Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 532.516 : 532.525

Н. И. Яворский

ТЕПЛОВОЙ СЛЕД ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА

В рамках полного уравнения теплопроводности рассматривается стационарная задача о тепловом следе за телом, обтекаемым равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Предполагается, что решение соответствующей гидродинамической задачи известно. Для гидродинамической задачи были доказаны теоремы существования [1, 2] и единственности [1], получен главный член разложения [1, 3] в бесконечно удаленной точке и оценки остаточных членов [1, 4]. Решению тепловой задачи посвящены в основном работы, выполненные в рамках приближения пограничного слоя [5].

1. Решение гидродинамической задачи можно представить в виде

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{w} = O(1/r), \quad r = |\mathbf{x}| \tag{1.1}$$

$\mathbf{v}_0$ — скорость жидкости на бесконечности, тело предполагается покоящимся. Уравнение теплопроводности в этом случае имеет вид

$$\alpha\Delta T - (\mathbf{v}_0, \nabla T) = (\mathbf{w}, \nabla T) - \frac{\nu}{2c_p}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)^2 \tag{1.2}$$

(a — температуропроводность, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, ν — кинематическая вязкость). Уравнение (1.2) включает объемный источник тепловыделения за счет диссипации кинетической энергии движения жидкости.

Граничные условия для уравнения (1.2) — стандартные. В частности, предполагаем, что на поверхности тела задано поле температуры $T_*(\mathbf{s})$, на бесконечности температура равна нулю. В окрестности бесконечно удаленной точки $r = \infty$, учитывая, что $\mathbf{w} = O(1/r)$, уравнение (1.2) можно приблизить уравнением

$$a\Delta T_0 - (\mathbf{v}_0, \nabla T) = -q(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

где $q(\mathbf{x}) \in W_2^1$ — заданный источник тепла, следующий из (1.2). Приближение (1.3) аналогично приближению Озеена для гидродинамической задачи. Его обоснованность вытекает из оценок $T = O(1/r)$, $\nabla T = O(1/r^{3/2})$, полученных ниже. Прямой подстановкой проверяется, что фундаментальное решение однородного уравнения (1.3) есть

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi ar}e^{-\lambda s} \tag{1.4}$$

$$\lambda = |\mathbf{v}_0|/a, \quad s = r - \mathbf{n}_0\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad r = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \quad \mathbf{n}_0 = \mathbf{v}_0/|\mathbf{v}_0|$$

При помощи функции Грина $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ уравнение (1.3) можно представить в интегральной форме

$$T_0(\mathbf{x}) = -\int_E G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,q(\mathbf{y})\,d^3y -$$
$$-\oint_\Sigma \left[\left(v_{0j}T_* - a\frac{\partial T_0}{\partial y_j}\right)G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + aT_*\frac{\partial}{\partial y_j}G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right]n_j\,dS \tag{1.5}$$

в которую входит тепловой поток на поверхности тела Σ: $a\partial T_0/\partial n$, определяемый как решение соответствующих интегральных уравнений Фредгольма [6], E — объем занятый жидкостью.

При помощи оценок производных скорости для задачи обтекания [4] можно найти, что $q(\mathbf{x}) \leqslant C(|\mathbf{x}| + r_0)^{-3}$, где r_0 — характерный размер обтекаемого тела. Отсюда следует, что объемный интеграл в (1.5) существует для любой стационарной задачи обтекания.

Предполагается, что поверхность Σ удовлетворяет условиям Ляпунова. Интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю. Это можно показать при помощи оценок $G = O(1/r)$, $\nabla G = O(1/r^{3/2})$, следующих из (1.4) и условия ограниченности теплового потока на бесконечности

$$\left| \oint_{S_R} \left[\left(v_{0j} T - a \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j \, dS \right| \leqslant C < \infty \tag{1.6}$$

для сферы S_R радиуса R, используя граничное условие $T(\infty) = 0$. Фундаментальное решение этой задачи $G(\mathbf{x})$ оказывается полезным и при исследовании полных уравнений конвективного переноса тепла (1.2).

