Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 539.3

М. Д. Коваленко

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматривается первая основная краевая задача теории упругости для прямоугольной полубесконечной полосы со свободными от напряжений продольными сторонами. Методом разделения переменных решение задачи сводится к проблеме разложения двух заданных на отрезке (торце полуполосы) функций в ряды по однородным решениям. Доказывается полнота в L_2 систем однородных решений на интервале вещественной оси. Построены системы функций, биортогональные к системам однородных решений на некотором контуре, лежащем на римановой поверхности логарифма. Такое понятие биортогональности является естественным обобщением понятия биортогональности на отрезке. При помощи построенных биортогональных систем функций удается найти явные выражения для коэффициентов искомых разложений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим решение первой основной задачи теории упругости в полуполосе ($|y| \leqslant 1$, $0 \leqslant x < \infty$). Будем считать, что продольные стороны полуполосы не нагружены

$$\sigma_y(x, \pm 1) = \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0 \tag{1.1}$$

а на торце $\{x = 0,\ y \in (-1, 1)\}$ заданы напряжения

$$\sigma_x(y) = \alpha(y),\ \tau_{xy}(y) = \beta(y),\ y \in (-1, 1) \tag{1.2}$$

Ограничимся случаем симметричной деформации полуполосы. Тогда в классе решений, затухающих на бесконечности ($x \to \infty$):

$$\int_{-1}^{1} \alpha(y)\, dy = 0$$

Методом разделения переменных [1] рассматриваемая краевая задача приводится к разложениям

$$\alpha(y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\,(a_k \lambda_k \sigma_k(y))$$

$$\beta(y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2\,\mathrm{Re}\,(a_k \lambda_k^2 \tau_k(y)), \quad y \in (-1, 1), \quad a_k \in C \tag{1.3}$$

в которых функции

$$\sigma_k(y) = (\sin\lambda_k - \lambda_k \cos\lambda_k)\cos\lambda_k y - \lambda_k y \sin\lambda_k \sin\lambda_k y \tag{1.4}$$
$$\tau_k(y) = \cos\lambda_k \sin\lambda_k y - y \sin\lambda_k \cos\lambda_k y$$

Числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$ — все комплексные нули целой функции

$$L(\lambda) = \lambda + \sin\lambda\cos\lambda \tag{1.5}$$

Существуют многочисленные приближенные методы определения неизвестных $\{a_k, \bar{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ на основе разложений (1.3). Обзор этих методов можно найти в [2, 3].

В этой статье будут построены системы функций $\{\psi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^{\infty}$, биортогональные на некотором контуре T, лежащем в области комплексного переменного $\omega = x + iy$, соответственно к системам

$\{\sigma_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\tau_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$. Функции $\sigma_k(\omega)$ и $\tau_k(\omega)$ $(k \geqslant 1)$ — некоторые продолжения функций $\sigma_k(y)$ и $\tau_k(y)$ в область ω. При помощи биортогональных систем функций удается найти явные выражения для коэффициентов a_k, $\bar{a}_k$ разложений (1.3). Эти разложения называются в дальнейшем биортогональными.

2. Полнота систем вещественных подпространств $\{\mathrm{Re}\,(a_k\sigma_k(y))\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mathrm{Re}\,(a_k\tau_k(y))\}_{k=1}^{\infty}$. Дадим простое доказательство полноты системы $\{\mathrm{Re}\,(a_k\tau_k(y))\}_{k=1}^{\infty}$ в $L_2(-1, 1)$. Ранее вопросы полноты систем функций, аналогичных (1.4), другими средствами изучались, например в [4, 5].

Отметим основные свойства функции $L(\lambda)$, определяемой выражением (1.5). Эти свойства легко устанавливаются, например, на основании известных результатов [6]. Функция $L(\lambda)$ — целая, вполне регулярного роста, экспоненциального типа, равного 2. Индикаторная диаграмма $L(\lambda)$ — отрезок мнимой оси $[-2, 2]$. Ее нули имеют асимптотику.

$$\lambda_k \sim \pm\left(k\pi - \frac{\pi}{4}\right) \pm \frac{i}{2}\ln 4k\pi \; (k \to \infty)$$

Теорема 1. Система вещественных подпространств $\{\mathrm{Re}\,(a_k\tau_k(y))\}_{k=1}^{\infty}$ $(a_k \in C)$ полна в $L_2(-1, 1)$.

