Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 339.3 : 678.067

А. Л. Каламкаров, Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон

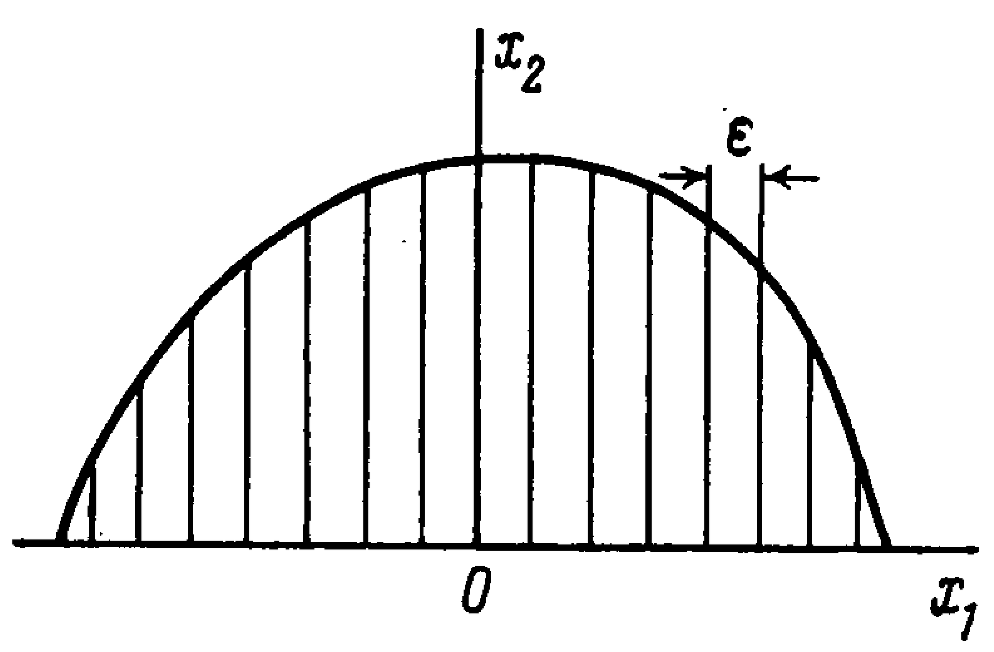
НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

На примере эллиптического уравнения для слоистого регулярно неоднородного (композиционного) материала предлагаются новые интегральные преобразования, которые позволяют получить решения краевых задач в квадратурах и не требуют решения каких-либо погранслойных задач. Указанные интегральные преобразования используются при решении простых краевых задач для слоистого композита и для получения фундаментального решения эллиптического уравнения в бесконечной двумерной слоистой среде.

Сложность решения краевых задач для сильно неоднородных (композиционных) материалов связана с быстрой осцилляцией коэффициентов соответствующих уравнений. Для материалов с периодической структурой эти коэффициенты являются периодическими функциями. Если при этом период мал по сравнению с характерными размерами задачи, то может быть применен асимптотический метод осреднения [1—3]. Он позволяет получить асимптотически правильное приближение к точному решению задачи (при малом значении периода структуры ε) на основании решения осредненной задачи для однородного (гомогенизированного) материала и так называемых локальных задач на ячейке периодичности. Вдали от границ области метод осреднения дает хорошее приближение к точному решению уже в нулевом приближении (см. [1, 2]). Однако вблизи границы области (т. е. на расстоянии, соизмеримом с ε) решение задачи методом осреднения сильно осложняется.

При помощи метода пограничного слоя [1] может быть найдено асимптотическое решение задачи вблизи границы области (см. также [4]). Метод пограничного слоя применялся [5, 6] к решению задачи о макротрещине в композиционном материале периодического строения. Следует, однако, отметить, что при использовании этого метода возникает необходимость решения погранслойных задач (см. [1, 4—6]), которые значительно сложнее локальных задач. Например, в наиболее простом случае слоистого композиционного материала локальные задачи решаются точно [1, 2], но погранслойные задачи могут быть решены только численно (см. [6]).

