

УДК (531.355 + 532.5): 534.1

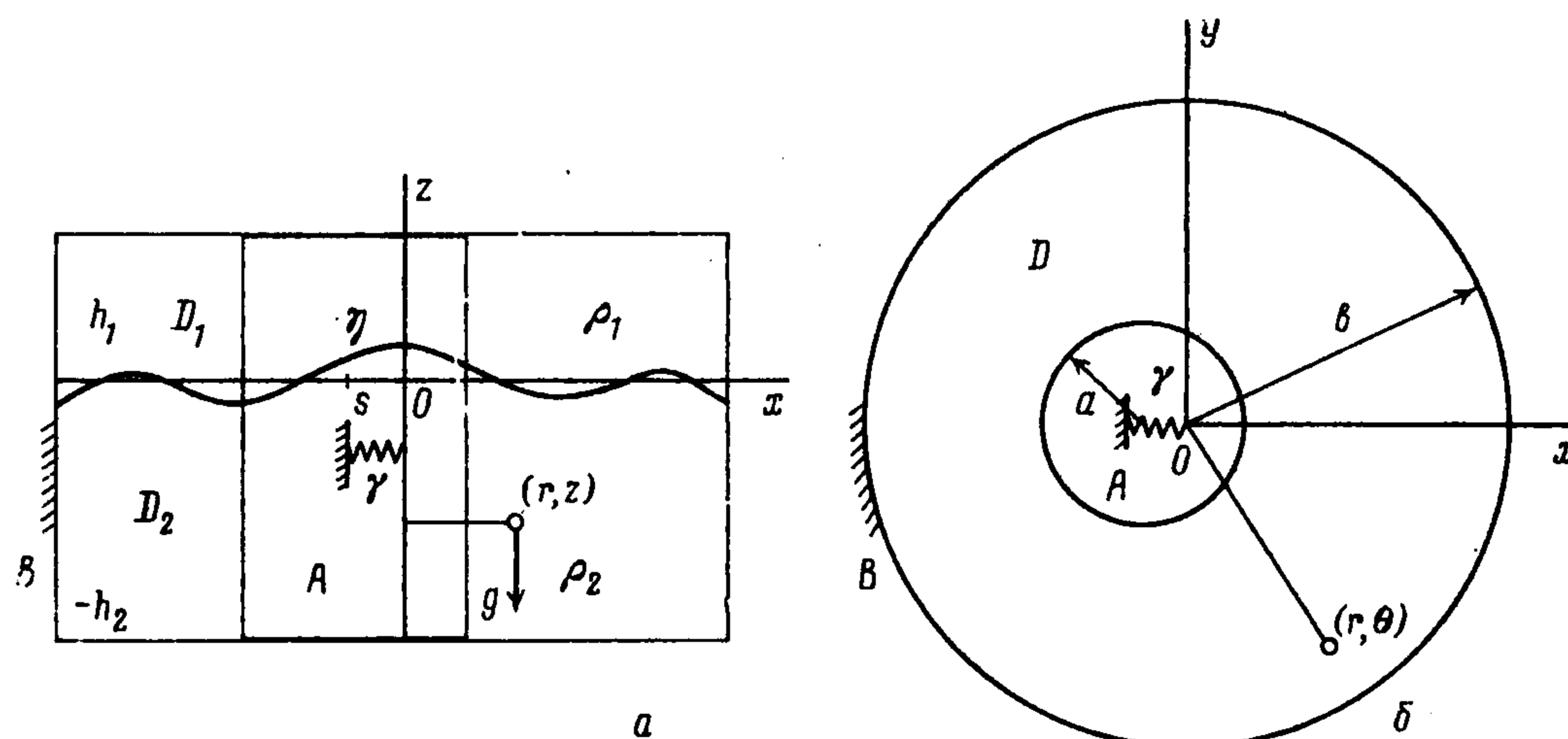
© 1991 г.]

