{R})\,\mathbf{q}_k^\circ = 0 \tag{1.15}$$

$$(\mathbf{P} + \lambda_k\mathbf{R})\,\mathbf{q}_k^m + \mathbf{R}\mathbf{q}_k^{m-1} = 0, \qquad m = 1, \ldots, p \tag{1.16}$$

Утверждение 1.3. Пусть $\mathbf{q}_1^m$ и $\mathbf{q}_2^j$ — элементы цепочек собственных и присоединенных векторов задачи (1.6), отвечающих различным собственным значениям λ_1, λ_2 и имеющих длину p_1, p_2 соответственно. Тогда для любых $0 \leqslant m \leqslant p_1$, $0 \leqslant j \leqslant p_2$ справедливы следующие соотношения обобщенной ортогональности:

$$\mathbf{q}_1^m \cdot \mathbf{R}\mathbf{q}_2^j = 0, \qquad \mathbf{q}_1^m \cdot \mathbf{P}\mathbf{q}_2^j = 0 \tag{1.17}$$

Доказательство. Случай $m = j = 0$ доказан в утверждении 1.1. Пусть $m = 0$, $j = 1$. Вычтем из свертки уравнения (1.15) при $k = 1$ с вектором q_2^1 свертку уравнения (1.16) при $k = 2$ с вектором $\mathbf{q}_1^\circ$. В результате при учете симметрии матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{R}$ получим

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbf{q}_1^\circ \cdot \mathbf{R}\mathbf{q}_2^1 + \mathbf{q}_1^\circ \cdot \mathbf{R}\mathbf{q}_2^\circ = 0$$

Второе слагаемое при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ обращается в нуль, следовательно,

$$\mathbf{q}_1^\circ \cdot \mathbf{R}\mathbf{q}_2^1 = 0 \tag{1.18}$$

Пусть $m = 1$, $j = 1$. Вычитая из свертки уравнения (1.16) при $k = 1$ с вектором $\mathbf{q}_2^1$ свертку уравнения (1.16) при $k = 2$ с вектором $\mathbf{q}_2^1$, получаем

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,\mathbf{q}_1{}^1\cdot\mathbf{R}\mathbf{q}_2{}^1+\mathbf{q}_1{}^\circ\cdot\mathbf{R}\mathbf{q}_2{}^1-\mathbf{q}_1{}^1\cdot\mathbf{R}\mathbf{q}_2{}^\circ=0 \qquad (1.19)$$

Последние два слагаемых в (1.19) в соответствии с (1.18) обращаются в нуль, следовательно, $\mathbf{q}_1{}^1\cdot\mathbf{R}\mathbf{q}_2{}^1=0$.

Для остальных значений m и j первое соотношение (1.17) доказывается аналогично по индукции. Выполнив свертку уравнения (1.16) при $k=1$ с вектором $\mathbf{q}_2{}^j$, получаем второе соотношение (1.17).

Следует отметить, что соотношения обобщенной ортогональности (1.17) можно получить из соотношений биортогональности, построенных в работе [6], если учесть, что для действительных симметрических матриц **A**, **B**, **C** элементы цепочек $\mathbf{z}_k{}^m$ сопряженной к (1.4) спектральной задачи, отвечающие собственным значениям $\bar{\lambda}_k$, связаны с векторами $\mathbf{y}_k{}^m$ операцией сопряжения: $\mathbf{z}_k{}^m=\bar{\mathbf{y}}_k{}^m$.

Из соотношений (1.15), (1.16) вытекает также, что элементы цепочки собственного и присоединенных векторов всегда линейно независимы. Для каждого собственного значения λ_k существует хотя бы один собственный вектор. При этом можно показать [5], что сумма кратностей собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению λ_k совпадает с кратностью корня λ_k в уравнении (1.12). Отсюда следует

Утверждение 1.4. Каноническая система собственных и присоединенных векторов $\{\mathbf{q}_k{}^m\}$ спектральной задачи (1.6) образует базис в пространстве C^{2n}.