Доказательство. Обозначим $\tau(\lambda, y)$, $\lambda \in C$, $\mathrm{supp}\,\tau(\lambda, y) \in [-1, 1]$ — функция, порождающая систему $\{\tau_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ при $\lambda \in \Lambda$; $a(\lambda)$ — произвольная функция, такая, что $a_k = a(\lambda_k)$. Покажем вначале, что $\tau(\lambda, y)$ — замкнутое в $L_2(-1, 1)$ ядро, т. е. что не существует не эквивалентной нулю финитной функции $\chi(y) \in L_2(-1, 1)$ со свойством

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{Re}\,(a(\lambda)\,\tau(\lambda, y))\,\chi(y)\,dy = 0, \quad \lambda \in C \tag{2.1}$$

В силу произвольности $a(\lambda)$ это возможно, если

$$\int_{-1}^{1} \tau(\lambda, y)\,\chi(y)\,dy = 0, \lambda \in C \tag{2.2}$$

Решая уравнение (2.2), находим $\chi(y) = c\,[\delta(y + 1) - \delta(y - 1)]$ (c — произвольная постоянная, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция), так что $\tau(\lambda, y)$, а значит, и $\mathrm{Re}\,(a(\lambda)\,\tau(\lambda, y))$ — замкнутое в $L_2(-1, 1)$ ядро.

Пусть $\xi(y)$ ($\mathrm{supp}\,\xi(y) \in (-\gamma, \gamma)$, $0 < \gamma < 1$) — финитная функция из $L_2(-\gamma, \gamma)$, для которой выполняются равенства

$$\int_{-\gamma}^{\gamma} \mathrm{Re}\,(a_k\tau_k(y))\,\xi(y)\,dy = 0, \quad k \geqslant 1 \tag{2.3}$$

Образуем функцию

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \mathrm{Re}\,(a(\lambda)\,\tau(\lambda, y)\,\xi(y)\,dy, \quad \lambda \in C \tag{2.4}$$

Согласно (2.3), $\Phi(\lambda_k) = 0$ $(k \geqslant 1)$. Отсюда

$$P(\lambda_k) = \int_{-\gamma}^{\gamma} \tau_k(y)\,\xi(y)\,dy = 0, \quad k \geqslant 1 \tag{2.5}$$

Из равенств (2.5) вытекает, что целая функция $P(\lambda)$ имеет тип не ниже, чем 2 (так как ее нулями являются по крайней мере все комплексные нули функции $L(\lambda)$, тип которой равен 2).

С другой стороны, по теореме Пэли — Винера [7], тип целой функции $P(\lambda)$ не выше, чем $1+\gamma$. В силу теоремы единственности [6, 8], получаем $P(\lambda)\equiv 0$ при $\gamma<1$. А поскольку $\mathrm{Re}\,(a(\lambda)\,\tau(\lambda, y))$ — замкнутое ядро в $L_2(-1, 1)$, то по известному критерию полноты [8], система подпространств $\{\mathrm{Re}\,(a_k\tau_k(y))\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2(-1, 1)$.

Аналогично доказывается полнота системы подпространств $\{\mathrm{Re}\,(a_k\sigma_k\cdot(y))\}_{k=1}^{\infty}$.

Замечание. Полнота систем вещественных подпространств $\{\mathrm{Re}\,(a_k\sigma_k\cdot(y))\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mathrm{Re}\,(a_k\tau_k(y))\}_{k=1}^{\infty}$ равносильна двукратной полноте систем функций $\{\mathrm{Re}\,\sigma_k(y),\ \mathrm{Im}\,\sigma_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\mathrm{Re}\,\tau_k(y),\ \mathrm{Im}\,\tau_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$.