Л. Д. Акуленко, С. В. Нестеров

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРА В КОНЦЕНТРИЧЕСКОМ СОСУДЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается гибридная колебательная система, содержащая твердое тело (цилиндр) на упругой связи в коаксиальной цилиндрической полости, целиком заполненной тяжелой идеальной устойчиво стратифицированной двухслойной жидкостью. Изучены совместные самосогласованные колебания тела и жидкости (внутренних волн). Получено явное решение внутренней краевой задачи для неоднородной жидкости в кольцевой области при заданном движении тела. На его основе построено интегродифференциальное уравнение типа Ньютона, описывающее самосогласованные колебания цилиндра. В случае слабой связи взаимодействия между телом и средой асимптотическими методами получено приближенное решение и проведен анализ; обнаружены качественные эффекты взаимного влияния движений цилиндра и жидкости.

1. Описание механической модели. Исследуются движения гибридной колебательной системы, схематически представленной на фигуре (*a* — вид сбоку или спереди, *b* — вид сверху). Имеется неподвижный цилиндрический сосуд *B* радиуса *b*, ось симметрии которого *z* направлена по вертикали. С сосудом связана инерциальная система координат *xuz*. В него коаксиально помещен цилиндр *A* радиуса *a*, $a < b$, причем $b - a \sim b$.



Высоты сосуда и цилиндра совпадают и равны h . Предполагается, что внутренний цилиндр *A* может перемещаться плоскопараллельно без трения со стороны торцевых стенок. Образующие и торцевые стенки полости *B* и движущегося тела *A* считаются абсолютно жесткими.

Сосуд *B* целиком заполнен идеальной двухслойной жидкостью: верхний слой имеет толщину $h_1 > 0$ и плотность $\rho_1 \geq 0$; нижний слой — толщину $h_2 > 0$ ($h_1 \sim h_2 \sim h$) и плотность ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$), т. е. жидкость устойчиво стратифицирована. На частицы жидкости действует сила тяготения, величина ускорения которой равна g , а направление — вертикально вниз (фигура). Внутреннее тело *A* упругим образом связано с неподвижным сосудом *B* так, что в положении равновесия оси совпадают; связь предполагается линейной с коэффициентом γ . Для определенности предположим, что цилиндр может перемещаться вдоль оси *x*; переменная $s = s(t)$ характеризует отклонение цилиндра от положения равновесия

$s = 0$. Будем считать, что невозмущенная поверхность раздела лежит в плоскости $z = 0$, т. е. плоскости xy (как изображено на фигуре).

Механическая постановка задачи заключается в следующем. В начальный момент времени $t = 0$ внутренний цилиндр считается смещенным вдоль оси x на малое расстояние s^0 , $|s^0| \ll b - a \sim b \sim a$; поверхность раздела двух слоев жидкости горизонтальна, жидкость покоится. Цилиндр A отпускается и приходит в движение без начальной скорости под действием сил упругой возвращающей силы и реакции со стороны жидкости. Требуется определить движения цилиндра A , кинематические и динамические характеристики жидкости в полости B , а также внутренних волн, возникающих на поверхности раздела.

2. Постановка краевой задачи для жидкости при заданном движении тела. Волновые движения жидкости рассматриваются в линейном приближении [1]. Вследствие осевой (цилиндрической) симметрии задачи удобно ввести соответствующие координаты (r, θ, z) , изменяющиеся в пределах

$$a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -h_2 \leq z \leq h_1$$

Отметим, что жидкость занимает область $D = B \setminus A$, где \setminus — операция вычитания перемещающегося множества A из фиксированного множества B . Эта область D является неодносвязной. Обозначим через Φ_1 и Φ_2 потенциалы скоростей в каждом кольцевом слое D_1 ($h_1 \geq z > 0$) и D_2 ($-h_2 \leq z < 0$), $D = D_1 \cup D_2$. Представим их в виде

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} &= \Phi_{1,2}(t, r, \theta, z) = \Phi_0(t, r, \theta) + \Phi_{1,2}(t, r, \theta, z) \\ \Phi_0 &= \Phi_0(t, r, \theta) = a^2 (r^2 + b^2) (b^2 - a^2)^{-1} r^{-1} s'(t) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.1)$$

