

УДК 532.5

© 1991 г.

О. С. Рыжов, Е. Д. Терентьев

О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Рассматривается распространение возмущений в пограничном слое в условиях, когда скорость набегающего потока может быть как до-, так и сверхзвуковой. Относительно исходного течения в пограничном слое предполагается, что оно является стационарным и обладает пространственным характером, обусловленным внешним градиентом давления, а не кривизной обтекаемой поверхности (такого рода пограничные слои широко используются в настоящее время в экспериментах). Подробно изучаются линеаризованные уравнения, описывающие волны исчезающе малой амплитуды. Анализ дисперсионного соотношения, связывающего частоту собственных колебаний с компонентами волнового вектора, выявил ряд особенностей, присущих только движениям с трехмерным полем скоростей. В частности, установлено, что задача Коши для системы линейных уравнений является некорректной.

Как известно, распространение возмущений любой геометрической конфигурации в исходном стационарном двумерном вязком течении подчиняется уравнениям взаимодействующего пограничного слоя, в которых самоиндуцированный градиент давления подлежит определению совместно с полем скоростей. Асимптотические уравнения теории свободного взаимодействия были выведены в связи с анализом движения жидкости в окрестности задней кромки пластинки конечной длины [1, 2] и отрыва сверхзвукового пограничного слоя от обтекаемой поверхности [3, 4]. Пространственные возмущения рассматривались позднее как в стационарных условиях [5], так и применительно к задачам устойчивости [6]. Последнее направление получило интенсивное развитие, обзор соответствующих результатов приведен в [7].

Асимптотический анализ в цитированных работах основывается на предположении, что число Рейнольдса $R \rightarrow \infty$, откуда следует возможность ввести малый параметр $\varepsilon = R^{-1/2}$. Число Рейнольдса вычисляется по расстоянию L^* от носка пластинки, скорости U_∞^* , плотности ρ_∞^* и первому коэффициенту вязкости $\lambda_{1\infty}^*$ частиц набегающего потока, которые подвергаются сжатию давлением P_∞^* . Если исходный пограничный слой обладает пространственной структурой, то под L^* следует понимать некоторый характерный размер, а под U_∞^* , ρ_∞^* , P_∞^* , $\lambda_{1\infty}^*$ — соответствующие параметры внешнего течения в рассматриваемой точке обтекаемой поверхности. При таком подходе число Рейнольдса R приобретает локальный характер и может изменяться в зависимости от положения выбранной точки. Изменения поля скоростей и термодинамических функций во внешнем невязком течении происходят, как правило, из-за искривления обтекаемой поверхности.

С другой стороны, в последнее время в экспериментах все чаще используются модели, в которых изучаемая поверхность с прилегающим к ней пограничным слоем является плоской, а градиент давления создается искусственно при помощи различных дополнительных устройств [8, 9]. Такая техника имеет то преимущество, что позволяет избежать влияния на распространение возмущений внутри пограничного слоя центробежных сил, действующих вблизи искривленных участков поверхности. Обобщение развитой в [5, 6] теории, включающее пространственные пограничные слои указанного выше типа, намечено в [10, 11] и развивается ниже с целью выявить новые качественные эффекты.

1. Уравнения волновых движений. Как обычно, разобьем все поле течения на три характерных области, которые расположены друг над другом. В верхней области эффекты вязкости и теплопроводности проявляются слабо, поэтому возмущения всех параметров газа будут вели-

чинами одного порядка малости. Средняя область, занимающая почти всю толщ пограничного слоя, в первом приближении также не подвержена влиянию диссипативных факторов, но она существенным образом завихрена, и боковая составляющая скорости сравнима с ее составляющей в направлении основного (внешнего) потока. Что касается нижней пристеночной области, то вязкость играет определяющую роль в формировании ее структуры, в то время как учет теплопроводности становится существенным только при неравномерном нагревании поверхности.