3. Обобщенное преобразование Бореля на римановой поверхности логарифма. Пусть $G(z)$ — квазицелая функция, т. е. [9, 10] однозначная аналитическая функция, определенная на римановой поверхности логарифма $K(z)=\{z=\lambda+i\zeta,\ |\arg z|<\infty,\ 0<|z|<\infty\}$. Следуя [10], будем говорить, что квазицелая (целая) функция принадлежит классу $\{1, a\}$, если она экспоненциального типа $\leqslant a$. Кроме того, по аналогии с целыми функциями [7], квазицелую функцию $G(z)\in\{1, 1\}$ отнесем к классу W, если ее действительная часть не более чем степенного роста на всей вещественной оси и суммируемая с квадратом на вещественной полуоси R^+.

Допустим, что квазицелая функция $G(z)\in W$. Пусть $g(\omega)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $G(z)$. Согласно [9]:

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C g(\omega)\,e^{z\omega}d\omega,\quad \mathrm{Re}\,z>0 \tag{3.1}$$

где C — контур, лежащий в области $\Omega=\{\omega=x+iy,\ |\arg\omega|\leqslant\pi,\ 0<|\omega|<\infty\}$ на римановой поверхности $K(\omega)=\{\omega=x+iy,\ |\arg\omega|<\infty,\ 0<|\omega|<\infty\}$. Контур C образован лучами $\{L^{\pm}: re^{\pm i\pi},\ r>1+\eta,\ \eta>0\}$ и дугой окружности $\{C_{1+\eta}: |\omega|=(1+\eta)\,e^{i\arg\omega},\ |\arg\omega|\leqslant\pi\}$. Можно показать, что если функция $G(z)\in W$, то дуга $C_{1+\eta}$ может быть стянута в прямоугольный контур Π, охватывающий отрезок $[-1, 1]$ мнимой оси и составленный из вертикальных отрезков $\{l: x=\varepsilon,\ y\in[-1-\eta,\ 1+\eta]\}$, $\{l^+: x=-\varepsilon,\ y\in[0,\ 1+\eta]\}$, $\{l^-: x=-\varepsilon,\ y\in[-1-\eta,\ 0]\}$ и горизонтальных отрезков $\{y=\pm\eta,\ x\in[-\varepsilon,\ \varepsilon]\}$. Аналог этого утверждения содержится в доказательстве Планшереля — Полиа теоремы Пэли — Винера [6]. Контур, образованный лучами $L^{\pm}$ и прямоугольником Π, обозначим через T.

Пусть $f(y)$ — произвольная финитная функция из $L_2(\Gamma)$ с носителем на $\{\Gamma: y\in(-1, 1)\}$. По теореме Пэли — Винера ее преобразование Фурье $F[f](\xi)\in W$ [7].

Пусть $f(\omega)$ $(\omega=x+iy)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $F[f]$. Согласно [6, 8]:

$$f(\omega)=\int\limits_0^{\infty}F[f](\xi)\,e^{-\xi\omega}\,d\xi,\quad \xi=te^{-i\theta},\quad t\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \tag{3.2}$$

причем интеграл существует в полуплоскости $\mathrm{Re}\,(\omega e^{-i\theta})>h(-\theta)$, где $h(-\theta)$ — индикатриса роста функции $F[f]$. Все особенности функции $f(\omega)$ расположены на отрезке $\overline{\Gamma}$ мнимой оси. Таким образом, при помощи формулы (3.2) финитной функции $f(y)\in L_2(\Gamma)$ ставится в соответствие функция $f(\omega)$, аналитическая в области $\omega\setminus\overline{\Gamma}$.

Примем $f(y)=\eta(y)\cos\lambda y$, где $\eta(y)$ — характеристическая функция Г [1]. Функцию, ассоциированную по Борелю с целой $F[\eta(y)\cos\lambda y](\xi)$, обозначим $C(\lambda, \omega)$.

Из представления Коши [11]

$$C(\lambda, \omega) = \int_{\Gamma} \frac{\cos \lambda y}{iy - \omega}\, dy, \quad \omega \in \Omega \setminus \overline{\Gamma}, \quad \lambda \in C \tag{3.3}$$

и теоремы Пэли — Винера следует, что $C(\lambda, \omega)$ — целая функция параметра λ из класса W. Очевидно также, что $C(\lambda, \infty) = 0$.

Предложение 1. Пусть $g(\omega)$ — функция, аналитическая на римановой поверхности логарифма $K(\omega)$, все листы которой разрезаны по отрезкам $[-1, 1]$ мнимой оси и $g(\infty) = 0$. Если, кроме того,

$$g(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\pi i}[g(iy + \varepsilon) - g(iy - \varepsilon)] \in L_2(\Gamma)$$

то функция

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{T} g(\omega)\, C(z, \omega)\, d\omega \tag{3.4}$$

голоморфна в области $Z = \{z = \lambda + i\zeta, \mid \arg z \mid \leqslant \pi, 0 < \mid z \mid < \infty\}$. Аналитическое продолжение $G(z)$ на $K(z)$ — квазицелая функция из класса W.

Доказательство. Наметим доказательство. Существование интеграла (3.4) очевидно. Из представления (3.3) для $C(z, \omega)$ следует, что функция $G(z)$ существует в области Z вместе со всеми производными, т. е. она аналитическая в Z. А так как $C(z, \omega) \in \{1, 1\}$ и интеграл (3.4) абсолютно сходится, то $G(z) \in \{1, 1\}$.

Покажем, что функция $G(z)$ — суммируемая с квадратом на вещественной полуоси R^+. Стянем контур П к отрезку мнимой оси $\overline{\Gamma}$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi} C(z, \omega)\, g(\omega)\, d\omega = \int_{\Gamma} g(y) \cos zy\, dy \tag{3.5}$$

Учитывая, что $g(y) \in L_2(\Gamma)$, (в силу теоремы Пэли — Винера) заключаем, что интегралы (3.5) — целая функция из класса W. На лучах $L^{\pm}$ $G(\lambda) \in L_2(R^+)$, поскольку $C(\lambda, \omega) \in W$.

Таким образом, $G(z)$ — аналитическая в Z функция из класса W. Осталось доказать, что $G(z)$ допускает аналитическое продолжение на риманову поверхность $K(z)$, т. е. квазицелая. Это легко сделать, в точности следуя известным подходам [9, 10].

Функцию $g(\omega)$ (по аналогии с целыми функциями [8]) назовем $C(z, \omega)$ — ассоциированной с квазицелой функцией $G(z)$, а интеграл (3.4) — обобщенным интегральным преобразованием Бореля функции $g(\omega)$ на римановой поверхности логарифма.

Доказательство следующего предложения основано на методе, использованном в [12] при построении функций биортогональных к некоторым обобщениям систем экспонент.

Предложение 2. Каждой квазицелой функции $G(z) \in W$ можно поставить в соответствие единственную функцию $g(\omega)$, регулярную во внешности контура T и на нем самом, такую, что выполняется равенство (3.4).

Предложение 3. Пусть $H(z)$ и $G(z)$ — соответственно целая и квазицелая функции из класса W, а $h(\omega)$ и $g(\omega)$ $C(z, \omega)$ — ассоциированные с ними функции. Тогда справедливо равенство типа Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{T} g(\omega)\, \overline{h(\omega)}\, d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} G(\lambda)\, \overline{H(\lambda)}\, e^{-2\varepsilon\lambda}\, d\lambda, \quad \varepsilon \geqslant 0 \tag{3.6}$$

Доказательство. Существование интеграла по контуру T очевидно. Интеграл справа также существует, так как по условию $G(\lambda)$, $H(\lambda) \in L_2(R^+)$.

Вытянем контур П вдоль мнимой оси вниз и вверх до бесконечности (это можно сделать в силу аналитичности функций $g(\omega)$ и $h(\omega)$ во внешности T). Продолжение отрезка l до $\pm\infty$ обозначим l_∞, а продолжение отрезков $l^\pm$ соответственно в $+\infty$ и $-\infty$ обозначим $l_\infty^\pm$. По теореме Коши о вычетах интегралы по объединениям прямых $l_\infty^+ \cup L^+$ и $l_\infty^- \cup L^-$ равны нулю, и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T g(\omega)\overline{h(\omega)}\,d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{l_\infty} g(iy+\varepsilon)\overline{h(iy+\varepsilon)}\,d(iy+\varepsilon), \quad \varepsilon > 0 \tag{3.7}$$

С другой стороны, пользуясь представлением (3.3) для функции $C(\lambda, \omega)$, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty H(\lambda)\,C(\lambda, \omega)\,d\lambda = h(\omega), \quad \omega \in \Omega\diagdown\overline{\Gamma} \tag{3.8}$$

Подставляя выражение (3.8) в правую часть равенства (3.7), после простых выкладок (аналогичных имеющимся в [11]), приходим к соотношению (3.6).

4. Биортогональные системы функций. Пусть $\sigma_k(\omega)$ — функции, построенные по финитным функциям $\sigma_k(y)$ $(k \geqslant 1)$ в соответствии с формулой (3.2). Очевидно

$$\begin{gathered}\sigma_k(\omega) = (\sin\lambda_k - \lambda_k\cos\lambda_k)\,C(\lambda_k, \omega) + \lambda_k\sin\lambda_k\frac{d}{d\lambda_k}(C(\lambda_k, \omega)),\\ \omega \in \Omega\diagdown\overline{\Gamma}, \quad k \geqslant 1.\end{gathered} \tag{4.1}$$

Пусть $\{\psi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^\infty$ — некоторая система функций, аналитических во внешности контура T и на нем самом, причем $\psi_\nu(\infty) = 0$, $\nu \geqslant 1$. Функция

$$\sigma(\lambda, \omega) = (\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)\,C(\lambda, \omega) + \lambda\sin\lambda\frac{d}{d\lambda}(C(\lambda, \omega)), \quad \lambda \in C, \quad \omega \in \Omega\diagdown\overline{\Gamma} \tag{4.2}$$

— порождающая систему $\{\sigma_k(\omega)\}_{k=1}^\infty$ при $\lambda \in \Lambda$.

Допустим, что на вещественной полуоси $\lambda \in R^+$ выполняются равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \sigma(\lambda, \omega)\,\psi_\nu(\omega)\,d\omega = \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{(\lambda^2-\lambda_\nu^2)(\lambda^2-\bar\lambda_\nu^2)} = R_\nu(\lambda), \quad \nu \geqslant 1 \tag{4.3}$$

Интеграл (4.3) существует в области Z. Это следует из представления (4.2) для $\sigma(\lambda, \omega)$ и предложения 1. А так как левая и правая части равенств (4.3) — целые функции, то из справедливости этих равенств при $\lambda \in R^+$ вытекает их справедливость во всей области Z. Тогда, полагая в (4.3) $\lambda = \lambda_k$, $\lambda_k \in \Lambda$, приходим к равенствам

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \sigma_k(\omega)\,\psi_\nu(\omega)\,d\omega = \begin{cases} N_k = R_k(\lambda_k), & k = \nu\\ 0, \quad k \neq \nu & (k, \nu \geqslant 1)\end{cases} \tag{4.4}$$

Систему функций $\{\psi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^\infty$, удовлетворяющую соотношениям (4.4), назовем биортогональной к системе $\{\sigma_k(\omega)\}_{k=1}^\infty$.

Обозначим

$$\Psi_\nu(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \psi_\nu(\omega)\,C(\lambda, \omega)\,d\omega, \quad \lambda \in R^+, \quad \nu \geqslant 1 \tag{4.5}$$

Подставляя (4.2) в (4.3), приходим к следующим уравнениям для определения функций $\Psi_\nu(\lambda)$:

$$(\sin\lambda - \lambda\cos\lambda)\,\Psi_\nu(\lambda) + \lambda\sin\lambda\, d\Psi_\nu(\lambda)/d\lambda = R_\nu(\lambda),\ \lambda\in R^+,\ \nu\geqslant 1 \tag{4.6}$$

Частное решение этих уравнений может быть записано в виде

$$\Psi_\nu(\lambda) = \frac{\sin\lambda}{\lambda}\int_0^\lambda \frac{R_\nu(\lambda)\,d\lambda}{\sin^2\lambda},\qquad \nu\geqslant 1 \tag{4.7}$$

Отсюда, пользуясь разложением Миттаг-Леффлера [13] для мероморфной функции, стоящей под знаком интеграла, получим

$$\Psi_\nu(\lambda) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_\nu(p_n)\,\lambda\sin\lambda}{p_n(\lambda^2-p_n^2)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_\nu(p_n)\ln|1-\lambda^2p_n^{-2}|\sin\lambda}{\lambda} \tag{4.8}$$

$$r_\nu(p_n) = \frac{d}{d\lambda}(\lambda^{-2}R_\nu(\lambda))|_{\lambda=p_n},\qquad p_n = n\pi,\qquad \lambda\in R^+,\qquad \nu\geqslant 1$$

Используя оценки для $|R_\nu(p_n)|$, $|r_\nu(p_n)|$, можно показать, что ряды (4.8) равномерно сходятся.

Пусть $S_{1\nu}(\lambda)$, $S_{2\nu}(\lambda)$, $(\nu\geqslant 1)$ — соответственно суммы первого и второго рядов (4.8). Рассмотрим вначале вторую сумму $S_{2\nu}(\lambda)$. Аналитическим продолжением каждого слагаемого суммы $S_2(\lambda)$ (индекс ν здесь и далее опущен) является квазицелая функция из класса W. А так как ряд $S_2(\lambda)$ равномерно сходится, то аналитическое продолжение его суммы $S_2(z)$ — квазицелая функция из W [9]. Функция $S_2(z)$ может быть представлена в виде

$$S_2(z) = Q(z)\ln z,\quad Q(z)\in W \tag{4.9}$$

(это следует из того, что после подстановки $\lambda = \pm p_n(1-u)$, $(n\geqslant 1)$ к указанному виду может быть приведено каждое слагаемое суммы $S_2(\lambda)$) и, следовательно, определена на римановой поверхности $K(z)$.

Рассмотрим теперь сумму первого ряда $S_1(\lambda)$ в равенстве (4.8). Так как каждый член ряда — целая функция из класса W, а сам ряд равномерно сходится, то $S_1(\lambda)\in W$.

Пусть $\Psi_\nu(z)$ $(\nu\geqslant 1)$ — аналитическое продолжение функций $\Psi_\nu(\lambda)$ на поверхность $K(z)$. Как только что было показано, такое продолжение существует и представляет собой сумму целой и квазицелой функций из класса W. Из существования системы функций $\{\Psi_\nu(z)\}_{\nu=1}^{\infty}$, согласно предложению 2, вытекает существование $C(z,\omega)$-ассоциированной с ней системы функций $\{\psi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^{\infty}$, удовлетворяющей уравнениям (4.3), т. е. биортогональной к системе $\{\sigma_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$.

Единственность биортогональной системы доказывается следующим образом. Система функций $\{\psi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^{\infty}$ не единственна, если правую часть равенств (4.3) можно домножить на некоторую целую функцию нулевого типа и не имеющую нулей (с тем, чтобы не нарушить полноты системы функций $\{\mathrm{Re}\,(a_k\sigma_k(y))\}_{k=1}^{\infty}$). По теореме Фрагмена — Линделефа [6] этим требованиям удовлетворяет единственная функция, а именно постоянная.

Приведенные рассуждения составляют содержание следующей теоремы.

Теорема 2. Существует единственная система функций $\{\psi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^{\infty}$, биортогональная к системе функций $\{\sigma_k(\omega)\}_{k=1}^{\infty}$ в смысле (4.4).

Аналогично строится система функций $\{\varphi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^\infty$, биортогональная на контуре T к системе $\{\tau_k(\omega)\}_{k=1}^\infty$. Функции $\varphi_\nu(\omega)$ определяются из уравнений

$$\frac{1}{2\pi i}\int_T \tau(\lambda,\omega)\,\varphi_\nu(\omega)\,d\omega = R_\nu(\lambda), \qquad \lambda\in R^+, \qquad \nu\geqslant 1$$
$$\tau(\lambda,\omega)=\cos\lambda S(\lambda,\omega)-\sin\lambda\,\frac{d}{d\lambda}(S(\lambda,\omega)) \tag{4.10}$$

Здесь $S(\lambda,\omega)$ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией $F[\eta(y)\sin\lambda y]$.

5. Биортогональные разложения. Пользуясь биортогональными системами функций $\{\psi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^\infty$ и $\{\varphi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^\infty$, найдем коэффициенты a_k, $\bar a_k$ $(k\geqslant 1)$ разложений (1.3). Для этого от равенств (1.3) перейдем к равенствам для их образов Фурье, а затем при помощи преобразования Бореля (3.2) — к равенствам для ассоциированных функций. Домножая получившиеся в результате равенства первое — на $\psi_\nu(\omega)$, а второе — на $\varphi_\nu(\omega)$ и интегрируя по контуру T, на основании соотношения (4.4) и его аналога для системы функций $\{\varphi_\nu(\omega)\}_{\nu=1}^\infty$, вытекающего из (4.10), для каждого номера $\nu\geqslant 1$ получим систему из двух алгебраических уравнений относительно неизвестных a_ν, $\bar a_\nu$

$$\alpha_\nu = 2\,\mathrm{Re}\,(a_\nu\lambda_\nu N_\nu), \quad \beta_\nu = 2\,\mathrm{Re}\,(a_\nu\lambda_\nu^2 N_\nu) \tag{5.1}$$

причем, в соответствии с равенством (3.6)

$$\alpha_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_T\psi_\nu(\omega)\,\alpha(\omega)\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Psi_\nu(\lambda)\,F[\alpha](\lambda)\,e^{-2\varepsilon\lambda}\,d\lambda$$
$$\beta_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_T\varphi_\nu(\omega)\,\beta(\omega)\,d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\Phi_\nu(\lambda)\,F[\beta](\lambda)\,e^{-2\varepsilon\lambda}\,d\lambda, \qquad \varepsilon\geqslant 0 \tag{5.2}$$
$$\left(\Phi_\nu(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_T\varphi_\nu(\omega)\,S(\lambda,\omega)\,d\omega, \qquad \nu\geqslant 1, \qquad \lambda\in R^+\right)$$

Через $\alpha(\omega)$ обозначена функция, $C(\lambda,\omega)$-ассоциированная с $F[\alpha](\lambda)$, а через $\beta(\omega)$ — функция, $S(\lambda,\omega)$-ассоциированная с $F[\beta](\lambda)$.

Пример. Приведем простой пример биортогональных разложений (1.3). Примем $\alpha(y)={}^1/_3-y^2$, $\beta(y)=0$. Очевидно, $\beta_\nu=0$ $(\nu\geqslant 1)$. Учитывая, что $\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda^{-3}\sigma(\lambda,y)={}^1/_3-y^2$, из равенств (4.3) при $\lambda\to 0$ получим $\alpha_\nu=2/|\lambda_\nu^2|$. Решая теперь систему уравнений (5.1), находим

$$a_\nu=\frac{2}{|\lambda_\nu^2|}\cdot\frac{\bar\lambda_\nu}{N_\nu\lambda_\nu(\lambda_\nu-\bar\lambda_\nu)}$$

Правильность полученного решения устанавливалась подстановкой найденных значений величин a_ν в ряды (1.3), которые, при удержании в них 25 членов, сходятся к своим функциям с погрешностью, не превышающей 3%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
2. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наук. думка, 1978. 264 с.
3. *Прокопов В. К.* Однородные решения теории упругости и их приложения к теории тонких пластинок // Труды 2-го Всесоюз. съезда по теорет и прикл. механике: Механика твердого тела. М.: Наука, 1966. С. 253—259.
4. *Устинов Ю. А.*, *Юдович В. И.* О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 706—714.

5. *Ворович И. И., Ковальчук В. Е.* О базисных свойствах одной системы однородных решений // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 5. С. 861—869.
6. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
7. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407 с.
8. *Ибрагимов И. И.* Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971. 518 с.
9. *Pflüger A.* Über eine Interpretation gewisser Konvergenz — und Fortsetzungseigenschaften Dirichletscher Reihen // Comment. Math. Helv. 1935/36. V. 11. S. 89—124.
10. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 671 с.
11. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968. 276 с.
12. *Леонтьев А. Ф.* Обобщения рядов экспонент. М.: Наука, 1981. 320 с.
13. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.

Москва

Поступила в редакцию
20.IX.1990