Первый член Φ_0 представляет собой потенциал скоростей, создаваемый движущимся со скоростью $s' = s'(t)$ цилиндром A . Он обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_0 &= 0, \quad (r, \theta, z) \in D \\ -\Phi_{0r}'|_{r=a} &= s'(t), \quad \Phi_{0r}'|_{r=b} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь время t рассматривается как параметр. Лапласиан Δ удобнее представить в цилиндрических координатах (r, θ, z) . Штрихи означают производные по указанным внизу пространственным переменным; точкой обозначается производная по времени t . Функции $\Phi_{1,2}$ зависят также и от переменной z ; они неизвестны и подлежат определению, $s'(t) = ds(t)/dt$ — скорость смещения цилиндра A вдоль оси x . Потенциалы скоростей волнового движения жидкостей должны определяться как решения уравнения Лапласа в соответствующих областях

$$\Delta \Phi_{1,2} = 0, \quad (r, \theta, z) \in D_{1,2} \quad (D = D_1 \cup D_2) \quad (2.3)$$

удовлетворяющие динамическим и кинематическим краевым условиям на границе раздела жидкостей $z = 0$ (линейная теория)

$$\begin{aligned} \rho_2 (\Phi_2' - g\eta)_{z=0} - \rho_1 (\Phi_1' - g\eta)_{z=0} &= -(\rho_2 - \rho_1) \Phi_0' \\ \eta' &= -\Phi_{1z}'|_{z=0} = -\Phi_{2z}'|_{z=0} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\eta = \eta(t, r, \theta)$ — неизвестная функция, определяющая форму поверхности раздела жидкостей. Кроме того, на твердых границах обоих цилиндров должны выполняться условия непротекания жидкостей (непроницаемости стенок), т. е. равенство нулю скоростей частиц жидкости на границе области D :

$$\Phi_{1z}'|_{z=h_1} = \Phi_{1r}'|_{r=a,b} = \Phi_{2z}'|_{z=-h_2} = \Phi_{2r}'|_{r=a,b} = 0 \quad (2.5)$$

В соответствии с принятыми в разд. 1 допущениями начальные условия для потенциалов $\Phi_{1,2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2}(0, r, \theta, z) &= 0, \quad (r, \theta, z) \in D_{1,2} \\ (\rho_2 \Phi_2 - \rho_1 \Phi_1)_{t=0, z=0} + (\rho_2 - \rho_1) \Phi_0(0, r, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Первое условие также означает равенство нулю скоростей частиц жидкости, а второе означает, что форма поверхности $\eta|_{t=0}$ раздела является плоской ($\eta(0, r, \theta) = 0$) (см. первое условие (2.4)).

Итак, при известном (заданном) движении $s(t)$ цилиндра A для стратифицированной жидкости поставлена краевая задача (2.3)—(2.5) с начальными условиями (2.6), решение которой $\Phi_{1,2}(t, r, \theta, z)$, $\eta(t, r, \theta)$ требуется определить. На его основе определяются динамические характеристики жидкости (в частности, давления на поверхности движущегося цилиндра A) и вычисляются силы, действующие на внутреннее тело со стороны жидкости. Затем составляется интегродифференциальное уравнение динамики типа Ньютона для смещения $s = s(t)$ цилиндра с учетом всех действующих на цилиндр сил. Вычисление $s(t)$ позволяет в замкнутом виде получить выражения для искомых кинематических и динамических характеристик жидкости (см. далее).

В идейном плане постановка задачи примыкает к исследованиям авторов [2], относящимся к динамике сосуда, содержащего двухслойную жидкость и упруго связанного с неподвижным основанием. В исследовании гидродинамической части проблемы однако рассматриваемая задача имеет глубокие отличия от рассмотренной в [2]. Ее решение существенно труднее, что в первую очередь обуславливается большей сложностью и неодносвязностью области D . Отметим, что в общем случае форма полости D переменна и зависит от движения внутреннего тела A . Однако при малых смещениях s ($s \ll a, b - a$) в линейном приближении этим обстоятельством можно пренебречь.