Обозначим через t^* время и поместим начало декартовой системы координат x^* , y^* , z^* на плоскость, направив ось x^* по вектору скорости внешнего невозмущенного потока в рассматриваемой точке и совместив ось y^* с нормалью к плоскости. В проекциях на оси выбранной системы координат составляющие скорости будут u^* , v^* , w^* . Пусть, кроме того, ρ^* — плотность, P^* — давление газа. Поскольку основной интерес представляет изучение возмущений, распространяющихся в пространственном пограничном слое, начнем анализ со средней области, заключающей его основную толщ. Положим здесь

$$t^* = \varepsilon^2 (L^*/U_\infty^*) t', \quad x^* = \varepsilon^3 L^* x', \quad y^* = \varepsilon^4 L^* y_2, \quad z^* = \varepsilon^3 L^* z' \quad (1.1)$$

и нормируем искомые функции следующим образом:

$$\begin{aligned} u^* &= U_\infty^* [U_{x0}(y_2) + \varepsilon u_2(t', x', y_2, z') + \dots] \\ v^* &= U_\infty^* [\varepsilon^2 v_2(t', x', y_2, z') + \dots] \\ w^* &= U_\infty^* [U_{z0}(y_2) + \varepsilon w_2(t', x', y_2, z') + \dots] \\ \rho^* &= \rho_\infty^* [R_0(y_2) + \varepsilon \rho_2(t', x', y_2, z') + \dots] \\ P^* &= P_\infty^* + \rho_\infty^* U_\infty^{*2} [\varepsilon^2 p_2(t', x', y_2, z') + \dots] \end{aligned} \quad (1.2)$$

В разложениях (1.2) величины U_{x0} , U_{z0} и R_0 считаются известными из решения глобальной задачи о расчете стационарного пространственного пограничного слоя на плоской поверхности, градиент давления около которой создается какими-либо дополнительными устройствами. Очевидно, что U_{z0} — скорость так называемого вторичного течения, причем в силу выбора направлений координатных осей $U_{x0} \rightarrow 1$, $U_{z0} \rightarrow 0$ при $y_2 \rightarrow \infty$.

Учитывая фиксируемые формулами (1.1) масштабы времени и пространственных переменных и внося разложения (1.2) в систему уравнений Навье — Стокса, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x'} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} + \frac{\partial w_2}{\partial z'} &= 0 \\ U_{x0} \frac{\partial u_2}{\partial x'} + v_2 \frac{dU_{x0}}{dy_2} + U_{z0} \frac{\partial u_2}{\partial z'} &= 0 \\ U_{x0} \frac{\partial w_2}{\partial x'} + v_2 \frac{dU_{z0}}{dy_2} + U_{z0} \frac{\partial w_2}{\partial z'} &= 0 \\ \frac{\partial p_2}{\partial y_2} = 0, \quad U_{x0} \frac{\partial \rho_2}{\partial x'} + v_2 \frac{dR_0}{dy_2} + U_{z0} \frac{\partial \rho_2}{\partial z'} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь первые три уравнения отделяются от остальных, что дает возможность найти поле возмущений скорости независимо от изменений избыточной плотности. Введем в рассмотрение мгновенную толщину вытеснения — A' (t' , x' , z'), в терминах которой результат интегрирования системы уравнений (1.3) гласит:

$$\begin{aligned} u_2 &= A' \frac{dU_{x0}}{dy_2}, \quad w_2 = A' \frac{dU_{z0}}{dy_2}, \quad \rho_2 = A' \frac{dR_0}{dy_2} \\ v_2 &= -\frac{\partial A'}{\partial x'} U_{x0} - \frac{\partial A'}{\partial z'} U_{z0} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Разница между построенным решением и тем, которое определяет пространство возмущений произвольной конфигурации в исходном двумерном пограничном слое, заключается в выражении для боковой составляющей скорости частиц. Если $U_{z0} = 0$, эта составляющая становится порядка ε^2 , причем она появляется, как следует из [5, 6], за счет $\partial p_2 / \partial z' \neq 0$. Связь w_2 с p_2 для волн, бегущих по пространственному пограничному слою, устанавливается законом их взаимодействия с внешним потоком, поскольку избыточное давление индуцируется при изменении толщины вытеснения.