1. Рассмотрим следующую краевую задачу для слоистого композита периодической структуры, заданную на верхней полуплоскости $x_2 > 0$ (см. фигуру):



$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda_1^{(\varepsilon)}(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)+\lambda_2^{(\varepsilon)}(x_1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=0 \tag{1.1}$$

$$u\,|_{x_2=0}=g(x_1) \tag{1.2}$$

Вместо условия Дирихле (1.2) при $x_2=0$ может быть задано условие Неймана

$$\lambda_2^{(\varepsilon)}(x_1)\,\partial u/\partial x_2\,|_{x_2=0}=-q(x_1) \tag{1.3}$$

При этом должно выполняться равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(x_1)\, dx_1 = 0.$$

Пусть коэффициенты уравнения (1.1) быстро осциллирующие ε-периодические функции от x_1 ($\varepsilon \ll 1$). Обозначим

$$\lambda_\alpha^{(\varepsilon)}(x_1) = \lambda_\alpha(y), \quad y = x_1/\varepsilon, \quad \alpha = 1, 2$$

где $\lambda_\alpha(y)$ — однопериодические функции от y. Будем далее считать, что $\lambda_\alpha(y)$ — кусочно-гладкие функции, терпящие разрывы первого рода на одной (или нескольких) линиях контакта разнородных компонентов композиционного материала, причем в точках разрывов коэффициентов выполняются условия сопряжения, отвечающие идеальному контакту,

$$[u] = 0, \quad [\lambda_1 \partial u/\partial x_1] = 0 \tag{1.4}$$

Поставленные задачи моделируют стационарное распределение температуры или антиплоское упругое напряженно-деформированное состояние слоистого композиционного материала периодической структуры.

2. Для аналитического решения сформулированных задач рассмотрим вспомогательную задачу о разложении кусочно-гладкой функции $f(x)$ по решениям уравнения

$$(A^{(\varepsilon)}(x)\, z')' + \mu^2 \rho^{(\varepsilon)}(x)\, z = 0, \quad 0 < x < \infty \tag{2.1}$$

$$A^{(\varepsilon)}(x) = A(y), \quad \rho^{(\varepsilon)}(x) = \rho(y)$$

где $y = x/\varepsilon$, $A(y)$, $\rho(y)$ — однопериодические кусочно-гладкие функции от y; штрихом обозначена производная по x.

Для решения вспомогательной задачи используем метод, предложенный в [7], и рассмотрим задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A^{(\varepsilon)}(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho^{(\varepsilon)}(x)\frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$u\,|_{t=0} = f(x) \tag{2.3}$$

Воспользуемся преобразованием Лапласа

$$z(x, p) = \int_0^\infty u(x, t)\, e^{-pt}\, dt \tag{2.4}$$

и из (2.2), (2.3), получим

$$(A^{(\varepsilon)}(x)\, z')' - p\rho^{(\varepsilon)}(x)\, z = -\rho^{(\varepsilon)}(x)\, f(x), \quad 0 < x < \infty \tag{2.5}$$

Решение однородного уравнения с однопериодическими коэффициентами

$$(A(y)\, z')' - p\rho(y)\, z = 0 \tag{2.6}$$

будем искать в форме двухмасштабного асимптотического разложения [1—3]

$$z = z_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(x, y) \tag{2.7}$$

где $z_k(x, y)$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) — однопериодические функции от y. В результате применения процедуры асимптотического метода осреднения [1—3] может быть доказана следующая

Лемма 1. Полное асимптотическое разложение (2.7) для решения уравнения (2.6) имеет вид

$$z = z_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k N_k(y) \frac{d^k z_0(x)}{dx^k} \tag{2.8}$$

где $z_0(x)$ — решение уравнения

$$z_0''(x) - p\varkappa^2 z_0(x) = 0, \quad \varkappa^2 = \langle A^{-1}\rangle \langle\rho\rangle \tag{2.9}$$