Если система $\{\mathbf{q}_k{}^m\}$ — базис, то решение неоднородной задачи (1.7) можно представить в виде суммы

$$\mathbf{Q}=\sum_{k,\,m}C_k{}^m\mathbf{q}_k{}^m$$

где коэффициенты разложения $C_k{}^\circ$ при собственных векторах, отвечающих простым собственным значениям, находятся явно при помощи соотношений обобщенной ортогональности (1.17)

$$C_k{}^\circ=\frac{\mathbf{G}\cdot\mathbf{q}_k{}^\circ}{(i\omega-\lambda_k)\,\mathbf{q}_k{}^\circ\cdot\mathbf{R}\mathbf{q}_k{}^\circ}\equiv\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{y}_k}{(i\omega-\lambda_k)\,(\mathbf{y}_k,\mathbf{y}_k)_1} \qquad (1.20)$$

Для кратных собственных значений коэффициенты $C_k{}^m$ могут быть найдены в результате решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k,\,j}(\mathbf{q}_l{}^m\cdot\mathbf{P}\mathbf{q}_k{}^j+i\omega\mathbf{q}_l{}^m\cdot\mathbf{R}\mathbf{q}_k{}^j)\,C_k{}^j=\mathbf{G}\cdot\mathbf{q}_l{}^m \qquad (1.21)$$

порядка кратности собственного значения с матрицей, невырожденной при $\omega\neq-i\lambda_k$. Последнее условие всегда имеет место при наличии вязкости, когда собственные значения комплексные. В выражении (1.21) подразумевается, что векторы $\mathbf{q}_l{}^m$, $\mathbf{q}_k{}^j$ отвечают одному и тому же собственному значению, но принадлежат различным корневым подпространствам при $l\neq k$.

Аналогичным образом в случае простых собственных значений задача Коши (1.8) может быть сведена к системе независимых дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями

$$x_k{}^\cdot+\lambda_k x_k=\mathbf{f}\cdot\mathbf{y}_k/(\mathbf{y}_k,\mathbf{y}_k)_1,\qquad x_k(0)=\mathbf{q}_k\cdot\mathbf{R}\mathbf{x}_0/(\mathbf{y}_k,\mathbf{y}_k)_1$$

в результате решения которой искомая функция $\mathbf{u}(t)$ находится в виде суммы

$$\mathbf{u}=\sum_k x_k(t)\,\mathbf{y}_k$$

При наличии кратных собственных значений возникают системы связных уравнений относительно коэффициентов x_k, но порядок этих систем не превосходит кратности соответствующего собственного значения.

2. Система с распределенными параметрами. Рассматривается вязкоупругое тело Фойхта, занимающее область Ω с границей Γ. Движение тела описывается уравнениями [7]

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} - \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{f} = 0 \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \qquad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T] \text{ в } \Omega$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор перемещений, $\mathbf{f}$ — вектор объемной распределенной нагрузки, ρ — объемная плотность, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений, $\mathbf{c}_0 = \{\overset{0}{c}_{ijkl}\}$ — тензор упругих модулей, $\mathbf{c}_1 = \{\overset{1}{c}_{ijkl}\}$ — тензор коэффициентов вязкости, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ — дифференциальный оператор тензора деформаций Коши.

Предполагается, что тензоры $\mathbf{c}_s$ обладают следующими свойствами симметрии:

$$\overset{s}{c}_{ijkl} = \overset{s}{c}_{jikl} = \overset{s}{c}_{klij}, \quad s = 0, 1$$

На части границы $\Gamma_0 \subset \Gamma$ заданы нулевые перемещения

$$\mathbf{u} = 0 \tag{2.2}$$

На оставшейся части границы Γ_1 заданы условия контакта с вязкоупругой внешней средой

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \left(\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1\frac{\partial}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{u} \tag{2.3}$$

где $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности Γ_1, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$ — симметричные тензоры второго ранга коэффициентов жесткости и вязкости среды.

В начальный момент времени $t = 0$ известно поле перемещений $\mathbf{u}_0$ и поле скоростей $\mathbf{v}_0$ в области Ω

$$\mathbf{u}\,|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \quad \partial\mathbf{u}/\partial t\,|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \tag{2.4}$$

Соотношения (2.1)—(2.4) определяют смешанную краевую задачу.