Обращая оператор в левой части (1.2) при помощи $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, приходим к интегральному уравнению

$$T(\mathbf{x}) = \int_E T w_j \frac{\partial}{\partial y_j} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y - \int_E G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, q(\mathbf{y})\, d^3y -$$

$$- \oint_\Sigma \left[\left(v_j T_* - a \frac{\partial T}{\partial y_j} \right) G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + a T_* \frac{\partial}{\partial y_j} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right] n_j dS \tag{1.7}$$

Разыскивается ограниченное дважды дифференцируемое решение уравнения (1.7), обладающее ограниченной производной по нормали к поверхности тела. Ограниченность температуры T_* и теплового потока $a\partial T/\partial n$ на Σ обеспечивает существование интеграла по поверхности.

Первый объемный интеграл в правой части (1.7) существует в силу оценок $|\mathbf{w}(\mathbf{x})| \leqslant C(|\mathbf{x}| + r_0)^{-3}$ [4], ограниченности температуры $|T| \leqslant C$ и вида $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ (1.4). Второй объемный интеграл совпадает с аналогичным интегралом в (1.5) и, следовательно, также существует. Интеграл по бесконечно удаленной поверхности, как и в предыдущем случае, равен нулю при условии ограниченности на ней полного теплового потока

$$\varkappa_\infty = \oint_{S_R} \left[\left(v_j T - a \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) n_j dS \leqslant C < \infty \quad R \to \infty$$

Уравнение (1.7) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Не вдаваясь в детали, можно считать, что уравнение (1.7) имеет обобщенное решение для каждого решения гидродинамической задачи w_j, q, если поверхность тела Σ удовлетворяет условиям Ляпунова. Обобщенное решение T определяется аналогично тому, как это было сделано [2] для поля скорости, в смысле $(\varphi, LT) = (\varphi, q)$ для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty$, L — оператор уравнения конвективной теплопроводности $L = (\mathbf{v}, \nabla) - a\Delta$. Доказательство существенно не отличается от аналогичного доказательства для уравнений Озеена [1, 2]. В частности, справедливы теоремы, аналогичные теоремам (2.6), (2.7) в [1], утверждающие, что если $q \in C^{r+\alpha}$, $r \geqslant 0$, то решение $T(\mathbf{x}) \in C^{r+2+\alpha}$, и если поверхность тела $\Sigma \in C^{r+\alpha}$, температура на границе $T \in C^{1+\alpha}$, а функция q ограничена вблизи Σ, тогда $\nabla T \in C^{0+\alpha}$, в замкнутой (внешней) окрестности Σ, и $T(\mathbf{x}) \to T_*$ на Σ.

Будем рассматривать разложение решения (1.7) в бесконечно удаленной точке. Поверхностный интеграл в (1.7) можно представить в виде разложения по мультиполям

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \oint_{\Sigma} \left[\left(v_j T - a\frac{\partial T}{\partial y_j}\right) G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + aT\frac{\partial}{\partial y_j} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right] n_j dS \qquad (1.8)$$

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \varkappa G(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_{j_1 \ldots j_n} \frac{\partial^n G(\mathbf{x})}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_n}} \qquad (1.9)$$

$$\varkappa_{j_1 \ldots j_n} = \oint_{\Sigma} \frac{(-1)^n}{n!} \left[y_{j_1} \ldots y_{j_n}\left(v_j T - a\frac{\partial T}{\partial y_j}\right) n_j + naTn_{j_1} y_{j_2} \ldots y_{j_n}\right] dS \qquad (1.10)$$

$$\varkappa_{\infty} = \oint_{S_R} \left(v_j T - a\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) n_j dS \quad R \to \infty \qquad (1.11)$$