3. Решение краевой задачи. Выражения для неизвестных потенциалов $\Phi_{1,2}$ и возвышения η представляем на основе метода разделения переменных в виде рядов

$$\Phi_{1,2} = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n^{(1,2)}(t) \psi_n(\lambda_n r) \operatorname{ch}(\lambda_n z_{1,2}) \quad (3.1)$$

$$\eta = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) \psi_n(\lambda_n r) \quad (z_{1,2} = h_{1,2} \mp z)$$

Приведенная в (3.1) зависимость от θ и z следует из (2.3)—(2.5). Функции ψ_n и числа λ_n ($n \geq 1$) — решение задачи на собственные значения и функции Штурма — Лиувилля вида

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) + \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2} \right) \psi &= 0, \quad a \leq r \leq b \\ \psi_r' |_{r=a, b} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Собственные функции $\psi_n = \psi_n(\lambda_n r)$ выражаются через функции Бесселя J_1 и Неймана N_1 первого порядка следующим образом:

$$\psi_n(\lambda_n r) = J_1(\lambda_n r) N_1'(\lambda_n a) - J_1'(\lambda_n a) N_1(\lambda_n r), \quad a \leq r \leq b \quad (3.3)$$

Собственные числа λ_n ($n \geq 1$) определяются как двухпараметрическое семейство решений трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} J_1'(\lambda b) N_1'(\lambda a) - J_1'(\lambda a) N_1'(\lambda b) &= 0 \\ \lambda_n &= \lambda_n(a, b), \quad n = 1, 2, \dots; \quad \lambda_n = O(n), \quad n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введением параметра $\xi = a\lambda$ (или $\xi = b\lambda$) уравнение (3.4) приводится к виду, при котором корни $\xi_n = \xi_n(\mu)$, где $\mu = b/a > 1$ (или $\mu = a/b < 1$). Таким образом, решение характеристического уравнения сводится к построению однопараметрического семейства корней $\xi_n(\mu)$ для значений $\mu > 1$ (или $0 < \mu < 1$), что более удобно с вычислительной точки зрения.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции $\Phi_{1,2}$ (3.1) удовлетворяют уравнению Лапласа и граничным условиям (2.5), заданным на абсолютно твердых стенках (на границе области D). Используя динамические и кинематические условия (2.4), выполняющиеся в линейном приближении на границе раздела двух жидкостей, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных коэффициентов Фурье $\Theta_n^{(1,2)}(t)$, $\Theta_n(t)$ ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned} \rho_2 (\Theta_n^{(2)})'' \operatorname{ch} \lambda_n h_2 - g\Theta_n - \rho_1 (\Theta_n^{(1)})' \operatorname{ch} \lambda_n h_1 - g\Theta_n = \\ = -(\rho_2 - \rho_1) B_n s''(t), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\Theta_n' = \Theta_n^{(1)} \lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n h_1 = -\Theta_n^{(2)} \lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n h_2$$

$$B_n \equiv \frac{a^2}{(b^2 - a^2) \|\psi_n\|^2} \int_a^b (b^2 + r^2) \psi_n(\lambda_n r) dr, \quad \|\psi_n\|^2 = \int_a^b r \psi_n^2(\lambda_n r) dr$$

Оценки коэффициентов B_n , $\|\psi_n\|$ имеют вид $B_n \sim n^{-1}$, $\|\psi_n\| \sim 1$. Дифференцируя первое уравнение (3.5) и исключая неизвестную Θ_n при помощи второго, получим для определения $\Theta_n^{(2)}$ и $\Theta_n^{(1)}$ соотношения

$$\Theta_n^{(2)''} + \omega_n^2 \Theta_n^{(2)} = -(g\lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n h_2)^{-1} B_n \omega_n^2 s'''(t) \quad (3.6)$$

$$\Theta_n^{(1)} = -\Theta_n^{(2)} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n h_2}{\operatorname{sh} \lambda_n h_1}, \quad \omega_n^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1) \lambda_n \operatorname{th} \lambda_n h_1 \operatorname{th} \lambda_n h_2}{\rho_1 \operatorname{th} \lambda_n h_2 + \rho_2 \operatorname{th} \lambda_n h_1}$$

Здесь ω_n ($n = 1, 2, \dots$) — собственные частоты колебаний стратифицированной жидкости в кольцевой области D . Отметим, что $\omega_{n+1} - \omega_n \sim 1/\sqrt{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. собственные частоты сгущаются и имеют единственную точку сгущения на бесконечности. По виду формула (3.6) совпадает с полученными авторами в [2] для прямоугольной односвязной области. В уравнении (3.6) для $\Theta_n^{(2)}(t)$ пока предполагается, что функция $s(t)$ трижды непрерывно дифференцируема. Общее решение для $\Theta_n^{(2)}(t)$ запишем в виде

$$\Theta_n^{(2)}(t) = \frac{-B_n \omega_n}{g\lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n h_2} \left[\int_0^t \sin \omega_n(t-\tau) s'''(\tau) d\tau + \alpha_n \sin \omega_n t + \beta_n \cos \omega_n t \right]$$

где α_n, β_n — произвольные постоянные. Интегрируя по частям, получим выражение для общего решения $\Theta_n^{(2)}$ в более подходящем для дальнейшего исследования виде

$$\begin{aligned} \Theta_n^{(2)}(t) = \frac{-B_n \omega_n}{g\lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n h_2} \left[-s''(0) \sin \omega_n t + \omega_n s'(t) - \omega_n^2 \int_0^t \sin \omega_n(t-\tau) s'(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \alpha_n \sin \omega_n t + \beta_n \cos \omega_n t \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функция $\Theta_n^{(1)}$ получается из $\Theta_n^{(2)}$ (3.7) умножением на постоянный коэффициент согласно (3.6). На основе начальных условий (2.6) для потенциалов $\Phi_{1,2}$ получаем начальные условия для коэффициентов $\Theta_n^{(1,2)}$

и производных

$$\Theta_n^{(1,2)}(0) = 0, \quad \rho_2 \Theta_n^{(2)}(0) \operatorname{ch} \lambda_n h_2 - \rho_1 \Theta_n^{(1)}(0) \operatorname{ch} \lambda_n h_1 + \\ + (\rho_2 - \rho_1) B_n s''(0) = 0 \quad (3.8)$$

Равенства (3.8) выполняются, если положить $\alpha_n = s''(0)$, $\beta_n = 0$. В итоге получаются окончательные выражения для коэффициентов $\Theta_n^{(1,2)}$ ($n \geq 1$):

$$\Theta_n^{(1,2)}(t) = \frac{\pm B_n \omega_n}{g \lambda_n \operatorname{sh} \lambda_n h_{1,2}} \left[\omega_n s'(t) - \omega_n^2 \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) s'(\tau) d\tau \right] \quad (3.9)$$

При учете выражений (3.9) получаем искомые представления для потенциалов $\varphi_{1,2}$ (2.1). Они задаются как линейные интегральные операторы от неизвестной $s'(t)$. Переменная $s(t)$ подлежит определению [1, 2]. Для составления уравнений движения внутреннего цилиндра A необходимо вычислить силы реакции со стороны колеблющейся жидкости.

4. Движение внутреннего цилиндра. Чтобы вычислить результирующую сил давлений, действующих на внутренний цилиндр A , нужно найти производные по времени $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$ потенциалов скоростей в каждом кольцевом слое D_1 , D_2 . С этой целью продифференцируем ряды (2.1), (3.1), (3.9) и найдем распределения нормальных давлений при помощи линеаризованного интеграла Бернулли

$$p = \rho \dot{\varphi} - \rho g y, \quad p = p_{1,2}, \quad \rho = \rho_{1,2} \\ \varphi = \varphi_{1,2}, \quad (r, \theta, z) \in D_{1,2} \quad (4.1)$$

Проекция сил нормальных давлений $R = (X, Y, Z)^T$ (реакций) со стороны жидкости на движущийся цилиндр A таковы:

$$X = -a \int_0^{2\pi} \int_{-h_2}^h \rho \dot{\varphi}|_{r=a} \cos \theta d\theta dz = \\ = - \left[\pi a^2 \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) - \frac{\pi a}{g} (\rho_2 - \rho_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \omega_n^2}{\lambda_n^2} \psi_n(\lambda_n a) \right] s''(t) - \\ - \frac{\pi a}{g} (\rho_2 - \rho_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \omega_n^4}{\lambda_n^2} \psi_n(\lambda_n a) \int_0^t \cos \omega_n (t - \tau) s'(\tau) d\tau \\ Y = Z \equiv 0 \quad (\rho = \rho(z)) \\ (Z_{\Sigma} = Z + Z_A - M_A g + Z_* = 0) \quad (4.2)$$

Здесь учтено, что интегрирование сил гидростатического давления дает нулевую проекцию на оси Ox , Oy . Далее, в (4.2) величина Z_A — выталкивающая сила Архимеда, $M_A g$ — сила веса внутреннего цилиндра, Z_* — сила нормальной реакции в его торцах со стороны полости; кроме того, вдоль оси Ox на цилиндр A действует линейная упругая сила с коэффициентом жесткости γ . В результате получаем интегродифференциальное уравнение движения типа Ньютона с начальными условиями

$$M_A s'' = -\gamma s + X(s'', [s']), \quad s(0) = s^0, \quad s'(0) = 0 \quad (4.3)$$

Из анализа выражения (4.2) силы X в (4.3) следует, что сила X содержит инерционную добавку, пропорциональную $s''(t)$ и обусловленную присоединенными массами (стационарного и динамического характера), а также интегральное от $s'(t)$ слагаемое, учитывающее взаимодействие волн и цилиндра. Это взаимодействие описывается интегральным опера-

тором типа Вольтерры. Из (4.2), (4.3) с очевидностью следует, что при $\gamma = 0$ смещение $s(t) \equiv s^0$, $t \geq 0$ ($s'(t) \equiv 0$).

Преобразуем теперь задачу Коши (4.3) к более удобной для анализа форме:

$$s'' + \Omega^2 s = -\varepsilon \int_0^t K(t-\tau) s'(\tau) d\tau, \quad s(0) = s^0, \quad s'(0) = 0$$

$$\Omega^2 = \frac{\gamma}{M^*}, \quad M^* = M_A + \pi a^2 \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) + 2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \omega_n^2}{\lambda_n^3} \quad (4.4)$$

$$\varepsilon K(t) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{M^* g} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \omega_n^4}{\lambda_n^3} \cos \omega_n t \equiv \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cos \omega_n t$$

Здесь Ω — характерная частота колебаний цилиндра A , M^* — его эффективная масса, $\varepsilon > 0$ — числовой параметр; например $\varepsilon = 2\pi a^2 h (\rho_2 - \rho_1) / M^*$, $K(t-\tau)$ — разностное ядро интегрального оператора. Соответствующий тригонометрический ряд для $K(t)$ абсолютно и равномерно сходится для всех $t \geq 0$, поскольку согласно (3.5), (3.6) для B_n , ω_n имеют место оценки: $B_n \sim \lambda_n^{-1} \sim n^{-1}$, $\omega_n \sim \lambda_n^{1/2} \sim \sqrt{n}$ при $n \rightarrow \infty$, а коэффициенты $k_n \sim n^{-2}$. Отметим, что по внешнему виду задача (4.4) совпадает с полученной в [2].

Точное решение задачи Коши (4.4) можно построить при помощи операторных методов, однако оно оказывается непригодным для качественного анализа [2]. В общем случае для расчета движений на некотором ограниченном интервале времени могут применяться численные методы. Если взаимодействие цилиндра и внутренних волн слабое, т. е. числовой параметр ε достаточно мал ($0 < \varepsilon \ll 1$), то для качественного анализа системы (4.4) можно применять асимптотические методы усреднения, развитые авторами в [2, 3], математическое обоснование которых дано в [4]. Приведем результаты этого анализа.

