Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 532.51

М. А. Брутян, П. Л. Крапивский

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Найдено точное выражение для критического числа Рейнольдса (R_*) потери устойчивости в широком классе одномерных периодических течений. В случае малой надкритичности ($R - R_* \ll 1$) выведено эволюционное уравнение, описывающее динамику вторичной вихревой структуры.

Течение, индуцированное периодической по одной из координат массовой силой, в наиболее общем виде описывается функцией тока

$$\psi = f(y) \tag{0.1}$$

где f — произвольная гладкая периодическая функция. Во всех предшествующих работах рассматривался простейший случай: $f = \cos y$. Вопрос об устойчивости такого течения поставил А. Н. Колмогоров в 1959 г. Эта задача исследовалась в линейном и слабонелинейном приближениях в [1—4]; устойчивость течения Колмогорова в неньютоновской жидкости изучалась в [5, 6]; устойчивость трехмерных аналогов — в [7—10].

Цель настоящей работы — исследование устойчивости широкого класса (0.1) периодических однонаправленных безграничных течений вязкой несжимаемой жидкости.

1. Постановка задачи. Введение медленных переменных. Рассмотрим устойчивость одномерного периодического течения (0.1) вязкой несжимаемой жидкости. Все переменные считаем безразмерными, период функции f принимаем равным 2π. Поскольку функция тока определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной, будем полагать, что

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,dy = 0 \tag{1.1}$$

Как и во всех предшествующих работах, при анализе устойчивости ограничимся двумерными возмущениями.

В случае малой надкритичности, когда число Рейнольдса R слабо отличается от критического значения R_*, удобно ввести малый параметр ε по формуле

$$R^{-1} = R_*^{-1}(1 - \varepsilon^2) \tag{1.2}$$

Проведем теперь деформацию пространственно-временных координат

$$T = \varepsilon^4 t, \quad X = \varepsilon x, \quad Y = y \tag{1.3}$$

Аргументы в пользу такого выбора масштабов были впервые сформулированы [11—13] применительно к исследованию устойчивости конвективных течений; для течения Колмогорова было показано [14], что использование масштабного преобразования (1.2), (1.3) позволяет сравнительно просто получить основные результаты линейной теории устойчивости [1, 2] наряду с основными результатами в слабонелинейной теории.

В новых переменных уравнение для функции тока принимает вид

$$\varepsilon^4 \frac{\partial}{\partial t}(\psi_{yy} + \varepsilon^2\psi_{xx}) + \varepsilon \frac{\partial(\psi_{yy}, \psi)}{\partial(x, y)} + \varepsilon^3 \frac{\partial(\psi_{xx}, \psi)}{\partial(x, y)} =$$
$$= R_*^{-1}(1 - \varepsilon^2)(\psi_{yyyy} + 2\varepsilon^2\psi_{yyxx} + \varepsilon^4\psi_{xxxx} - f'''') \quad (1.4)$$

В (1.4) и всюду далее использованы новые переменные T, X, Y, которые для удобства обозначены прежними буквами t, x, y соответственно, штрихом обозначена производная функции f по y.

Поскольку возмущенное течение естественно предполагается периодическим по y, проинтегрируем уравнение (1.4) по периоду. В результате приходим к интегральному соотношению

$$\varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_{xx}\rangle + \frac{\partial}{\partial x}\langle\psi_y\psi_{xx}\rangle = \varepsilon(1 - \varepsilon^2) R_*^{-1}\langle\psi_{xxxx}\rangle \quad (1.5)$$

которое в дальнейшем используется для вычисления критического числа R_*.

2. Определение критического числа Рейнольдса. Решение задачи ищем в виде асимптотического разложения

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \varepsilon^2\psi_2 + \ldots \quad (2.1)$$

В нулевом приближении уравнение (1.4) дает

$$\psi_{0yyyy} = f'''' \quad (2.2)$$

так что периодическое решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\psi_0 = f(y) + \Phi_0(x, t) \quad (2.3)$$

Интегральное соотношение (1.5) в нулевом приближении $\langle\psi_{0y}\psi_{0xx}\rangle_x = 0$ автоматически выполняется на решении (2.3).