Разложение (1.9) получается при помощи разложения функции Грина $G(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ в ряд Тейлора по $\mathbf{y}$, который абсолютно сходится, если величина $|\mathbf{x}|$ достаточно велика ($\mathbf{y} \in \Sigma$ — ограниченной поверхности). Рассмотрим объемный интеграл

$$N(\mathbf{x}) = \int_E T w_j \frac{\partial}{\partial y_j} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3 y \qquad (1.12)$$

Предварительно приведем оценку

$$|\nabla G| \leqslant \frac{e^{-\lambda s}}{4\pi a}\left[\frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{r}\sqrt{2\frac{s}{r}}\right] \leqslant \frac{C}{r^{3/2}(1+\lambda s)} \qquad (1.13)$$

которая получается из (1.4) при учете соотношений

$$|\nabla s|^2 = 2\frac{s}{r}, \quad \sqrt{x}e^{-x} < \frac{1}{1+x}, \quad x \geqslant 0$$

проверяемых непосредственно. Решение гидродинамической задачи имеет оценку [4]

$$|\mathbf{w}| \leqslant Cr^{-1}(1+\sigma s)^{-1+\varepsilon}, \ 0 < \varepsilon \leqslant 1/2, \ \sigma = 1/2\,|\mathbf{v}_0|/\nu \qquad (1.14)$$

Предполагаем также, что

$$|T(\mathbf{x})| \leqslant Cr^{-\alpha}, \ \alpha > 1/2 \qquad (1.15)$$

В этом случае к (1.12) можно применить Предложение 2 работы [4], которое сформулируем следующим образом.

Свертка

$$J(\mathbf{x}) = \int_{R^3} W(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d^3 y$$

при условии

$$|f(\mathbf{x})| \leqslant (\sigma r + 1)^{-1-\alpha}(\sigma s + 1)^{-1+\varepsilon}, \ \alpha > 1/2, \ 0 < \varepsilon \leqslant 1/2$$

$$|W(\mathbf{x})| \leqslant r^{-3/2}(\lambda s + 1)^{-1}, \ r = |\mathbf{x}|, \ s = r - \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{x}$$

имеет мажоранту

$$|J(\mathbf{x})| \leqslant Cr^{-\alpha-1/2}[\ln(\sigma r) + 1], \ \sigma r \geqslant 1$$

При помощи этого утверждения из (1.12) при учете оценок (1.13)—(1.15) получим

$$|N(\mathbf{x})| \leqslant C_1 r^{-\alpha-1/2}[\ln(\sigma r) + 1] \qquad (1.16)$$

Из разложений (1.9) и выражения (1.6) видно, что поверхностный интеграл

$$\Lambda(\mathbf{x}) = O(1/r) \qquad (1.17)$$

Из (1.16) следует, что объемный интеграл N (x) пренебрежимо мал при $r \to \infty$ по отношению к поверхностному интегралу Λ (x). Принимая во внимание разложение (1.9) в случае отсутствия объемного источника тепла ($q(\mathbf{x}) \equiv 0$), асимптотику для температуры запишем в виде

$$T(\mathbf{x}) = -\varkappa G(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}) = O(r^{-3/2} \ln(\sigma r)) \tag{1.18}$$

поскольку в соответствии с (1.17) показатель степени α в оценке (1.15) равен единице, что в свою очередь следует из (1.7) при учете (1.8), (1.12), (1.16), (1.17).

Отметим, что условие (1.15) методами работы [7] можно получить из условия ограниченности интеграла Дирихле для температуры (см. Приложение)

$$\int_E (\nabla T)^2 d^3x < \infty \tag{1.19}$$

Это условие имеет ясный физический смысл: соотношение (1.19) в совокупности с ограниченностью диссипации энергии обеспечивает ограниченность производства энтропии [8].