В стационарном случае нагрузка $\mathbf{f}$ изменяется по гармоническому закону $\mathbf{f} = \mathbf{F}e^{i\omega t}$ с заданной частотой ω, и решение ищется в гармоническом виде $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{i\omega t}$. При этом функция формы $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ удовлетворяет соотношениям:

$$\nabla\cdot[(\mathbf{c}_0 + i\omega\mathbf{c}_1)\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U})] + \rho\omega^2\mathbf{U} + \mathbf{F} = 0 \text{ в } \Omega \tag{2.5}$$

$$\mathbf{U} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{c}_0 + i\omega\mathbf{c}_1)\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) = (\mathbf{b}_0 + i\omega\mathbf{b}_1)\cdot\mathbf{U} \text{ на } \Gamma_1$$

Неоднородной краевой задаче (2.5) поставим в соответствие однородную спектральную с параметром λ:

$$\nabla\cdot[(\mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1)\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})] - \rho\lambda^2\mathbf{y} = 0 \text{ в } \Omega \tag{2.6}$$

$$\mathbf{y} = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \mathbf{n}\cdot(\mathbf{c}_0 + \lambda\mathbf{c}_1)\cdot\cdot\,\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}) = (\mathbf{b}_0 + \lambda\mathbf{b}_1)\cdot\mathbf{y} \text{ на } \Gamma_1$$

В отличие от известной задачи на собственные значения теории упругости [8] здесь спектральный параметр λ входит в последнее краевое условие и уравнение нелинейно.

Задачу (2.6) можно сформулировать также в виде задачи на собственные значения для квадратичного пучка неограниченных операторов.

Обозначим через $W_2^2(\Omega)$ соболевское пространство функций с интегрируемым на Ω квадратом вместе с первыми и вторыми производными.

В гильбертовом пространстве $H = [L_2(\Omega)]^3 \times [L_2(\Gamma_1)]^3$ со скалярным произведением, равным сумме скалярных произведений в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma_1)$, рассмотрим операторы P_0, P_1, P_2, определенные на элементах y^+ линеала $D \subset H$

$$D = \{y^+ \colon y^+ = (\mathbf{y}, \text{след } \mathbf{y} \text{ на } \Gamma_1),\ \mathbf{y} \in [W_2{}^2(\Omega)]^3,\ \mathbf{y} = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

равенствами

$$P_s y^+ = \{\nabla \cdot [c_s \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y})] \text{ в } \Omega,\ -\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}_s \cdot\cdot\, \varepsilon(\mathbf{y}) + \mathbf{b}_s \cdot \mathbf{y} \text{ на } \Gamma_1\} \tag{2.7}$$
$$P_2 y^+ = \{-\rho \mathbf{y}, \mathbf{0}\}, \quad s = 0, 1$$

Тогда спектральная задача (2.6) представляется следующим образом:

$$(\lambda^2 P_2 + \lambda P_1 + P_0)\, y^+ = 0 \tag{2.8}$$

Используя теорему Гаусса — Остроградского и свойства симметрии тензоров $\mathbf{c}_s$, $\mathbf{b}_s$, можно показать, что операторы P_s для любых элементов y^+, $z^+ \in D$ удовлетворяют соотношениям

$$y^+ \cdot P_s z^+ = z^+ \cdot P_s y^+, \quad s = 0, 1, 2 \tag{2.9}$$

где бинарная операция свертки между элементами y^+ и z^+ пространства H определяется формулой

$$y^+ \cdot z^+ = \int\limits_{\Omega} \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma_1} \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}\, d\Gamma$$

Для действительных тензоров $\mathbf{c}_s$, $\mathbf{b}_s$ соотношения (2.9) означают, что операторы P_s — симметрические.