Чтобы сформулировать названный закон, рассмотрим внешнюю область течения. В ней нормировка времени и координат на обтекаемой плоскости остается прежней, и расстояние до нее от выбранной точки пространства вводится соотношением $y^* = \varepsilon^3 L^* y_1$. Возмущения всех параметров газа пропорциональны ε^2 , откуда:

$$u^* = U_\infty^* [1 + \varepsilon^2 u_1(t', x', y_1, z') + \dots], \quad v^* = U_\infty^* [\varepsilon^2 v_1(t', x', y_1, z') + \dots], \quad w^* = U_\infty^* [\varepsilon^2 w_1(t', x', y_1, z') + \dots], \quad \rho^* = \rho_\infty^* [1 + \varepsilon^2 \rho(t', x', y_1, z') + \dots], \quad P^* = P_\infty^* + \rho_\infty^* U_\infty^{*2} [\varepsilon^2 p_1(t', x', y_1, z') + \dots] \quad (1.5)$$

В результате подстановки написанных разложений в систему уравнений Навье — Стокса и сохранения в них только главных членов задача сводится к интегрированию единственного уравнения для избыточного давления

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 p_1}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z'^2} = 0 \quad (1.6)$$

после чего компоненты вектора скорости частиц и вариации плотности вычисляются по формулам

$$u_1 = -p_1, \quad \rho_1 = M_\infty^2 p_1$$

$$v_1 = - \int_{-\infty}^{x'} \frac{\partial p_1(t', \xi, y_1, z')}{\partial y_1} d\xi, \quad w_1 = - \int_{-\infty}^{x'} \frac{\partial p_1(t', \xi, y_1, z')}{\partial z'} d\xi \quad (1.7)$$

Предполагается, что возмущения затухают вверх по потоку, т. е. при $x' \rightarrow -\infty$, через M_∞ обозначено число Маха. Зададим на плоскости $y_1 = 0$ вертикальную составляющую скорости $v_1(t', x', 0, z')$. Результат интегрирования уравнения (1.6), с учетом зависимости между p_1 и v_1 , вводимой вторым из соотношений (1.7), гласит

$$p_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v_1(t', \xi, 0, \zeta) / \partial \xi}{\{(x' - \xi)^2 + (1 - M_\infty^2) [y_1^2 + (z' - \zeta)^2]\}^{1/2}} d\zeta \quad (1.8)$$

при условии, что $M_\infty < 1$. Если же число Маха $M_\infty > 1$, то

$$p_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x' - \beta y_1} d\xi \int_{-\delta' + z'}^{\delta' + z'} \frac{\partial v_1(t', \xi, 0, \zeta) / \partial \xi}{\{(x' - \xi)^2 - \delta^2 [y_1^2 + (z' - \zeta)^2]\}^{1/2}} d\zeta \quad (1.9)$$

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}, \quad \delta' = \delta'(x', \xi, y_1; M_\infty) = \left[\left(\frac{x' - \xi}{\beta} \right)^2 - y_1^2 \right]^{1/2}$$

Сращивание разложений (1.2) для основной толщи пограничного слоя с разложениями (1.5) для потенциальной области течения достигается, когда $y_2 \rightarrow \infty$, а $y_1 \rightarrow 0$. Внося в последнюю из формул (1.4) предельные

значения U_{x0} и U_{z0} , имеем

$$v_1(t', x', 0, z') = -\frac{\partial A'}{\partial x'}, \quad p_1(t', x', 0, z') = p_2(t', x', z') \quad (1.10)$$

что повторяет результаты, которые относятся к пространственным возмущениям, распространяющимся в сжимаемом пограничном слое Блазиуса [5, 6].