Если учесть объемное тепловыделение q (x) в виде диссипации кинетической энергии жидкости, то асимптотическое представление (1.18) не претерпевает заметных изменений

$$\begin{gathered} T(\mathbf{x}) = -(\varkappa + D)\, G(\mathbf{x}) + \theta(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}) = O(r^{-3/2} \ln(\sigma r)) \\ D = \int_E q(\mathbf{x})\, d^3x = \frac{v}{2c_p} \int_E \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 d^3x < \infty \end{gathered} \tag{1.20}$$

Выражение (1.20) можно обосновать, применяя соответствующие оценки для $\partial\omega_i/\partial\mathbf{x}_j$, $G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - G(\mathbf{x})$ и используя Предложение 2 работы [4]. Из уравнения теплопроводности (1.2) можно показать, что

$$\varkappa + D = \varkappa_\infty = \oint_{S_R} \left(v_j T - a \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) n_j dS, \quad R \to \infty \tag{1.21}$$

Таким образом, главный член разложения температуры (1.20) определяется точным интегралом сохранения — полным потоком тепла на бесконечности, причем согласно (1.4), (1.20)

$$T(\mathbf{x}) = O(1/r) \tag{1.22}$$

2. Рассмотрим турбулентный тепловой след. Будем исходить из осредненных уравнений конвективного переноса

$$\begin{gathered} a\Delta\overline{T} - (\mathbf{v}_0, \nabla\overline{T}) = (\mathbf{u}, \nabla\overline{T}) + \overline{(\mathbf{w}', \nabla T')} - Q(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \overline{\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{w}', \quad T = \overline{T} + T' \\ Q(\mathbf{x}) = \frac{\gamma}{2c_p} \overline{\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)^2} \end{gathered} \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) отличается от (1.2) наличием дополнительного «теплового источника» $\overline{(\mathbf{w}', \nabla T')}$, возникающего из-за наличия турбулентных тепловых напряжений. Эти напряжения могут быть получены из дополнительных уравнений относительно пульсаций w_i', T', однако, для вывода асимптотических оценок достаточно ограничиться некоторыми общими предположениями относительно асимптотического поведения $\overline{w_i' T'}$.

Обращая линейный оператор в левой части (2.1) при помощи фундаментального решения $G(x-y)$ (1.4), приходим к уравнению

$$\bar{T}(\mathbf{x}) = \int_E \overline{Tw_j} \frac{\partial}{\partial y_j} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y - \int_E G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, Q(\mathbf{y})\, d^3y -$$

$$- \oint_\Sigma \left[\left(\overline{v_j T_*} - a \frac{\partial \bar{T}}{\partial y_j} \right) G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + a\bar{T} \frac{\partial}{\partial y_j} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right] n_j dS \tag{2.2}$$

$$\overline{Tw_j} = \bar{T} u_j + \overline{T' w_j'}$$

Существование интегралов в уравнении (2.2) ввиду неизвестной асимптотики функции $\overline{T'w_j'}$ ставится под сомнение. Однако хорошо известно [9], что трехмерный след с удалением от тела ламинаризуется, причем это происходит на конечном, хотя, может быть, довольно большом расстоянии. В силу предполагаемой ограниченности полевых величин, входящих в (2.2), это означает, что на верхнем пределе в объемных интегралах можно использовать оценки для ламинарного течения (разд. 1), следовательно, можно полагать, что эти интегралы существуют и для турбулентного течения за равномерно движущимся телом.

Ограничившись этим качественным рассуждением (более строгое обоснование требует решения задачи об устойчивости относительно произвольных трехмерных возмущений ламинарного гидродинамического и теплового следа), рассмотрим объемный интеграл

$$I(\mathbf{x}, t) = \int_E Tw_j \frac{\partial}{\partial y_j} G(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d^3y \tag{2.3}$$

Используя схему доказательства теоремы об асимптотике гидродинамического следа в [7], в которой время рассматривается как параметр, из условия ограниченности интегралов типа Дирихле

$$\int_E (\nabla T)^2 d^3x \leqslant C_1, \quad \int_E \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 d^3x \leqslant C_2$$
$$C_1, C_2 = \text{const} < \infty \tag{2.4}$$

можно получить оценку (см. Приложение)

$$|I(x, t)| \leqslant C_3 r^{-\alpha}, \ \alpha \geqslant {}^2/_3, \ C_3 = \text{const} < \infty \tag{2.5}$$