Утверждение 2.1. Пусть $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$ — два решения спектральной задачи (2.6), отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2. Тогда справедливы следующие два соотношения обобщенной ортогональности:

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_1 \equiv \int\limits_{\Omega} [\rho(\lambda_1 + \lambda_2)\, \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}_1) \cdot\cdot\, \mathbf{c}_1 \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}_2)]\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{y}_2\, d\Gamma = 0$$
$$(2.10)$$
$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_2 \equiv \int\limits_{\Omega} [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}_1) \cdot\cdot\, \mathbf{c}_0 \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{y}_2) - \rho \lambda_1 \lambda_2 \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_2]\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_1} \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{y}_2\, d\Gamma = 0$$

Доказательство. Следуя логике доказательства утверждения 1.1, линеаризуем уравнение (2.8) по спектральному параметру, то есть вводя удвоенное пространство $H^2 = H \times H$ с элементами $q = \{q^\circ, q^1\}$, q°, $q^1 \in H$, определим на нем линейные операторы P и R с областью определения $D^2 = D \times D$

$$Pq = \{P_0 q^\circ - P_2 q^1\}, \quad Rq = \{P_1 q^\circ + P_2 q^1,\ P_2 q^\circ\} \tag{2.11}$$

Тогда уравнение (2.8) эквивалентно уравнению

$$(P + \lambda R)\, q = 0 \tag{2.12}$$

Операторы P и R — симметрические, так как симметричны операторы P_s. Поэтому, определяя в H^2 бинарную операцию свертки

$$q \cdot p = q^\circ \cdot p^\circ + q^1 \cdot p^1, \quad q, p \in H^2$$

получаем

$$q_1 \cdot R q_2 = 0, \quad q_1 \cdot P q_2 = 0 \tag{2.13}$$

где $q_1 = \{y_1{}^+, \lambda_1 y_1{}^+\}$, $q_2 = \{y_2{}^+, \lambda_2 y_2{}^+\}$ — решения уравнения (2.12), отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2.

Раскрывая (2.13) по формулам (2.11), (2.7) и применяя теорему Гаусса — Остроградского, приходим к соотношениям

$$(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_1 = -q_1 \cdot R q_2 = 0, \quad (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)_2 = -q_1 \cdot P q_2 = 0$$

Аналогичным образом можно обобщить утверждение 1.3 на случай гильбертова пространства, вводя каноническую систему собственных и присоединенных элементов.

К сожалению, вопрос о базисности элементов канонической системы в гильбертовом пространстве решается не столь просто, как в евклидовом.

Опираясь на результаты работы [6], можно лишь утверждать, что при некоторых условиях на операторы P_s, обеспечивающих дискретность спектра пучка (2.8), каноническая система собственных и присоединенных элементов задачи (2.13) минимальна, а скалярные квадраты $(\mathbf{y}, \mathbf{y})_1$, $(\mathbf{y}, \mathbf{y})_2$ собственных векторов задачи (2.6) отличны от нуля для простых собственных значений.

Утверждение 2.2. Пусть решение краевой задачи (2.5) допускает двукратное разложение по собственным и присоединенным функциям $\mathbf{y}_k{}^m$ задачи (2.6)

$$\mathbf{U} = \sum_{k,m} C_k{}^m \mathbf{y}_k{}^m, \qquad i\omega\mathbf{U} = \sum_{k,m} C_k{}^m (\lambda_k \mathbf{y}_k{}^m + \mathbf{y}_k^{m-1}) \qquad (\mathbf{y}_k^{-1} \equiv 0) \quad (2.14)$$

Тогда коэффициенты $C_k{}^\circ$ при собственных функциях $\mathbf{y}_k{}^0$, отвечающих простым собственным значениям λ_k, находятся по формуле

$$C_k{}^\circ = [(i\omega - \lambda_k)(\mathbf{y}_k{}^\circ, \mathbf{y}_k{}^\circ)_1]^{-1} \int_\Omega \mathbf{F} \cdot \mathbf{y}_k{}^\circ \, d\Omega \qquad (2.15)$$

Соотношение (2.15) выводится точно так же, как соотношение (1.20) в разделе 1. Аналогичным образом можно повторить все выводы, касающиеся кратных собственных значений и решения нестационарной задачи (2.1)—(2.4).

3. Колебания упругого цилиндра в жидкости под действием внутреннего давления. В качестве примера рассмотрим решение задачи о колебаниях упругого полого цилиндра, погруженного в жидкость, под действием периодического внутреннего давления.