Остается рассмотреть нижнюю область, в которой $y^* = \varepsilon^5 L^* y_3$. Здесь искомые функции разлагаются в стандартные последовательности

$$u^* = U_\infty^* [\varepsilon u_3(t', x', y_3, z') + \dots], \quad v^* = U_\infty^* [\varepsilon^3 v_3(t', x', y_3, z') + \dots], \\ w^* = U_\infty^* [\varepsilon w_3(t', x', y_3, z') + \dots], \quad \rho^* = \rho_\infty^* [\rho_3(t', x', y_3, z') + \dots], \\ P^* = P_\infty^* + \rho_\infty^* U_\infty^{*2} [\varepsilon^2 p_3(t', x', y_3, z') + \dots] \quad (1.11)$$

характер которых можно с самого начала несколько упростить, ограничиваясь анализом чисто механических колебаний и исключая из него внутренние температурные волны. Как следует из [1—4], в этом случае $\rho_3 = R_0(0)$, а коэффициент вязкости $\lambda_{1w}^* = \lambda_{1w}^* = \lambda_{1w}^* [R_0(0)]$, где индекс w относится к значению этого коэффициента на обтекаемой плоскости. Положим ее для простоты термически изолированной и будем считать справедливым закон Чепмена $\lambda_{1w}^*/\lambda_{1\infty}^* = CT_w^*/T_\infty^*$, связывающим коэффициент вязкости с отношением температуры T_w^* стенки к температуре T_∞^* окружающего пространства. Ясно, что $T_w^*/T_\infty^* = R_0^{-1}(0)$. С учетом сделанных замечаний подстановка разложений (1.11) в исходную систему уравнений Навье — Стокса ведет к соотношениям

$$\frac{\partial u_3}{\partial x'} + \frac{\partial v_3}{\partial y_3} + \frac{\partial w_3}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial p_3}{\partial y_3} = 0 \\ R_0(0) \left(\frac{\partial u_3}{\partial t'} + u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x'} + v_3 \frac{\partial u_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial u_3}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial p_3}{\partial x'} + \frac{C}{R_0(0)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y_3^2} \quad (1.12) \\ R_0(0) \left(\frac{\partial w_3}{\partial t'} + u_3 \frac{\partial w_3}{\partial x'} + v_3 \frac{\partial w_3}{\partial y_3} + w_3 \frac{\partial w_3}{\partial z'} \right) = -\frac{\partial p_3}{\partial z'} + \frac{C}{R_0(0)} \frac{\partial^2 w_3}{\partial y_3^2}$$

Сращивание разложений (1.2) и (1.11) дает предельные условия

$$u_3 \rightarrow \frac{\partial U_{x0}(0)}{\partial y_2} y_3 \rightarrow \frac{dU_{x0}(0)}{dy_2} A'(t', x', z') \\ w_3 \rightarrow \frac{\partial U_{z0}(0)}{\partial y_2} y_3 \rightarrow \frac{dU_{z0}(0)}{dy_2} A'(t', x', z') \quad (1.13)$$

на внешнем крае $y_3 \rightarrow \infty$ рассматриваемого вязкого пристеночного подслоя. Из условий сращивания вытекает, кроме того, что $p_3(t', x', z') = p_2(t', x', z') = p_1(t', x', 0, z')$, причем последняя из этих величин выражается через мгновенную толщину вытеснения — $A'(t', x', z')$ посредством равенств (1.8) и (1.10), либо (1.9) и (1.10) в зависимости от числа Маха набегающего потока. Что касается обтекаемой поверхности $y_3 = 0$, то на ней имеют место условия прилипания $u_3 = v_3 = w_3 = 0$.

Пусть τ_w обозначает абсолютную величину безразмерного трения, приложенного к стенке в исходном пограничном слое. Тогда

$$\frac{dU_{x0}(0)}{dy_2} = \tau_w \tau_x, \quad \frac{dU_{z0}(0)}{dy_2} = \tau_w \tau_z, \quad \tau_x^2 + \tau_z^2 = 1 \quad (1.14)$$