Условия (2.4) представляют естественное физическое требование ограниченности производства энтропии для турбулентного движения в следе. Из (2.5) получим

$$|I(\mathbf{x})| \leqslant \overline{|I(\mathbf{x}, t)|} \leqslant C_3 r^{-\alpha}, \ I(\mathbf{x}) = \overline{I(\mathbf{x}, t)}, \ \alpha \geqslant {}^2/_3 \tag{2.6}$$

Вклад объемного интеграла от источника $Q(\mathbf{x})$ совместно с поверхностным интегралом в (2.2) аналогично тому, как это было сделано в разд. 1, можно оценить как $O(1/r)$. Таким образом, имеем оценку

$$|T(\mathbf{x})| \leqslant Cr^{-\alpha}, \ 1 \geqslant \alpha \geqslant {}^2/_3, \ C = \text{const} \tag{2.7}$$

Простые оценочные соображения для турбулентного теплового следа дают $\alpha = {}^2/_3$. Результат следует из условия задания конвективного потока тепла $J_Q \simeq \rho u_0 T \delta^2 = \text{const}$ и оценки $d\delta/dz \simeq T/T_0$ для ширины теплового следа δ, распространяющегося вдоль оси z, откуда $\delta \simeq z^{1/3}$, $T \simeq z^{-2/3}$.

В экспериментальных работах [10, 11] отмечено наличие памяти формы обтекаемого тела гидродинамическим турбулентным автомодельным следом. Из вышеизложенного следует, что память формы может иметь место лишь при $\alpha \leqslant 1$ в (2.6), (2.7). Если в (2.5), (2.6) $\alpha > 1$, то автомодельный турбулентный след будет определяться полным тепловым потоком, как это указано в разд. 1. Отметим, что в области предельной асимптотики дальнего следа памяти формы не должно быть вследствие ламинаризации течения [9] и результатов разд. 1 для ламинарного течения, согласно которым главный член разложения определяется одним интегралом сохранения — полным потоком тепла.

Далее, используя Предложение 2 работы [4], сформулированное в разд. 1, нетрудно исследовать при каких условиях может возникнуть память формы обтекаемого тела турбулентным тепловым следом.

Пусть имеет место оценка

$$|\overline{Tw_j}| \leqslant Cr^{-1-\beta}, \ \sigma > {}^1/_2, \ C = \text{const} \tag{2.8}$$

Тогда

$$|I(\mathbf{x})| \leqslant Cr^{-\beta-{}^1/_2}[\ln(\sigma r) + 1] \tag{2.9}$$

Отсюда видно, что условие $\beta > {}^1/_2$ исключает возможность памяти формы, поскольку главный член разложения определяется поверхностным интегралом, имеющим порядок $1/r$, и зависит лишь от полного потока тепла. Из соотношений (2.8), (2.9) можно получить дополнительное необходимое условие возможности памяти формы обтекаемого тела тепловым турбулентным следом в виде

$$|\overline{Tw_j}|r^{{}^3/_2} \geqslant C > 0 \ (\beta \leqslant {}^1/_2) \tag{2.10}$$

представляющее требование достаточно медленного (не быстрее $r^{-{}^3/_2}$) убывания турбулентных тепловых напряжений в области промежуточной асимптотики автомодельного турбулентного теплового следа. Соотношение (2.10) может быть использовано при экспериментальном исследовании возможности наличия памяти формы обтекаемого тела у турбулентного теплового следа.

Приложение. Покажем, следуя работе [7], что если поле температуры принадлежит классу Дирихле (1.19), то решение стационарной тепловой задачи имеет оценку (1.15). Доказательство для гидродинамической задачи [7] почти дословно можно перенести на тепловую задачу, поэтому ограничимся формулировкой соответствующих теорем с указанием необходимых, но для доказательства несущественных изменений.