В цилиндрической системе координат r, φ, z упругий изотропный цилиндр с коэффициентами Ламе λ и μ, которые могут зависеть от r, занимает объем $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Область $r > R_2$ заполняет идеальная жидкость плотности ρ_0 со скоростью звуковых волн в ней c_0. На поверхности контакта жидкости и твердого тела $r = R_2$ предполагаются непрерывными радиальные напряжения и перемещения. На внутренней поверхности $r = R_1$ задано давление, изменяющееся во времени по гармоническому закону $p = p_0 e^{i\omega t}$. При решении стационарной задачи необходимо учитывать также условия излучения на бесконечности.

Определяющие соотношения, связывающие тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензор деформаций ε имеют вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \lambda\nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{E} + 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}), \quad R_1 < r < R_2 \\ \boldsymbol{\sigma} &= \rho_0 c_0{}^2 \nabla\cdot\mathbf{u}\mathbf{E}, \quad r > R_2 \end{aligned} \qquad (3.1)$$

где $\mathbf{E}$ — единичный тензор второго ранга.

При учете осевой симметрии уравнения (2.1) представим в координатной форме следующим образом:

$$\begin{gathered} \frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} - \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = 0 \\ \sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_r}{\partial r} + \lambda\frac{u_r}{r} \equiv l u_r \qquad (3.2) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu)\frac{u_r}{r} + \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} \end{gathered}$$

В уравнениях (3.2) при $r > R_2$ следует считать $\lambda = \rho_0 c_0^2$, $\mu = 0$. На поверхности цилиндра заданы условия

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R_1} = -p_0 e^{i\omega t}$$
$$\sigma_{rr}\big|_{r=R_2-0} = \sigma_{rr}\big|_{r=R_2+0}, \quad u_r\big|_{r=R_2-0} = u_r\big|_{r=R_2+0} \tag{3.3}$$

Разделяя переменные $u_r = U(r)\,e^{i\omega t}$ и исключая напряжения в (3.2), приходим к уравнению стационарных колебаний с краевыми условиями

$$LU + \rho\omega^2 U = 0, \qquad LU \equiv \frac{d}{dr}\left[(\lambda + 2\mu)\frac{dU}{dr} + \lambda\frac{U}{r}\right] + \frac{2\mu}{r}\left(\frac{dU}{dr} - \frac{U}{r}\right)$$
$$lU(R_1) = -p_0, \quad U(R_2 - 0) = U(R_2 + 0), \quad lU(R_2 - 0) = = lU(R_2 + 0) \tag{3.4}$$

Если еще потребовать, чтобы на бесконечности функция U удовлетворяла условиям излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\,|U| = \text{const}, \qquad \lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{dU}{dr} + i\frac{\omega}{c_0}U\right) = 0 \tag{3.5}$$

то краевая задача (3.4), (3.5) будет иметь единственное решение [9].

Для акустической среды функция

$$U = B\frac{d}{dr}H_0^{(2)}\left(\frac{\omega r}{c_0}\right) \tag{3.6}$$

удовлетворяет уравнению (3.4) при $r > R_2$ и условиям излучения (3.5). В (3.6) B — произвольная постоянная, $H_0^{(2)}$ — функция Ганкеля второго рода нулевого порядка. При этом

$$\sigma_{rr} = -\rho_0\omega^2 B H_0^{(2)}(\omega r/c_0)e^{i\omega t} \tag{3.7}$$

Тогда, исключая B в соотношениях (3.6), (3.7), задачу на полубесконечном интервале $R_1 \leqslant r < \infty$ можно свести к задаче на конечном интервале $R_1 \leqslant r \leqslant R_3$ для любого $R_3 \geqslant R_2$, определив на поверхности $r = R_3$ следующее краевое условие:

$$lU = -\rho_0\omega^2 H_0^{(2)}(\omega r/c_0)\left[\frac{dH_0^{(2)}}{dr}\left(\frac{\omega r}{c_0}\right)\right]^{-1} U \tag{3.8}$$

В соотношении (3.8) параметр ω входит мероморфно. Для высокочастотного диапазона, используя асимптотическое представление функции Ганкеля при больших аргументах

$$H_0^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{-i(z-\pi/4)}\left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

и, если необходимо, увеличивая величину R_3, можно заменить условие (3.8) приближенным соотношением

$$lU(R_3) = -i\omega\rho_0 c_0 U(R_3) \tag{3.9}$$

с линейно входящим параметром ω.