а $N_k(y)$ — однопериодические по y решения рекуррентной цепочки локальных задач

$$\frac{d}{dy}\left(A(y)\frac{dN_k(y)}{dy}\right) = -\frac{d}{dy}(A(y)N_{k-1}(y)) -$$

$$- A(y)\frac{dN_{k-1}(y)}{dy} - A(y)N_{k-2}(y) + \varkappa^{-2}N_{k-2}(y)\rho(y), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.10}$$

$$N_{-1}(y) \equiv 0, \quad N_0(y) \equiv 1$$

с условиями сопряжения в точках разрыва функций $A(y)$, $\rho(y)$:

$$[N_k] = 0, \quad [A(dN_k/dy + N_{k-1})] = 0 \tag{2.11}$$

При этом все функции $N_k(y)$ определяются из решения задач (2.10), (2.11) с точностью до постоянных слагаемых $N_{k0} = N_k(0)$, которые могут быть фиксированы при помощи некоторых дополнительных условий, накладываемых на функции $N_k(y)$.

Обоснование правильности полученного асимптотического разложения (2.8) для решения уравнения (2.6) проводится по стандартной методике [1]. Обозначим через $z^{(m)}$ частичную сумму ряда (2.8)

$$z^{(m)} = \sum_{k=0}^{m+1} \varepsilon^k N_k(y)\frac{d^k z_0}{dx^k}$$

Подставляя $z^{(m)}$ в уравнение (2.6) и учитывая соотношения (2.9), (2.10), получим следующее выражение для погрешности:

$$P(z - z^{(m)}) = \varepsilon^m (AN'_{m+2})' \frac{d^{m+2}z_0}{dx^{m+2}} +$$

$$+ \varepsilon^{m+1}[(AN'_{m+3} + AN_{m+2})' + AN'_{m+2}]\frac{d^{m+3}z_0}{dx^{m+3}}$$

Здесь P — оператор левой части уравнения (2.6), штрихом обозначена обыкновенная производная по y.

В случае гладких коэффициентов уравнения (2.6) и совпадающих граничных условий для решений $z(x)$ и $z_0(x)$ на некотором отрезке $[0, l]$ (что обеспечивается за счет выбора постоянных слагаемых N_{k0}) на основании обобщенного принципа максимума для решений дифференциальных уравнений следует оценка

$$\| z - z^{(m)} \|_{C[0,l]} = O(\varepsilon^m)$$

При решении задачи с кусочно-гладкими коэффициентами уравнения (2.6) с условиями сопряжения вида (1.4) и соответствующих условий сопряжения (2.11) в формулировке локальных задач к процедуре доказательства правильности асимптотического разложения (2.8) добавляется проверка того, что асимптотическое решение $z^{(m)}$ удовлетворяет условиям сопряжения с достаточно высокой степенью точности по ε. Эта проверка проводится аналогично изложенному в [1] (с. 49—52).

Отметим, что осреднение в (2.9) и далее производится по правилу

$$\langle\rho\rangle = \int_0^1 \rho(y)\,dy.$$

Переходя к определению решения неоднородного уравнения (2.5), выберем в качестве линейно независимых частных решений уравнения (2.9) функции

$$z_0^{(1)}(x, p) = \operatorname{ch}(\sqrt{p}\varkappa x),\ z_0^{(2)}(x, p) = e^{\sqrt{p}\varkappa x} \tag{2.12}$$

Тогда справедлива

Лемма 2. Если в качестве линейно независимых частных решений уравнения (2.9) выбрать функции (2.12), то из (2.8) получим следующие линейно независимые решения уравнения (2.6):