Чтобы упростить окончательную формулировку краевой задачи, подвергнем независимые переменные вместе с искомыми параметрами газа аффинному преобразованию [1—4]:

$$t' = C^{1/2} \tau_w^{-3/2} T_0 t \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} x' &= C^{3/8} \tau_w^{-5/4} T_0^{3/2} x, & y_3 &= C^{5/8} \tau_w^{-3/4} T_0^{3/2} y, & z' &= C^{3/8} \tau_w^{-5/4} T_0^{3/2} z \\ u_3 &= C^{1/8} \tau_w^{1/4} T_0^{1/2} u, & v_3 &= C^{3/8} \tau_w^{3/4} T_0^{1/2} v, & w_3 &= C^{1/8} \tau_w^{1/4} T_0^{1/2} w \\ p_3 &= C^{1/4} \tau_w^{1/2} p, & A' &= C^{5/8} \tau_w^{-3/4} T_0^{3/2} A \end{aligned}$$

В результате постоянная Чепмена C и отношение температур $T_0 = T_w^*/T_\infty^* = R_0^{-1}(0)$ из дифференциальных уравнений (1.12) выпадают и они приобретают канонический вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Давление здесь в силу (1.8) и (1.10) определяется как

$$p = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(t, \xi, \zeta) / \partial \xi^2}{[(x - \xi)^2 + (1 - M_\infty^2)(z - \zeta)^2]^{1/2}} d\zeta \quad (1.17)$$

для дозвукового пограничного слоя с $M_\infty < 1$. Выражение для давления в случае сверхзвуковой скорости набегающего потока, т. е. при $M_\infty > 1$, находится из (1.9) и (1.10);

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x d\xi \int_{-\delta+z}^{\delta+z} \frac{\partial^2 A(t, \xi, \zeta) / \partial \xi^2}{[(x - \xi)^2 - \beta^2(z - \zeta)^2]^{1/2}} d\zeta \\ \delta &= (x - \xi) / \beta, \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отметим, что в обеих формулах (1.17) и (1.18) сохраняется зависимость от числа Маха частиц на бесконечности. Для пространственных возмущений, распространяющихся как в дву-, так и в трехмерном пограничных слоях, эту зависимость невозможно исключить, внося разность $|1 - M_\infty^2|$ в преобразование подобия (1.15).

Остается сформулировать краевые условия. Соотношения (1.13), которым необходимо удовлетворить при выходе на внешний край $y \rightarrow \infty$ вязкого пристеночного подслоя, при учете (1.14) преобразуются к виду

$$u - \tau_x y \rightarrow \tau_x A(t, x, z), \quad w - \tau_z y \rightarrow \tau_z A(t, x, z) \quad (1.19)$$

Здесь появляются два новых параметра τ_x и τ_z (фактически существенным является только их отношение τ_x/τ_z). Что касается условий прилипания частиц газа к обтекаемой плоскости $y = 0$, то они остаются инвариантными

$$u = v = w = 0 \quad (1.20)$$

Остальные краевые условия обсуждаться не будут, так как дальнейший анализ посвящен собственным колебаниям бесконечно малой амплитуды, обладающим периодической структурой по переменным x и z . Более того, для выполнения такого анализа удобно вернуться к исходному уравнению (1.6) для избыточного давления, не используя результатов его интегрирования, которые выражаются соотношениями (1.8) и (1.9), ведущими окончательно к (1.17) и (1.18) соответственно.

2. Линейное приближение. Следуя традиционной теории гидродинамической устойчивости, разложим искомое решение в ряд по малому па-

раметру Δ , пропорциональному амплитуде бегущей волны. Ограничиваясь линейными по Δ членами, пишем

$$(u - \tau_x y, v, w - \tau_z y, p, A) = \Delta e^{i(\omega t + kx + mz)} [\tau_x f(y), g(y), \tau_z h(y), p_0, A_0] \quad (2.1)$$