Корректность перехода от задачи (3.4), (3.8) к задаче (3.4), (3.9) связана с вопросом об устойчивости решения к малому возмущению на границе. Здесь воздержимся от обсуждения этого вопроса.

С формальной стороны условие (3.9) в исходной постановке эквивалентно условию контакта на поверхности $r = R_3$ с вязкой внешней средой: $\sigma_{rr} = -b\partial u_r/\partial t$, причем коэффициент вязкости b совпадает с волновым сопротивлением жидкости $\rho_0 c_0$.

Задачу с неоднородными краевыми условиями (3.4) всегда можно свести к задаче с однородными краевыми условиями, выполнив замену переменной U на переменную V по формуле $U = V + U_0$, где функция U_0 удовлетворяет краевым условиям

$$lU_0(R_1) = -p_0, \quad U(R_2) = 0, \quad lU(R_2) = 0$$

Далее считаем, что функция U_0 построена, тогда V — решение следующей краевой задачи:

$$\begin{gathered} LV + \rho\omega^2 V + f = 0, \quad f = LU_0 + \rho\omega^2 U_0 \\ (R_1 < r < R_3; \quad U_0 \equiv 0, \quad r > R_2) \\ lV(R_1) = 0, \quad V(R_2 - 0) = V(R_2 + 0) \\ lV(R_2 - 0) = lV(R_2 + 0), \quad lV(R_3) = -i\omega bV(R_3) \end{gathered} \tag{3.10}$$

Стационарной задаче (3.10) поставим в соответствие спектральную краевую задачу по параметру λ

$$\begin{gathered} Ly - \rho\lambda^2 y = 0, \quad R_1 < r < R_3 \\ ly(R_1) = 0, \quad y(R_2 - 0) = y(R_2 + 0) \\ ly(R_2 - 0) = ly(R_2 + 0), \quad ly(R_3) + \lambda by(R_3) = 0 \end{gathered} \tag{3.11}$$

Далее предполагаем, что решение V стационарной задачи (3.10) допускает двукратное разложение по собственным функциям y_k спектральной задачи (3.11)

$$V = \sum_k C_k y_k, \quad i\omega V = \sum_k C_k \lambda_k y_k \tag{3.12}$$

Строгое обоснование этого предположения удается получить лишь для однородного цилиндра и $R_3 = R_2$. В этом случае в соответствии с терминологией и результатами работы [10] задача (3.11) является усиленно регулярной, а система собственных и присоединенных функций задачи (2.12), линеаризующей задачу (3.11) по спектральному параметру, образует базис Рисса в пространстве $W_2^1(R_1, R_3) \times L_2(R_1, R_3)$.

Тогда, согласно утверждению 2.2, искомые коэффициенты в разложении (3.12) могут быть найдены по формуле

$$C_k = [(i\omega - \lambda_k)(y_k, y_k)_1]^{-1} \int_{R_1}^{R_2} f y_k r\, dr$$

где величина скалярного квадрата вычисляется с учетом осевой симметрии, исходя из определения первого соотношения (2.10)

$$(y_k, y_k)_1 = \int_{R_1}^{R_3} 2\rho\lambda_k y_k^2 r dr + b y_k^2(R_3) R_3$$

Аналогичным образом по решению спектральной задачи можно построить решение нестационарной задачи, как это сделано в разделе 1.

Авторы благодарят А. А. Шкаликова за консультации и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lysmer J., Kuhlemeyer R. L.* Finite dynamic model for infinite media // J. Eng. Mech. Div. proc. ASCE. 1969. V. 95. № 4. P. 859—877.
2. *Мирсаидов М.* Решение задачи Лэмба методом конечных элементов с использованием условий излучения // Механика деформируемого твердого тела. Томск: ТГУ, 1987. С. 126—131.
3. *Пашков И. А.* Об ортогональности собственных форм колебаний вязкоупругого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 104—111.
4. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.
5. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26. № 4. С. 15—41.

6. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1989. Вып. 14. С. 140—224.
7. *Москвитин В. В.* Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Физматгиз, 1972. 327 с.
8. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1972. 735 с.
10. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 190—229.

Москва

Поступила в редакцию
30.1.1991