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p^k \varkappa^{2k} N_{2k}(y)\Big) \operatorname{ch}(\sqrt{p}\varkappa x) + \\ &+ \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k+1} p^{k+1/2} \varkappa^{2k+1} N_{2k+1}(y)\Big) \operatorname{sh}(\sqrt{p}\varkappa x) \\ z^{(2)} &= \Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \varepsilon^k p^{k/2} \varkappa^k N_k(y)\Big) e^{-\sqrt{p}\varkappa x} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для определителя Вронского имеет место формула

$$W(z^{(1)}, z^{(2)}) = -\frac{\varkappa\sqrt{p}}{A(y)}\Big(\frac{1}{\langle A^{-1}\rangle} + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{2m} p^m \varkappa^{2m} d_m\Big) \tag{2.14}$$

где d_m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ — постоянные числа, для которых справедливы выражения

$$d_m = A(y)\left\{\sum_{n=0}^{m} N_{2m-2n}\Big(\frac{dN_{2n+1}}{dy} + N_{2n}\Big) - \sum_{n=0}^{m-1} N_{2m-2n-1}\Big(\frac{dN_{2n+2}}{dy} + N_{2n+1}\Big)\right\} \tag{2.15}$$

В частности, можно указать такой способ выбора постоянных N_{k0}, при котором

$$d_m = 0\ (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.16}$$

и в этом случае вместо (2.14) имеем простую формулу

$$W(z^{(1)}, z^{(2)}) = -\varkappa\sqrt{p}/(A(y)\langle A^{-1}\rangle) \tag{2.17}$$

Отметим, что из соотношений (2.15), (2.16) однозначно определяются постоянные N_{k0} и тем самым эти условиях в добавление к формулировкам локальных задач (2.10), (2.11) однозначно определяют функции $N_k(y)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

При учете леммы 2 общее решение неоднородного уравнения (2.5) может быть записано в виде

$$z(x, p) = \frac{\langle A^{-1}\rangle}{\varkappa}\int_0^{\infty} \rho^{(\varepsilon)}(\xi) f(\xi) G(x, \xi, p)\, d\xi \tag{2.18}$$

$$G(x, \xi, p) = \begin{cases} z^{(2)}(x, p)\, z^{(1)}(\xi, p)\, p^{-1/2}, & \xi < x \\ z^{(1)}(x, p)\, z^{(2)}(\xi, p)\, p^{-1/2}, & \xi > x \end{cases}$$

Выполняя в (2.18) переход к оригиналу, учитывая (2.13), после некоторых преобразований и подстановки $t = 0$ в соответствии с (2.3) получим доказательство следующей теоремы, которая содержит решение задачи о разложении функции по решениям уравнения (2.1).

Теорема 1. Для любой кусочно-гладкой функции справедливо следующее интегральное преобразование:

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty z_c^{(\varepsilon)}(x,\mu)F_c(\mu)\,d\mu \tag{2.19}$$

Здесь

$$F_c(\mu)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\langle A^{-1}\rangle}{\langle\rho\rangle}\right)^{1/2}\int_0^\infty \rho^{(\varepsilon)}(\xi)f(\xi)z_c^{(\varepsilon)}(\xi,\mu)\,d\xi \tag{2.20}$$

$$z_c^{(\varepsilon)}(x,\mu)=\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k N_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^k}{dx^k}\right]\cos(\varkappa\mu x) \tag{2.21}$$

$N_k(x/\varepsilon)$ — однопериодические по $y=x/\varepsilon$ решения рекуррентной цепочки локальных задач (2.10), (2.11) с условиями (2.15), (2.16), определяющими постоянные N_{k0}. При этом функция $z_c^{(\varepsilon)}(x,\mu)$ является решением уравнения (2.1).