Подстановка (2.1) сводит (1.16) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dy} &= -i(k\tau_x f + m\tau_z h) \\ \frac{d^2 f}{dy^2} &= i(\omega + k\tau_x y + m\tau_z y) f + g + \frac{ik}{\tau_x} p_0 \\ \frac{d^2 h}{dy^2} &= i(\omega + k\tau_x y + m\tau_z y) h + g + \frac{im}{\tau_z} p_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Связь между давлением и толщиной вытеснения при дозвуковой скорости набегающего потока, т. е. $M_\infty < 1$, в силу (1.17) будет

$$p_0 = k^2 [(1 - M_\infty^2) k^2 + m^2]^{-1/2} A_0 \quad (2.3)$$

Для сверхзвукового пограничного слоя с $M_\infty > 1$ из соотношения (1.18) вытекает, что

$$p_0 = \begin{cases} ik^2 \operatorname{sign}(k) [(M_\infty^2 - 1) k^2 - m^2]^{-1/2} A_0, & m^2 < (M_\infty^2 - 1) k^2 \\ k^2 [m^2 - (M_\infty^2 - 1) k^2]^{-1/2} A_0, & m^2 > (M_\infty^2 - 1) k^2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Как при положительных, так и при отрицательных значениях, принимаемых обоими волновыми числами k и m , квадратные корни из всех выражений в правых частях (2.3) и (2.4) остаются положительными. Величина m/k задает угол, под которым фронт волны наклонен по отношению к вектору скорости внешнего невозмущенного течения. Обозначим через α_∞ угол Маха, определяемый посредством $\operatorname{tg} \alpha_\infty = 1/\sqrt{M_\infty^2 - 1}$. Как видно из (2.4), зависимость давления от толщины вытеснения в сверхзвуковом пограничном слое меняется, когда угол наклона фронта волны становится равным углу Маха. Это свойство имеет далеко идущие следствия, относящиеся к устойчивости косых волн [12].

Предельные условия

$$f \rightarrow A_0, \quad h \rightarrow A_0 \quad \text{при} \quad y \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

для системы уравнений (2.2) получаются из (1.19), в то время как равенства

$$f = g = h = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad (2.6)$$

проистекают из (1.20). Сформулированная краевая задача позволяет вычислить частоту ω собственных колебаний для любой заданной пары волновых чисел k и m , если считать фиксированными число Маха M_∞ и величины τ_x и τ_z , пропорциональные составляющим поверхностного трения.

Рассмотрим приведенное волновое число $K = k\tau_x + m\tau_z$ и функцию $F = k\tau_x f + m\tau_z h$. В результате дифференцирования второго и третьего уравнений из системы (2.2) имеем

$$d^3 F/dy^3 - i(\omega + Ky) dF/dy = 0 \quad (2.7)$$

Точно такое же уравнение управляет процессом распространения волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое Блазиуса с параметрами, не изменяющимися вдоль оси z . Отмеченное свойство составляет существо преобразования Сквайра, которое, таким образом, остается справедливым при учете боковых токов в исходном пространственном движении газа.

Предельное условие

$$F \rightarrow KA_0 \text{ при } y \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

для уравнения (2.7) устанавливается при помощи (2.5), равенства

$$F = 0, \quad d^2F/dy^2 = i(k^2 + m^2)p_0, \text{ при } y = 0 \quad (2.9)$$

следуют из (2.2) и (2.6). Для анализа уравнения (2.7) можно воспользоваться стандартной методикой [13], опирающейся на введение новой переменной $Y = \Omega + i^{1/2}K^{1/2}y$, $\Omega = i^{1/2}\omega K^{-1/2}$, $-3\pi/2 < \arg K < \pi/2$. В результате приходим к утверждению, что его решение, удовлетворяющее краевым условиям (2.8) и (2.9), существует, если p_0 и A_0 связаны соотношением

$$\Phi(\Omega) = \frac{i^{1/2}(k^2 + m^2)p_0}{K^{3/2}A_0}, \quad \Phi(\Omega) = \frac{d \text{Ai}(\Omega)}{dY} I^{-1}(\Omega) \quad (2.10)$$

$$I(\Omega) = \int_{\Omega}^{\infty} \text{Ai}(Y) dY$$

($\text{Ai}(Y)$ — функция Эйри). Второе линейное соотношение между p_0 и A_0 устанавливается формулами (2.3) либо (2.4). Последние позволяют определить p_0/A_0 при фиксированном числе Маха M_{∞} в качестве функции волновых чисел k и m . