Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 536.201

О. Ю. Динариев

О СТРУКТУРЕ ФРОНТА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА С РЕЛАКСАЦИЕЙ

Для процесса переноса с релаксационным ядром общего вида найдено распределение переносимой величины вблизи фронта возмущений, возникших от точечного источника. Именно в этой области сказывается конкретный функциональный вид ядра, так как далеко за фронтом процесс переноса хорошо описывается уравнением теплопроводности. Сформулированы общие физические и термодинамические условия, которым должно удовлетворять релаксационное ядро. Вычислено распределение вблизи фронта отдельно для одномерного, двумерного и трехмерного случаев.

Как хорошо известно, широкий класс процессов переноса (теплопроводность, диффузия, распространение поперечных мод в вязкой жидкости, фильтрация и др.) описывается параболическими уравнениями типа уравнения теплопроводности. Эти уравнения допускают бесконечную скорость распространения сигнала, что противоречит принципам современной физики, так как скорость распространения любого сигнала не должна превышать скорость света в вакууме. Поэтому, чтобы сделать теорию процессов переноса физически состоятельной, необходимо модифицировать основное динамическое уравнение. Было предложено [1] заменить параболическое уравнение гиперболическим. Впоследствии было осознано, что результат [1] является частным в более общем подходе, учитывающем релаксационную связь потока переносимой величины с ее градиентом [2]. Такая связь возникает естественным образом в кинетической теории и неравновесной статистической механике [3]. Вопрос о предельной скорости сигнала был исследован [4] для релаксационного ядра общего вида.

1. Пусть имеется однородная изотропная покоящаяся среда, с которой связана система отсчета t, x^1, x^2, x^3, где x^1, x^2, x^3 — декартовы координаты. Пусть в среде может переноситься некоторая физическая величина $u = u(t, x^i)$ (например, температура, концентрация примеси и др.). Предположим, что в состоянии равновесия величина u принимает постоянное значение, определяемое граничными условиями. Без ограничения общности можно считать, что это значение равно нулю. Динамика величины $u(t, x^i)$ описывается уравнением

$$u_t + \nabla \mathbf{J} = q \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{J}$ — вектор потока величины u, $q = q(t, x^i)$ — поле источников. Для однородной изотропной среды $\mathbf{J}$ обычно выбирают в виде

$$\mathbf{J} = -\varkappa \nabla u \tag{1.2}$$

где $\varkappa = \text{const} > 0$ — коэффициент переноса. При учете соотношения (1.2) уравнение (1.1) сводится к уравнению теплопроводности

$$u_t - \varkappa \Delta u = q \tag{1.3}$$

где Δ — оператор Лапласа. Согласно (1.3), возмущения поля $u = u(t, x^i)$ распространяются с бесконечной скоростью. Как показано в [4], парадокс бесконечной скорости распространения сигнала можно устранить, если заменить (1.2) более общим релаксационным соотношением

$$\mathbf{J}(t, x^i) = -\varkappa \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-t') \nabla u(t', x^i)\, dt' \tag{1.4}$$

Ядро $K = K(t)$ не зависит от пространственных координат и характеризует внутренние релаксационные процессы в среде. Функция $K = K(t)$ удовлетворяет ряду условий, вытекающих из физических и термодинамических соображений.

Перечислим эти условия, следуя работам [4, 5].

Если ∇u изменяется во времени, сохраняя в данной точке пространства постоянное направление, естественно предположить, что соответствующий поток $\mathbf{J}$ имеет в данной точке во все моменты времени противоположное направление. Это эквивалентно следующему условию.

1°. $K = K(t)$ — неотрицательная функция, имеющая размерность (время)$^{-1}$.

При постоянном во времени ∇u соотношение (1.4) должно переходить в (1.2), откуда

2°. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t)\, dt = 1$

Ядро $K = K(t)$ описывает влияние поля ∇u на поток $\mathbf{J}$. В силу принципа причинности поле $\nabla u(t', x^i)$ не может оказывать влияния на $\mathbf{J}(t, x^i)$ при $t' > t$. Поэтому $K(t) = 0$ при $t < 0$. При $t > t'$ с ростом разности $(t - t')$ влияние $\nabla u(t', x^i)$ на $\mathbf{J}(t, x^i)$ должно уменьшаться, то есть $K(t)$ должна быть убывающей функцией. Далее, согласно [4] предельная скорость распространения сигнала в модели (1.1), (1.4) равна $v = (\varkappa K(0))^{1/2}$. Будем считать ее конечной.

Обозначим символом $S[a, b]$ пространство быстро убывающих функций на отрезке $[a, b]$, где может быть $a = -\infty$ или $b = +\infty$, т. е. пространство действительных бесконечно дифференцируемых функций $f = f(t)$ на отрезке $[a, b]$ с топологией, задаваемой счётным множеством полунорм

$$\|f\|_{m,n} = \sup_{t\in[a,b]} \left| t^m \frac{d^n f}{dt^n}(t) \right|; \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Обозначим символом $S'[a, b]$ пространство функций, сопряженное пространству $S[a, b]$, т. е. пространство линейных непрерывных функционалов на $S[a, b]$.

В соответствии с предыдущими замечаниями примем следующее утверждение.

3°. Носитель функции $K = K(t)$ лежит на полуоси

$$[0, +\infty),\ K|_{[0,+\infty)} \in S[0, +\infty] \text{ и } K|_{[0,+\infty)}$$

является монотонно убывающей функцией.

Рассмотрим теперь величину

$$W(x^i) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \nabla u(t, x^i)\, \mathbf{J}(t, x^i)\, dt$$

для произвольного набора $\frac{\partial u}{\partial x^j}(\cdot, x^i) \in S[-\infty, +\infty]$. Для всех процессов переноса величина $W(x^i)$ пропорциональна производству энтропии в частице среды x^i в замкнутом термодинамическом цикле. Согласно второму закону термодинамики, величина $W(x^i)$ должна быть неотрицательной.

Если воспользоваться формулой (1.4), то получим:

4°. Для любой функции $f \in S[-\infty, +\infty]$ имеет место неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 K(t_1 - t_2) f(t_1) f(t_2) \geqslant 0$$

В дальнейшем для произвольной функции $f \in S'[-\infty, +\infty]$ будем обозначать символом $f_F = f_F(\omega)$ ее преобразование Фурье

$$f_F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt$$

Из условий 1° — 4° можно вывести ряд следствий, касающихся фурье-образа ядра $K_F(\omega)$.

Перечислим их, следуя работе [5].

$K_F = K_F(\omega)$ — голоморфная в нижней комплексной полуплоскости ω функция, непрерывная вплоть до действительной прямой.

При этом $K_F(0) = 1$, $\overline{K_F(\omega)} = K_F(-\overline{\omega})$, где $\operatorname{Im} \omega \leqslant 0$ и

$$|K_F(\omega)| \leqslant 1, \quad \operatorname{Im} \omega = 0 \tag{1.5}$$

В фурье-представлении условие 4° эквивалентно неравенству

$$\int_{0}^{+\infty} |f_F(\omega)|^2 \operatorname{Re} K_F(\omega)\, d\omega \geqslant 0$$

Отсюда в силу произвольности $f_F(\omega)$ при $\omega \geqslant 0$ вытекает неотрицательность $\operatorname{Re} K_F(\omega)$. Заметим, что обращение $\operatorname{Re} K_F(\omega_0)$ в нуль означало бы возможность бездиссипативного колебательного процесса с частотой ω_0. На практике подобное имеет место для сверхтекучих и сверхпроводящих сред. Исключим этот случай, потребовав выполнения более сильного неравенства

$$\operatorname{Re} K_F(\omega) > 0, \quad \omega \in R \tag{1.6}$$

При $|\omega| \to +\infty$ имеет место асимптотическое разложение

$$K_F(\omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} k_{-n} (i\omega)^{-n}, \quad k_{-n} = \left.\frac{d^{n-1}K}{dt^{n-1}}\right|_{t=+0} \tag{1.7}$$

Из (1.7) в соответствии с (1.6) потребуем, что $k_{-2} < 0$. Так как $K_F(\omega) \to \to 0$ при $|\omega| \to +\infty$, то из (1.5), (1.6) и общей теории [6, 7] следует, что комплексная функция $K_F = K_F(\omega)$ отображает полуплоскость $\operatorname{Im} \omega < 0$ на некоторую область в круге $|z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$, $z \in C$.

2. Из (1.1), (1.4) вытекает интегродифференциальное уравнение

$$u_t(t, x^i) - \varkappa \int_{-\infty}^{+\infty} K(t - t') \Delta u(t', x^i)\, dt' = q(t, x^i)$$

которое после преобразования Фурье приводится к виду

$$(\Delta - \alpha^2) u_F = -q_F/(\varkappa K_F) \tag{2.1}$$

Здесь $u_F = u_F(\omega, x^i)$, $q_F = q_F(\omega, x^i)$ и α — комплексная величина, определяемая соотношениями

$$\alpha^2 = i\omega/(\varkappa K_F), \quad \operatorname{Re} \alpha \geqslant 0 \tag{2.2}$$

Покажем, что эти соотношения определяют функцию $\alpha = \alpha(\omega)$, голоморфную в нижней комплексной полуплоскости и удовлетворяющую строгому неравенству

$$\operatorname{Re} \alpha(\omega) > 0, \quad \operatorname{Im} \omega \leqslant 0, \quad \omega \neq 0 \tag{2.3}$$

Действительно,

$$\operatorname{Im} K_F = -\int_0^{+\infty} e^{t\operatorname{Im}\omega}\sin(t\operatorname{Re}\omega)\,K(t)\,dt \tag{2.4}$$

Из (2.4) и условия 3° следует, что

$$-\operatorname{Re}\omega\operatorname{Im}K_F \geqslant 0 \tag{2.5}$$

Далее

$$\operatorname{Im}(i\omega/K_F) = (\operatorname{Re}\omega\operatorname{Re}K_F + \operatorname{Im}\omega\operatorname{Im}K_F)/\,|K_F|^2 \tag{2.6}$$

Из результатов разд. 1, (2.6), (2.5), (2.2) вытекает (2.3). Из (2.2), (1.7) можно получить асимптотическое разложение при $|\omega| \to +\infty$:

$$\alpha(\omega) = \sum_{n=-1}^{+\infty} a_{-n}(i\omega)^{-n}, \quad a_1 = (\varkappa k_{-1})^{-1/2} = v^{-1}, \tag{2.7}$$

$$a_0 = -2^{-1}\varkappa^{-1/2}k_{-1}^{-3/2}k_{-2},$$

$$a_{-1} = -2^{-1}\varkappa^{-1/2}k_1^{-3/2}k_{-3} + 3\cdot 2^{-3}\varkappa^{-1/2}k_{-1}^{-5/2}k_{-2}{}^2, \ldots$$

Рассмотрим задачу о распространении возмущений от точечного источника отдельно в одномерном, двумерном и трехмерном случаях. Размерность задачи будем характеризовать параметром ν ($\nu = 1, 2, 3$). В этом случае

$$q = Q(t)\prod_{i=1}^{\nu}\delta(x^i)$$

и зависимость u_F от координат сводится к зависимости от $r = \left(\sum_{i=1}^{\nu}(x^i)^2\right)^{1/2}$. Подставляя в (2.1) выражение для оператора Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + (\nu - 1)r^{-1}\partial/\partial r$, находим

$$u_F = Q_F J_0,\ J_0 = J_0(\omega, r) = (\varkappa K_F)^{-1}(2\pi)^{-\nu/2}(r/\alpha)^{\lambda}K_{\lambda}(\alpha r)$$

где $\lambda = (2 - \nu)/2$, $K_\lambda = K_\lambda(z)$ — функция Макдональда [8, 9]. Имеют место точные формулы

$$K_{\pm 1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z} \tag{2.8}$$

а также асимптотические разложения при $\omega \to 0$ (C — постоянная Эйлера)

$$K_0(z) = \ln(z\gamma/2) + O(z^2\ln z),\ \gamma = e^C \tag{2.9}$$

и при $|\omega| \to +\infty$:

$$K_0(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(1/2 + m)}{m!\,\Gamma(1/2 - m)}(2z)^{-m} \tag{2.10}$$

Функции Макдональда — аналитические с разрезом вдоль действительной отрицательной полуоси.

Пусть $N \geqslant 2$ — некоторое натуральное число, y_j ($j = 1, \ldots, N + 1$) — произвольная последовательность попарно неравных положительных чисел, $X_j = X_j(r)$ ($j = 1, \ldots, N + 1$) — некоторая последовательность функций от r, которая будет определена ниже отдельно для каждого значения ν. Определим функции

$$F_1 = F_1(\omega) = \sum_{j=1}^{N+1}\frac{x_{j1}}{i\omega + y_j}, \quad F_2 = F_2(\omega) = \sum_{j=1}^{N+1}\frac{x_{j2}}{i\omega + y_j} + x_{02}$$

так, чтобы коэффициенты x_{j1}, x_{j2} удовлетворяли системам уравнений

$$\sum_{j=1}^{N+1} x_{j1} y_j^{-1} = 1, \quad \sum_{j=1}^{N+1} x_{j1} y_j^{k} = 0, \quad k = 0, \ldots, N-1 \tag{2.11}$$

$$x_{02} + \sum_{j=1}^{N+1} x_{j2} y_j^{-1} = 0, \quad x_{02} = X_0 \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{N+1} x_{j2} y_j^{k} = (-1)^k X_{k+1}, \quad k = 0, \ldots, N-1$$

Системы (2.11), (2.12) всегда имеют единственное решение.

Положим для простоты $Q(t) = A\theta(t)$, где $\theta(t)$ — функция Хевисайда. Тогда $Q_F(\omega) = A(i\omega + \varepsilon)^{-1}$, где ε — малая положительная величина, которую нужно положить равной нулю в конечных выражениях.

Пусть $\nu = 1$.

Из (2.8) при $\omega \to 0$ вытекает асимптотика

$$J_0 = \lambda_1 (i\omega)^{-1/2} + \lambda_2 + O(|\omega|^{1/2}), \quad \lambda_1 = -2^{-1}\varkappa^{-1/2},$$
$$\lambda_2 = -2^{-1}\varkappa^{-1/2} r \tag{2.13}$$

Функция $z^{1/2}$ здесь и ниже считается аналитической с разрезом вдоль действительной отрицательной полуоси. При $|\omega| \to +\infty$ из (2.7), (2.8) вытекает асимптотическое разложение

$$J_0 = e^{-i\omega r/v} \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(r)(i\omega)^{-n} \tag{2.14}$$

$$X_0 = (2\varkappa k_{-1} a_1)^{-1} e^{-ra_0}, \quad X_1 = -X_0 \left(ra_{-1} + \frac{k_{-2}}{2k_{-1}} \right), \ldots$$

Определим новую функцию $J_1 = J_1(\omega, r)$ формулой

$$J_0 = e^{-i\omega r/v} (J_1 + (\lambda_1 (i\omega)^{-1/2} + \lambda_2) F_1 + F_2) \tag{2.15}$$

Из (2.11), (2.14) следует асимптотика $J_1 = 0(|\omega|^{1/2})$ при $\omega \to 0$, $J_1 = O(|\omega|^{-(N+1)})$ при $|\omega| \to +\infty$. Из (2.15) вытекает представление

$$u(t, r) = u_1(t, r) + u_2(t, r) \tag{2.16}$$

$$u_1(t, r) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} ((\lambda_1 (i\omega)^{-1/2} + \lambda_2) F_1 + F_2) \frac{d\omega}{i\omega + \varepsilon}$$

$$u_2(t, r) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} (i\omega)^{-1} J_1 d\omega$$

где $\tau = t - r/v$. Используя теорему Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, можно убедиться, что функция $u_2(t, r)$ является N раз непрерывно-дифференцируемой. Поскольку $u_2(t, r) = 0$ при $\tau < 0$ (теорема Пэли — Винера [7]), что $u_2 = o(\tau^N)$ при $\tau \geqslant 0$. Вычисление $u_1(t, r)$ применением тождества

$$(i\omega + y)^{-1} (i\omega + \varepsilon)^{-1} = (y - \varepsilon)^{-1} [(i\omega + \varepsilon)^{-1} - (i\omega + y)^{-1}] \tag{2.17}$$

сводится к вычислению интегралов вида

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega\tau} d\omega}{(i\omega)^{1/2} (i\omega + y)}, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} (i\omega + y)^{-1} d\omega \, (y > 0)$$

Интеграл I_1 вычисляется посредством деформирования контура интегрирования к берегам разреза с использованием формулы № 3.466.1 из [9], интеграл I_2 вычисляется по теореме вычетов. Получаем

$$I_1 = -2\pi i y^{1/2} \Phi(i(y\tau)^{1/2}) e^{-y\tau} \theta(\tau), \quad I_2 = 2\pi e^{-y\tau} \theta(\tau)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности. Разлагая Φ в ряд по τ в соответствии с формулой № 8.253.1 из [9] находим

$$u = \left(A \sum_{n=0}^{N} X_n \frac{\tau^n}{n!} + o(\tau^N)\right)\theta(\tau) \tag{2.18}$$

Пусть теперь $\nu = 2$.

Из (2.9), (2.7), (2.10) выводим асимптотики

$$\omega \to 0,\ J_0 = \lambda_3 \ln((i\omega)^{1/2}\gamma/2) + O(|\omega| \ln |\omega|),$$
$$\lambda_3 = (2\pi\varkappa)^{-1} \tag{2.19}$$

$$|\omega| \to +\infty,\quad J_0 = e^{-i\omega r/v}(i\omega)^{1/2} \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(r)(i\omega)^{-n} \tag{2.20}$$

$$X_0 = (2\pi\varkappa a_1 k_{-1})^{-1}(\pi/2r)^{1/2} e^{-ra_0}$$
$$X_1 = -X_0\left(\frac{3k_{-2}}{4k_{-1}} + ra_{-1}' + \frac{1}{8ra_1}\right), \ldots$$

Определим функцию $J_2 = J_2(\omega, r)$ формулой

$$J_0 = e^{-i\omega r/v}(J_2 + \lambda_3 \ln((i\omega)^{1/2}\gamma/2) F_1 + (i\omega)^{1/2} F_2) \tag{2.21}$$

Из (2.19), (2.20) вытекают асимптотики: $J_2 = O(|\omega| \ln |\omega|)$ при $\omega \to 0$, $J_2 = O(|\omega|^{-\left(N+\frac{1}{2}\right)})$ при $|\omega| \to +\infty$.

Из (2.21) вытекает представление (2.16), где

$$u_1(t, r) = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}(\lambda_3 \ln((i\omega)^{1/2}\gamma/2) F_1 + (i\omega)^{1/2} F_2)\frac{d\omega}{i\omega + \varepsilon}$$

$$u_2(t, r) = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}(i\omega)^{-1} J_2\, d\omega$$

Как и раньше, можно убедиться, что $u_2(t, r) = 0$ при $\tau < 0$ и $u_2(t, r) = o(\tau^N)$ при $\tau \geqslant 0$. Вычисление u_1 применением тождества (2.17) сводится к вычислению интегралов вида I_2, а также

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln (i\omega)^{1/2} e^{i\omega\tau}}{i\omega + y}\, d\omega,\quad I_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(i\omega)^{1/2} e^{i\omega\tau}}{i\omega + y}\, d\omega\ (y > 0)$$

Эти интегралы берутся посредством сдвига контура интегрирования к берегам разреза при помощи формул №№ 3.352.6, 3.466.2 из [9]. В результате имеем

$$I_3 = \pi e^{-y\tau}(\ln y - \mathrm{Ei}(y\tau))\,\theta(\tau)$$
$$I_4 = [2\pi^{1/2}\tau^{-1/2} + 2\pi i y^{1/2} e^{-\tau y}\,\Phi(i(y\tau)^{1/2})]\,\theta(\tau)$$

Здесь $\mathrm{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция.

Используя формулы для разложения в ряд $\mathrm{Ei}(z)$ и $\Phi(z)$ (№ 8.214.2 и № 8.253.1 из [9]), окончательно получим

$$u = \left(A\pi^{-1/2}\tau^{-1/2} \sum_{n=0}^{n} \frac{2^n X_n}{(2n-1)!!}\tau^n + o(\tau^N)\right)\theta(\tau) \tag{2.22}$$

Пусть $\nu = 3$.

Из (2.7), (2.8) выводим асимптотики

$$\omega \to 0,\ J_0 = \lambda_4 + O(|\omega|^{1/2}),\ \lambda_4 = (4\pi\varkappa r)^{-1} \tag{2.23}$$

$$|\omega| \to +\infty, \quad J_0 = i\omega \sum_{n=0}^{+\infty} X_n(r)(i\omega)^{-n}$$

$$X_0 = (4\pi\varkappa k_{-1}r)^{-1} e^{-ra_0}, \quad X_1 = -X_0\left(\frac{k_{-2}}{k_{-1}} + ra_{-1}\right), \dots \tag{2.24}$$

Определим функцию J_3 равенством

$$J_0 = e^{-i\omega r/v}(J_3 + \lambda_4 F_1 + i\omega F_2)$$

Из (2.23), (2.24) вытекают асимптотики $J_3 = O(|\omega|^{1/2})$ при $\omega \to 0$, $J_3 = O(|\omega|^{-N})$ при $|\omega| \to +\infty$.

Рассмотрим разложение (2.16), где

$$u_1(t, r) = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}(\lambda_3 F_1 + i\omega F_2)\frac{d\omega}{i\omega + \varepsilon}$$

$$u_2(t, r) = \frac{A}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau}(i\omega)^{-1} J_3\, d\omega$$

По теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла можно убедиться, что функция $u_2(t, r)$ $(N-1)$ раз непрерывно-дифференцируема по t. Поскольку при $\tau < 0$ она обращается в нуль (теорема Пэли — Винера [7]), то при $\tau \geqslant 0$ имеем $u_2 = o(\tau^{N-1})$. Вычисление $u_1(t, r)$ при помощи формулы (2.17) сводится к вычислению интегралов вида I_2. Представляя окончательный результат в виде ряда, имеем

$$u(t, r) = A\left[X_0\delta(\tau) + \theta(\tau)\left(\sum_{k=0}^{N-1} X_{k+1}\frac{\tau^k}{k!} + o(\tau^{N-1})\right)\right] \tag{2.25}$$

3. Формулы (2.18), (2.22), (2.25) представляют собой основной результат работы. Они позволяют связать структуру фронта возмущений для процесса переноса с релаксацией с поведением релаксационного ряда при малых временах. Поэтому экспериментальное исследование фронта может в принципе дать информацию о ядре.

Формулы (2.18), (2.22), (2.25) получены для источника типа функции Хевисайда $\theta(t)$. Если эти формулы продифференцировать по τ, то получатся формулы для источника типа функции Дирака $\delta(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cattaneo M. C.* Sur une forme de l'éguation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantané // C. R. Acad. Sci. Paris. 1958. T. 247. № 4. P. 431—433.
2. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1968. V. 31. № 2. P. 113—126.
3. *Рудяк В. Я.* Статистическая теория диссипативных процессов в газах и жидкостях. Новосибирск: Наука, 1987. 272 с.
4. *Динариев О. Ю.* О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. № 5. С. 1095—1097.
5. *Динариев О. Ю., Николаев О. В.* Релаксационные явления в насыщенных пористых средах: Линейная теория // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 469—475.
6. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. Т. 1. Основные понятия и принципы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 364 с.
7. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986. 462 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1974. 295 с.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

Москва

Поступила в редакцию 3.I.1990