В первом приближении из соотношений (1.4) и (2.3) получаем: $f'''\Phi_{0x} + R_*^{-1}\Phi_{1yyyy} = 0$. Следовательно,

$$\psi_1 = -R_*\Phi_{0x}f_1(y) + \Phi_1(x, t) \quad (2.4)$$

В (2.4) и последующих формулах часто встречаются функции $f_k(y)$, которые определяются как k-кратные интегралы от функции f (для единообразия обозначений полезно использовать соглашение $f \equiv f_0$). Иными словами, f_k определяется рекуррентно

$$f_{k+1}' = f_k(y), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (2.5)$$

Для устранения неоднозначности в определении (2.5) потребуем выполнения связи (1.1) при всех k, т. е. $\langle f_k\rangle = 0$.

Эти условия однозначно определяют периодические функции f_k. Явное выражение для f_k получается после разложения в ряд Фурье

$$f_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' C_n (in)^{-k} e^{iny}$$

где штрих в знаке суммы указывает на отсутствие члена с $n = 0$. Впрочем в большинстве последующих вычислений удобнее использовать неявное определение (2.5).

Интегральное соотношение (1.5) в первом приближении принимает вид

$$\langle\psi_{1y}\,\psi_{0xx}\rangle_x + \langle\psi_{0y}\psi_{1xx}\rangle_x = R_*^{-1}\langle\psi_{0xxxx}\rangle \quad (2.6)$$

Все интегралы в (2.6) вычисляются элементарно:

$$\langle\psi_{1y}\psi_{0xx}\rangle = 0, \quad \langle\psi_{0y}\psi_{1xx}\rangle = \langle f^2\rangle R_*\Phi_{0xxx}, \quad \langle\psi_0\rangle = \Phi_0$$

В результате асимптотическое условие разрешимости (2.6) дает искомое критическое число Рейнольдса потери устойчивости периодического течения (0.1)

$$R_* = \langle f^2\rangle^{-1/2} \tag{2.7}$$

Критическое число R_* аналитически найдено лишь в нескольких изолированных задачах [15]. Полученный результат (2.7) представляет редкий случай, когда R_* удается определить для весьма обширного класса течений. При $f = \cos y$ имеем $R_* = \sqrt{2}$ [1]. Можно выразить R_* и через коэффициенты Фурье функции

$$R_* = \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2\right)^{-1/2}$$

Покажем, что во втором приближении асимптотическое условие разрешимости при определенных условиях приводит к прежнему результату (2.7) для критического числа R_*. В самом деле, из (1.4), (2.3) и (2.4) находим уравнение для ψ_2, периодическое решение которого имеет вид

$$\psi_2 = -R_*\Phi_{1x}f_1(y) + R_*^2\Phi_{0x}^2 f_2(y) + R_*^2\Phi_{0xx}\left(\frac{1}{2}f_1^2 - 2F\right) + \Phi_2(x, t) \tag{2.8}$$

где через $F(y)$ обозначено периодическое решение уравнения

$$F'' = f^2 - \langle f^2\rangle \tag{2.9}$$

Оно элементарно выражается через коэффициенты Фурье функции $F(y)$:

$$F = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \left(\sum_{p+q=n} C_pC_q\right)\frac{e^{iny}}{n^2} \tag{2.10}$$

Интегральное соотношение (1.5) во втором приближении принимает вид

$$\begin{gathered}(I_{02} + I_{11} + I_{20})_x = R_*^{-1}\langle\psi_1\rangle_{xxxx} \\ I_{02} = \langle\psi_{0xx}\psi_{2y}\rangle, \quad I_{11} = \langle\psi_{1xx}\psi_{1y}\rangle, \quad I_{20} = \langle\psi_{2xx}\psi_{0y}\rangle\end{gathered} \tag{2.11}$$

Используя соотношения (2.3), (2.4) и (2.8), определяем

$$\begin{gathered}I_{02} = 0, \quad I_{11} = 0, \quad \langle\psi_1\rangle = \Phi_1 \\ I_{20} = R_*\Phi_{1xxx}\langle f^2\rangle - 3R_*^2\Phi_{0xxxx}\langle f_1 f^2\rangle\end{gathered} \tag{2.12}$$

При вычислении этих интегралов, наряду со связями $\langle f_k\rangle = 0$, использовались тождества

$$\langle f'f_1\rangle = -\langle f^2\rangle, \quad \langle f'f_2\rangle = 0, \quad \langle f'F\rangle = \langle f_1f^2\rangle$$

которые непосредственно следуют из определения функций f_k и F при интегрировании по частям. Например

$$\langle f'F\rangle = -\langle fF'\rangle = \langle f_1F''\rangle = \langle f_1f^2\rangle - \langle f_1\rangle\langle f^2\rangle = \langle f_1f^2\rangle$$

где использованы соотношения (2.5) и (2.9).