Замечание 1. Локальные задачи (2.10), (2.11) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения и могут быть решены в квадратурах. В частности,

$$N_1(y)=-y+\frac{1}{\langle A^{-1}\rangle}\int_0^y A^{-1}(\xi)\,d\xi+N_{10}$$

$$N_2(y)=-y^2/2+y/2+(1/2+N_{10}-y)(N_1(y)-N_{10})-$$

$$-\varkappa^{-2}\left\{(N_1(y)-N_{10}+y)\left(\int_0^1 A^{-1}(\eta)\,d\eta\int_0^\eta\rho(\xi)\,d\xi\right)-\int_0^y A^{-1}(\eta)\,d\eta\int_0^\eta\rho(\xi)\,d\xi\right\}+N_{20}$$

Замечание 2. Условия (2.15), (2.16) можно представить в виде рекуррентной системы алгебраических уравнений относительно постоянных N_{k0} $(k=1,2,3,\ldots)$:

$$\begin{aligned}
d_1&=N_{20}C_1+C_3-N_{10}C_2=0\\
d_2&=N_{40}C_1+N_{20}C_3+C_5-N_{30}C_2-N_{10}C_4=0\\
d_3&=N_{60}C_1+N_{40}C_3+N_{20}C_5+C_7-N_{50}C_2-N_{30}C_4-N_{10}C_6=0,\ \ldots
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Здесь

$$C_k=(A\,dN_k/dy+AN_{k-1})|_{y=0}$$

В частности, можно полагать

$$N_{20}=N_{40}=N_{60}=\ldots=0 \tag{2.23}$$

а N_{10}, N_{30}, ... определять из равенств

$$N_{10}=C_3/C_2,\quad N_{30}=C_5/C_2-C_3C_4/C_2^2 \tag{2.24}$$

$$N_{50}=C_7/C_2-C_4C_5/C_2^2+C_3C_4^2/C_2^3-C_3C_6/C_2^2,\ \ldots$$

В этом случае из (2.21) получим

$$z_c^{(\varepsilon)}(x,\mu)|_{x=0}=1 \tag{2.25}$$

Замечание 3. В предельном частном случае постояных значений коэффициентов уравнения (2.1)

$$A^{(\varepsilon)}(x)=A=\text{const},\quad \rho^{(\varepsilon)}(x)=\rho=\text{const}$$

уравнения (2.6) и (2.9) совпадают и, решая локальные задачи (2.10) при условиях (2.15), (2.16), получим

$$N_k(y)\equiv 0,\quad k=1,2,3,\ \ldots \tag{2.26}$$

Из (2.21) следует

$$z_c^{(\varepsilon)}(x,\mu)=\cos(\varkappa\mu x)$$

и если $A = \rho$ (соответственно $\varkappa = 1$), то интегральное преобразование (2.19), (2.20) сводится к косинус-преобразованию Фурье. Таким образом, преобразование (2.19)—(2.21) является обобщением косинус-преобразования Фурье на случай быстро осциллирующих ε-периодических коэффициентов уравнения (2.1).

3. Для получения аналога синус-преобразования Фурье выберем в качестве линейно независимых частных решений уравнения (2.9) функции

$$z_0^{(1)}(x,\ p) = \operatorname{sh}(\sqrt{p}\varkappa x),\quad z_0^{(2)}(x,\ p) = e^{-\sqrt{p}\varkappa x} \tag{3.1}$$

В этом случае может быть доказана

Теорема 2. Для любой кусочно-гладкой функции $f(x)$ справедливо следующее интегральное преобразование:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty z_s^{(\varepsilon)}(x, \mu)\, F_s(\mu)\, d\mu \tag{3.2}$$

$$F_s(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\langle A^{-1}\rangle}{\langle\rho\rangle}\right)^{1/2}\int_0^\infty \rho^{(\varepsilon)}(\xi) f(\xi)\, z_s^{(\varepsilon)}(\xi, \mu)\, d\xi \tag{3.3}$$

$$z_s^{(\varepsilon)}(x, \mu) = \left[1 + \sum_{k=1}^\infty \varepsilon^k N_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{d^k}{dx^k}\right]\sin(\varkappa\mu x) \tag{3.4}$$

Здесь $N_k(x/\varepsilon)$ — однопериодические по $y = x/\varepsilon$ решения рекуррентной цепочки локальных задач (2.10), (2.11) с условиями (2.15), (2.16), определяющими постоянные N_{k0}. При этом функция $z_s^{(\varepsilon)}(x,\ \mu)$ — решение уравнения (2.1).