Рассмотрим оператор

$$h_m(\varphi) = \int\limits_{R^3} \frac{\partial}{\partial y_m} G(x-y)\,\varphi(y)\,d^3y$$

в пространстве $L^r(R^3)$. В дальнейшем будем применять обозначение [7]

$$|f|_{D,r} = \left(\int\limits_D |f(\mathbf{x})|^r d^3x\right)^{1/r}$$

и, если $D = R^3$ или $D = E$, писать просто $|f_r|$. Ось x_1 направлена вдоль скорости обтекания $\mathbf{v}_0$.

Предложение 1. Если $m = 1$, то h_m — оператор из L^r в L^r, причем

$$|h_1(\varphi)|_r \leqslant A_r|\varphi_r|, \ 1 < r < 4$$

Это утверждение, как и его доказательство, полностью аналогично Предложению 1 из работы [7]. Следует только заметить, что преобразование Фурье $\partial G/\partial x_m$

$$g_m(\mathbf{u}) = \int\limits_{R^3} \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial x_m} e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}} d^3x$$

имеет вид

$$g_m(\mathbf{u}) = iu_m/(u^2 - 2i\lambda u_1)$$

откуда при помощи результатов С. Г. Михлина и П. И. Лизоркина, цитируемых в [7], следует искомое утверждение.

Не претерпевают изменений следующие утверждения [7].

Предложение 2. (Частный случай теоремы Соболева). Пусть функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C(R^3)$ абсолютно непрерывна по каждому из переменных при условии, что остальные переменные принимают произвольные фиксированные значения, и пусть она имеет конечный интеграл Дирихле $|\nabla\varphi|_2 < \infty$. Предположим еще, что $\varphi(\mathbf{x}) \to 0$ при $|\mathbf{x}| \to \infty$. Тогда имеет место неравенство $|\varphi|_6 \leqslant A\,|\nabla\varphi|_2$, где A — абсолютная постоянная.

Предложение 3. Пусть φ удовлетворяет условиям Предложения 2 и, кроме того, $\varphi_{x_i}|_r < \infty$, где $1 < r < 2$.

Тогда

$$|\varphi_{3r}| \leqslant B\,[\,|\varphi_{x_1}|_r\,|\varphi_{x_2}|_r\,|\varphi_{x_3}|_r], \quad B = [3r^2(3r-2)]^{1/3}$$

При помощи Предложения 2, используя возможность финитного продолжения поля температуры в окрестность поверхности Σ (поле температуры внутри тела можно, например, найти, решив уравнение Лапласа при соответствующих граничных условиях $T_*(\mathrm{s})$), найдем $|T|_6 < \infty$.

Предложение 4. Имеет место соотношение $|T|_4 < \infty$.

Это утверждение полностью аналогично Предложению 4 работы [7] ($|\mathbf{v}|_4 < \infty$). Доказательство основано на анализе равенства (1.7). Исследуются производные по x_1 отдельно для объемного и поверхностного интегралов в правой части (1.7). Можно непосредственно проверить, что все соотношения в доказательстве работы [7] остаются справедливыми при замене $H_{ij} \to G$, $\mathbf{v} \to T$, откуда и следует Предложение 4.

Предложение 5 работы [7] относится к интегрируемости давления и в нашем случае не используется. Далее в работе [7] следуют три предложения, направленные на доказательство утверждения, что $|\mathbf{v}|_r < \infty$, если $r < 4$, но достаточно близко к четырем. Для этого использованы [7] вспомогательные построения, в частности, введено усеченное фундаментальное решение, отличное от нуля в непосредственной окрестности следа. Эта часть работы содержит довольно громоздкие доказательства, воспроизводить которые, вводя малосущественные изменения, вряд ли имеет смысл. Отметим только, что доказательства существенно опираются на интегральное уравнение вида (1.7). Сравнивая уравнение (1.7) с соответствующим уравнением (1.15), (2.9) работы [7], можно заметить их большое сходство и показать, что в рассматриваемом случае схема доказательства К. И. Бабенко [7] остается справедливой; при этом достаточно произвести замену $H_{ij} \to G$, $\mathbf{v} \to T$. Это обосновывается одинаковыми функциональными свойствами фундаментальных решений H_{ij} и G, одинаковым асимптотическим их поведением, вместе с производными любого порядка, одинаковой структурой соответствующих интегральных уравнений.

Предложение 9. Для всех $r > 2$ справедливо неравенство $|T|_r < \infty$.

Предложение 10. Пусть

$$\varphi(\xi) = \max_{|\mathbf{x}|\geqslant\xi} |T(\mathbf{x})|, \quad \xi \geqslant 1$$

Тогда существует $\xi^* > 0$ такое, что

$$\varphi(\xi) < (8/\xi)^{1/\beta} \text{ при } \xi > \xi^*, \quad \beta = {}^3/_2 - \varepsilon, \; 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Доказательство дословно повторяет доказательства Предложений 9, 10 работы [7] с заменой $\mathbf{v} \to T$.

Отсюда можно получить оценку

$$|T(\mathbf{x})| \leqslant C\,|\mathbf{x}|^{-\alpha}, \quad \alpha \geqslant {}^2/_3$$

и тем самым выполнено неравенство (1.15).

Поскольку доказательство К. И. Бабенко [7] опирается лишь на ряд оценок интегральных операторов и использует только довольно общие свойства оцениваемого решения, его схема может быть применена к широкому классу задач, где имеются аналогичные операторы. В частности, кроме рассмотренной стационарной тепловой задачи обтекания тела можно рассмотреть турбулентный тепловой и гидродинамический след. Следует ожидать, что оценки интегральных операторов, имеющих в качестве ядер то же фундаментальное решение, существенно не изменятся. Здесь удобно осреднение по времени или ансамблю проводить в уже сделанных оценках, где время считается параметром. Проводя последовательно это рассуждение, приходим к оценке сред ней температуры в виде (2.7), которая справедлива и для ламинарного следа, но в отличие от ламинарного случая Предложение 2 работы [4] применять здесь уже нельзя. Это связано с тем, что тепловые напряжения $\overline{w_j'T'}$, равно как и напряжения Рейнольдса $\overline{w_i'w_j'}$, могут не убывать по требуемому закону $\simeq r^{-\alpha}$, $\alpha > {}^3/_2$. Поэтому в турбулентной области дальнего следа вклад объемного интеграла в (2.2) может быть не малым. Не исключено, что именно этим обусловлено наличие памяти формы обтекаемого тела у гидродинамического следа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Finn R.* On the exterior stationary problem for the Lavier — Stokes equations, and associated perturbation problems // Arch. Ration. Mech. Anal. 1965. V. 19. N 5. P. 363—406.
2. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
3. *Finn R.* On steady-state solutions of the Navier-Stokes partial differential equations // Arch. Ration. Mech. Anal. 1959. V. 3. N 5. P. 381—396.
4. *Бабенко К. И.*, *Васильев М. М.* Об асимптотическом поведении стационарного течения вязкой жидкости вдали от тела // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 690—705.
5. *Мартыненко О. Г.*, *Коровкин В. Н.*, *Соковишин Ю. А.* Теория ламинарных струй. Минск: Наука и техника, 1985. 286 с.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.: Физматгиз, 1958. 812 с.
7. *Бабенко К. И.* О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // Мат. сб. 1973. Т. 91. № 1. С. 3—26.
8. *Гленсдорф П.*, *Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.
9. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. *Букреев В. И.*, *Васильев О. Ф.*, *Лыткин Ю. М.* О влиянии формы тела на характеристики автомодельного асимптотического следа // Докл. АН СССР. 1972. Т. 207. № 4. С. 804—807.
11. *Черепанов П. Я.*, *Дмитренко Ю. М.* О влиянии формы тела на характеристики автомодельного плоского следа // Инж.-физ. ж. 1988. Т. 54. № 6. С. 912—919.

Новосибирск

Поступила в редакцию 31.VIII.1990