При учете соотношений (2.12) из асимптотического условия разрешимости (2.11) получим

$$(R_*^2\langle f^2\rangle - 1)\,\Phi_{1xxxx} - 3\langle f_1f^2\rangle R_*^3\Phi_{0xxxxx} = 0 \tag{2.13}$$

Из (2.13) вновь следует соотношение (2.7) для критического числа R_*. Однако в общем случае, при $\langle f_1f^2\rangle \neq 0$, для выполнения условия разрешимости (2.13) этого недостаточно. Данный факт указывает на то, что принятая схема решения (вид асимптотического разложения (2.1) и т. д.)

в данном случае, по-видимому, несправедлива. Поэтому в дальнейшем ограничиваемся произвольными гладкими периодическими функциями $f(y)$, удовлетворяющими дополнительному условию

$$\langle f_1 f^2 \rangle = 0 \tag{2.14}$$

Все последующие результаты оказываются самосогласованными при выполнении связи (2.14). В класс таких течений входит, в частности, и течение Колмогорова.

3. Вывод эволюционного уравнения относительно функции $\Phi_0(x, t)$. Для получения эволюционного уравнения обратимся к третьему приближению. В этом случае, учитывая полученные ранее результаты для предшествующих приближений, после довольно длинных вычислений получаем уравнение для функции тока

$$\begin{aligned} R_*^{-1}\psi_{3yyyy} = &-(\Phi_{0x} + \Phi_{2x}) f''' + 5\Phi_{0xxx} f' + R_*\Phi_{0*}\Phi_{1*} f'' - \\ &- \Phi_{0x}\psi_{2yyy} + R_*\Phi_{1xx}[f_1 f''' - (f')^2] + \\ &+ R_*\Phi_{0x}\Phi_{0xx}(3ff' - 2f_2 f''' - f_1 f'') + \\ &+ R_*^2\Phi_{0xxx}[f_1(f')^2 - f^2 f' + (2F - \tfrac{1}{2} f_1^2) f'''] \end{aligned} \tag{3.1}$$

Это уравнение можно проинтегрировать, однако окончательный результат крайне громоздок и содержит, помимо функций $f_k(y)$, многочисленные новые функции типа $F(y)$. Явный вид решения не нужен для получения эволюционного уравнения относительно $\Phi_0(x, t)$ и поэтому не приводится.

Интегральное соотношение (1.5) в третьем приближении принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_{0xx}\rangle + \langle\psi_{0x}\psi_{3xx}\rangle_x + \langle\psi_{1y}\psi_{2xx}\rangle_x + \langle\psi_{2y}\psi_{1xx}\rangle_x + \langle\psi_{3y}\psi_{0xx}\rangle_x = \\ = R_*^{-1}\langle\psi_2 - \psi_0\rangle_{xxxx} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Используя (2.3), (2.4) и (2.8), определяем часть интегралов в (3.2)

$$\langle\psi_2 - \psi_0\rangle = \Phi_2 - \Phi_0 + \frac{1}{2} R_*^2 \langle f_1^2\rangle \Phi_{0xx}, \quad \langle\psi_{3y}\psi_{0xx}\rangle = 0$$

$$\langle\psi_{2y}\psi_{1xx}\rangle = -R_*^3\Phi_{0xxx}(\Phi_{0x}^2\langle f_1^2\rangle + 2\Phi_{0xx}\langle f_2 f^2\rangle)$$

$$\begin{aligned} \langle\psi_{1y}\psi_{2xx}\rangle = 2R_*^3\Phi_{0*}[(\Phi_{0x}\Phi_{0xxx} + \Phi_{0xx}^2)\langle f_1^2\rangle + \\ + \Phi_{0xxxx}\langle f_2 f^2\rangle \end{aligned}$$