Замечание 4. При решении алгебраических уравнений (2.22) вместо (2.23), (2.24) можно полагать

$$N_{10} = N_{30} = N_{50} = \ldots = 0$$

а $N_{20}, N_{40}, \ldots$ определять из равенств

$$N_{20} = -C_3/C_1,\quad N_{40} = C_3^2/C_1^2 - C_5/C_1,\ \ldots$$

В этом случае из (3.4) получим

$$z_s^{(\varepsilon)}(x, \mu)_{x=0} = 0 \tag{3.5}$$

Замечание 5. В предельном частном случае

$$A^{(\varepsilon)}(x) = \rho^{(\varepsilon)}(x) = \text{const}$$

аналогично замечанию 4 получим, что преобразование (3.2)—(3.4) сводится к синус-преобразованию Фурье.

4. Применим теперь построенные новые интегральные преобразования к решению задачи (1.1), (1.4) при условии (1.2) на границе полуплоскости. Пользуясь интегральным преобразованием (2.19), решение будем искать в виде

$$u = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty z_c^{(\varepsilon)}(x_1, \mu)\, U_c(x_2, \mu)\, d\mu \tag{4.1}$$

где $z_c^{(\varepsilon)}(x_1,\ \mu)$ — решение уравнения (2.1) при

$$A^{(\varepsilon)}(x) = \lambda_1(y),\quad \rho^{(\varepsilon)}(x) = \lambda_2(y) \tag{4.2}$$

Подставляя (4.1) в уравнение (1.1) и учитывая (2.1), (4.2), получим уравнение относительно функции $U_c(x_2,\ \mu)$

$$\partial^2 U_c(x_2,\ \mu)/\partial x_2^2 - \mu^2 U_c(x_2,\ \mu) = 0 \tag{4.3}$$

Ограниченное по x_2 решение уравнения (4.3) записывается в виде

$$U_c(x_2,\ \mu) = C(\mu)\, e^{-\mu x_2} \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.1) при $x_2 = 0$ в соответствии с условием (1.2) получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty z_c^{(\varepsilon)}(x_1, \mu) C(\mu) d\mu = g(x_1) \tag{4.5}$$

Применяя к (4.5) обратное преобразование (2.20), найдем

$$C(\mu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\langle\lambda_1^{-1}\rangle}{\langle\lambda_2\rangle}\right)^{1/2} \int_0^\infty \lambda_2^{(\varepsilon)}(\xi) g(\xi) z_c^{(\varepsilon)}(\xi, \mu) d\xi \tag{4.6}$$

Подставляя соотношения (4.4), (4.6) в (4.1), получим искомое решение в квадратурах

$$u(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\langle\lambda_1^{-1}\rangle}{\langle\lambda_2\rangle}\right)^{1/2} \int_0^\infty z_c^{(\varepsilon)}(x_1, \mu) e^{-\mu x_2} d\mu \int_0^\infty \lambda_2^{(\varepsilon)}(\xi) g(\xi) z_c^{(\varepsilon)}(\xi, \mu) d\xi$$

Аналогично решаются задачи (1.1), (1.4) при условии (1.3). В этом случае имеем

$$u(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\langle\lambda_1^{-1}\rangle}{\langle\lambda_2\rangle}\right)^{1/2} \int_0^\infty z_c^{(\varepsilon)}(x_1, \mu) e^{-\mu x_2}/\mu \, d\mu \int_0^\infty q(x_1) z_c^{(\varepsilon)}(\xi, \mu) d\mu$$

Отметим, что разработанный метод может также применяться в краевых задачах со смешанными условиями на границе области.

5. Найдем фундаментальное решение уравнения (1.1) в случае

$$\lambda_1^{(\varepsilon)}(x_1) = \lambda_2^{(\varepsilon)}(x_1) = \lambda(y)$$

т. е. получим при помощи интегральных преобразований (2.19)—(2.21) решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\lambda(y) \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \lambda(y) \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \delta(x_1)\delta(x_2) \tag{5.1}$$

Это решение будем искать в виде

$$u = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty U(x_2, \mu) z_c^{(\varepsilon)}(x_1, \mu) d\mu \tag{5.2}$$

подставляя в (2.1), (2.20) $A^{(\varepsilon)}(x_1) = \rho^{(\varepsilon)}(x_1) = \lambda(y)$.

При учете (2.19), (2.20) и (2.25) получим следующее представление для δ-функции:

$$\lambda^{-1}(y)\delta(x_1) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\langle\lambda^{-1}\rangle}{\langle\lambda\rangle}\right)^{1/2} \int_0^\infty z_c^{(\varepsilon)}(x_1, \mu) d\mu \tag{5.3}$$

Подставляя (5.2), (5.3) в (5.1), находим

$$\frac{\partial^2 U(x_2, \mu)}{\partial x_2^2} - \mu^2 U(x_2, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\langle\lambda^{-1}\rangle}{\langle\lambda\rangle}\right)^{1/2} \delta(x_2) \tag{5.4}$$

Решение уравнения (5.4) имеет вид

$$U(x_2, \mu) = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\langle\lambda^{-1}\rangle}{\langle\lambda\rangle}\right)^{1/2} \frac{e^{-\mu|x_2|}}{\mu} \tag{5.5}$$

и тогда

$$u = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\langle\lambda^{-1}\rangle}{\langle\lambda\rangle}\right)^{1/2} \int_0^\infty z_c^{(\varepsilon)}(x_1, \mu) \frac{e^{-\mu|x_2|}}{\mu} d\mu$$

При учете представления (2.21) последнее выражение можно записать в виде

$$u = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\langle\lambda^{-1}\rangle}{\langle\lambda\rangle}\right)^{1/2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k N_k(x_1/\varepsilon)\frac{\partial^k}{\partial x_1{}^k}\right]\int_0^{\infty}\frac{e^{-\mu|x_2|}}{\mu}\cos(\varkappa\mu x_1)\,d\mu$$

Так как

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\mu|x_2|}}{\mu}\cos(\varkappa\mu x_1)\,d\mu = -\ln\left(\sqrt{x_2{}^2+\varkappa^2 x_1{}^2}\right),$$

то фундаментальное решение уравнения (5.1) будет следующим:

$$u = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\langle\lambda^{-1}\rangle}{\langle\lambda\rangle}\right)^{1/2}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k N_k(x_1/\varepsilon)\frac{\partial^k}{\partial x_1{}^k}\right]\ln\left(\sqrt{x_2{}^2+\varkappa^2 x_1{}^2}\right) \qquad (5.6)$$

В предельном частном случае $\lambda(y) \equiv 1$ при учете (2.26) из формулы (5.6) следует известное выражение для фундаментального решения двумерного уравнения Лапласа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
3. *Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Асимптотический метод осреднения в механике композитов регулярной структуры // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 19. С. 78—147.
4. *Sanchez-Palencia E.* Boundary layers and edge effects in composites // Lect. Notes in Physics. Berlin: Springer, 1987. V. 272. P. 121—192.
5. *Каламкаров А. Л., Кудрявцев Б. А., Партон В. З.* Метод пограничного слоя в механике разрушения композитов периодической структуры // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 322—328.
6. *Партон В. З., Каламкаров А. Л., Борисковский В. Г.* К исследованию локальных полей в окрестности макротрещины в композиционном материале периодической структуры // Физ.-хим. механика материалов. 1990. № 1. С. 3—9.
7. *Уфлянд Я. С.* О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики // Вопросы математической физики. Л.: Наука, 1976. С. 93—106.

Москва

Поступила в редакцию
20.XI.1990