Сперва рассмотрим случай «внутреннего резонанса», когда для «не слишком большого значения» $n = N = 1, 2, \dots$ имеет место близость частоты ω_N и Ω : $|\Omega - \omega_N| = O(\sqrt{\varepsilon})$. Тогда согласно [2] имеем

$$s_* = s^0 \cos \sqrt{\varepsilon k_N t} \cos \Omega t, \quad |s - s_*| = O(\sqrt{\varepsilon})$$

$$v_* = -s^0 \Omega \cos \sqrt{\varepsilon k_N t} \sin \Omega t, \quad |s' - v_*| = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad (4.5)$$

$$0 \leq t \leq c / \sqrt{\varepsilon}, \quad c = \text{const}$$

Из (4.5) следует, что в системе происходят «биения», т. е. амплитуда S колебаний цилиндра A изменяется периодически с малой частотой $\sim \sqrt{\varepsilon}$, поскольку имеем $S = s^0 \cos \sqrt{\varepsilon k_N t}$. Между цилиндром и жидкостью происходит медленный обмен энергией; на начальном этапе происходит передача энергии E колебаний цилиндра внутренним волнам N -й моды и изменение его полной энергии до значений $O(\sqrt{\varepsilon})$, т. е. практически до нуля (при малых ε): $E = E^0 \cos^2 \sqrt{\varepsilon k_N t} + O(\sqrt{\varepsilon})$, а затем вновь «раскачка» цилиндра посредством воздействия N -й моды колебаний внутренних волн. Математические детали анализа содержатся в [2].

Значительный интерес в теоретическом и прикладном аспектах представляет исследование движений для существенно больших значений t , $t \geq 1 / \sqrt{\varepsilon}$, например $t \sim 1 / \varepsilon$ или $t \rightarrow \infty$. Из физических соображений ясно, что картина биений будет размываться; учет диссипации естествен-

но приведет к затуханию колебаний цилиндра и внутренних волн жидкости.

Рассмотрим случай отсутствия «внутреннего резонанса», т. е. когда $|\Omega - \omega_n| = O(1)$ для $n = 1, 2, \dots$. Тогда в соответствии с результатами [3] имеем:

$$\begin{aligned} s^* &= s^0 \cos vt, & |s - s^*| &= O(\varepsilon) \\ v^* &= -s^0 \Omega \sin vt, & |s' - v^*| &= O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$v = v(\varepsilon) = \Omega(1 + \varepsilon\Lambda/4), \quad \Lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\Omega^2 - \omega_n^2}$$

$$\Lambda \gtrless 0; \quad 0 \leq t \leq c/\varepsilon, \quad c = \text{const}$$

Из (4.6) следует, что при отсутствии резонанса для $t \sim 1/\varepsilon$ практически не происходит взаимодействия колебаний цилиндра с жидкостью (биения отсутствуют, энергия цилиндра для малых $\varepsilon > 0$ сохраняется). Однако колебания цилиндра имеют смещенную на величину $O(\varepsilon)$ частоту. Добавка к частоте может быть больше или меньше нуля, что представляется весьма интересным явлением. Как и ранее, в случае отсутствия резонанса представляет интерес вопрос о глобальной перестройке движения для $t \gtrsim 1/\varepsilon$ ($t \rightarrow \infty$).

Полученные выше результаты справедливы для произвольных значений параметров a, b, h_1, h_2 и других в указанных областях их изменения. Существенный интерес представляют предельные случаи, например, $a/b \ll 1$ ($a \rightarrow 0, b \sim 1$) или $b/a \gg 1$ ($a \sim 1, b \rightarrow \infty$) и т. п. Первый указанный случай, по-видимому, может быть исследован на основе построений разд. 2—4. Случай $b \rightarrow \infty$ является особым, так как спектр частот внутренних волн сгущается, т. е. собственные значения λ_n в пределе становятся непрерывными. Это обстоятельство существенно и требует отдельного рассмотрения.

Если решение $s(t)$ задачи Коши (4.4) построено в аналитической или численной форме, то определение всех кинематических и динамических характеристик движений жидкости проводится в соответствии с построениями разд. 2, 3 и формулы (4.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую неоднородную жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 1. С. 27—36.
3. Акуленко Л. Д., Нестеров С. В. Нерезонансные колебания твердого тела с полостью, содержащей тяжелую двухслойную жидкость // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 2. С. 52—58.
4. Акуленко Л. Д. Исследование квазилинейных колебаний механических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 392—401.