При вычислении этих интегралов наряду с ранее полученными тождествами использовались дополнительные тождества

$$\langle fF\rangle = \langle f_2 f^2\rangle, \quad \langle f_1 F'\rangle = -\langle f_2 f^2\rangle, \quad \langle f f_1^2\rangle = 0$$

При учете равенства

$$\langle\psi_{0y}\psi_{3xx}\rangle = \langle f'\psi_3\rangle_{xx}$$

осталось вычислить интеграл от $\psi_3 f'$ по периоду. Интегрируя по частям, приведем этот интеграл к виду

$$\langle f'\psi_3\rangle = \langle f_3\psi_{3yyyy}\rangle \tag{3.3}$$

и используем уравнение (3.1) для четвертой производной от ψ_3. В результате после весьма громоздких прямых вычислений определяем интеграл (3.3).

Собирая вместе полученные результаты, замечаем отсутствие в окончательном выражении (3.2) слагаемых с Φ_2 и Φ_1. В самом деле слагаемые первого типа составляют выражение $(R_*^2 \langle f^2\rangle - 1)\,\Phi_{2xxxx}$, равное нулю ввиду (2.7); слагаемые второго типа составляют выражение $\langle f_1 f^2\rangle\,\Phi_{1xxxxx}$ и также равны нулю ввиду связи (2.14).

После двукратного интегрирования по x приходим к искомому эволюционному уравнению

$$\frac{\partial\Phi_0}{\partial t}+\frac{2}{R_*}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}+R_*^3\left[\alpha\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi_0}{\partial x^3}+\beta\left(\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}+\gamma\frac{\partial^4\Phi_0}{\partial x^4}\right]=0 \quad (3.4)$$

$$\alpha = 4\langle f_2 f^2\rangle,\quad \beta=-2\langle f_1^2\rangle$$

$$\gamma=\langle f_3 f_1 (f')^2\rangle-\langle f_3 f^2 f'\rangle+\left\langle f_3 f'''\left(2F-\frac{1}{2}f_1^2\right)\right\rangle+\frac{9}{2}\langle f^2\rangle\langle f_1^2\rangle$$

Для приведения момента γ к более компактному виду проведем многократное интегрирование по частям. При этом наряду с определениями (2.5) и (2.9) постоянно используем периодичность всех функций F, f_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Нетривиальные составляющие момента γ оказываются такими:

$$\langle f_3 f_1^2 f'''\rangle = 2\langle f_3 f_1 (f')^2\rangle-5\langle f^2 f_1^2\rangle-\frac{8}{3}\langle f_2 f^3\rangle$$

$$\langle f_3 F f'''\rangle=-\langle f^2F\rangle+\frac{3}{2}\langle f^2 f_1^2\rangle-\frac{7}{3}\langle f_2 f^3\rangle-\frac{9}{2}\langle f^2\rangle\langle f_1^2\rangle$$

$$\langle f_3 f^2 f'\rangle=-\frac{1}{3}\langle f_2 f^3\rangle,\quad \langle f^2 F\rangle=-\langle (F')^2\rangle$$

так что окончательно получаем

$$\gamma = 2\langle (F')^2\rangle + {}^{11}/_2\langle f^2 f_1^2\rangle - 3\langle f_2 f^3\rangle - {}^9/_2\langle f^2\rangle\langle f_1^2\rangle \quad (3.5)$$

Для течения Колмогорова имеем

$$f=\cos y,\quad f_1=\sin y,\quad f_2=-\cos y,\quad F=-{}^1/_8\cos 2y$$

поэтому из (3.4) и (3.5) находим

$$\alpha = 0,\quad \beta=-1,\quad \gamma={}^3/_4.$$

в полном соответствии с результатами работы [14].

В качестве более сложного примера рассмотрим ситуацию, когда функция f состоит из двух гармоник

$$f = C_1 e^{iy}+C_2 e^{2iy}+(\text{к.с.}) \quad (3.6)$$

где через (к.с.) обозначены комплексно-сопряженные члены. Из (3.6) определяем функции $f_k(y)$, а для выражения $F(y)$ используем соотношение (2.10)

$$F=-2C^*_1C_2e^{iy}-{}^1/_4C_1^2e^{2iy}-{}^1/_4C_1C_2e^{3iy}-$$
$$-{}^1/_{16}C_2^2e^{4iy}+(\text{к.с.}) \quad (3.7)$$

При учете (3.6) и (3.7) находим моменты

$$\alpha=-18\,\mathrm{Re}\,(C_1^2C_2^*),\quad \beta=-4\,|C_1|^2-|C_2|^2$$
$$\gamma=12\,|C_1|^4+3\,|C_2|^4+{}^{167}/_4\,|C_1|^2\,|C_2|^2 \quad (3.8)$$

Приведем также выражение для дополнительного условия согласования с (2.14)

$$\langle f_1 f^2\rangle = 3\,\mathrm{Im}\,(C_1^2C_2^*)=0 \quad (3.9)$$

Из (3.9) следует, что комплексные коэффициенты C_1 и C_2 зависят от трех вещественных параметров a, b, θ:

$$C_1 = ae^{i\theta},\quad C_2=be^{2i\theta}$$

так что функция f, состоящая из двух гармоник и удовлетворяющая условию согласования (2.14), при учете произвола в выборе начала отсчета записывается в виде

$$f = 2\,(a\cos y + b\cos 2y) \tag{3.10}$$

Отметим, что для течения (3.10) $\gamma > 0$, $\beta < 0$, как это видно из (3.8). Нулевым в уравнении (3.4) может оказаться лишь слагаемое $\alpha\Phi_{0x}\Phi_{0xxx}$. Из (3.8) ясно, что это возможно только при $a = 0$ или $b = 0$, т. е. по существу для течения Колмогорова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мешалкин Л. Д., Синай Я. Г.* Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости. // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 6. С. 1140—1143.
2. *Green J. S. A.* Two-dimensional turbulence near the viscous limit. // J. Fluid Mech. 1974. V. 62. Pt 2. P. 273—287.
3. *Кляцкин В. И.* К нелинейной теории устойчивости периодических течений. // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 2. С. 263—271.
4. *Непомнящий А. А.* Об устойчивости вторичных течений вязкой жидкости в неограниченном пространстве. // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 5. С. 886—891.
5. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Устойчивость периодического течения Колмогорова в микрополярной жидкости. // ИФЖ. 1991. Т. 60. N 4. С. 670—679.
6. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Устойчивость течения Колмогорова в вязкоупругой жидкости. // МЖГ. 1991. N 4.
7. *Bayly B. J., Yakhot V.* Positive and negative effective viscosity phenomena in isotropic and anisotropic Beltrami flows. // Phys. Rev. Ser. A. 1986. V. 34. P. 381—391.
8. *Yakhot V., Sivashinsky G.* Negative viscosity phenomena in three-dimensional flows.// Phys. Rev. Ser. A. 1987. V. 35. P. 815—820.
9. *Brutyan M. A., Krapivsky P. L.* Stability of viscous unidirectional flows in three dimensions. // Phys. Lett. Ser. A. 1991. V. 152. P. 211—214.
10. *Брутян М. А., Крапивский П. Л.* Устойчивость периодических пространственных течений вязкой жидкости. // ЖВМ и МФ. 1991. Т. 31. № 4. С. 634—638.
11. *Chapman C. J., Proctor M. R. E.* Nonlinear Rayleigh-Benard convection with poorly conducting boundaries. // J. Fluid. Mech. 1980. V. 101. P. 759—782.
12. *Depassier M. S., Spiegel E. A.* The large-scale structure of compressible convection.// Astron. J. 1981. V. 86. P. 496—512.
13. *Gertsberg V. L., Sivashinsky G. I.* Large cells in nonlinear Rayleigh-Benard convection. // Progr. Theor. Phys. 1981. V. 66. P. 1219—1229.
14. *Sivashinsky G. I.* Weak turbulence in periodic flow. // Physica Ser. D. 1985. V. 17. P. 243—255.
15. *Drazin P. G., Reid W. H.* Hydrodynamic stability. Cambridge: Cambridge University Press, 1982. 443 с.

Жуковский

Поступила в редакцию
12.III.1990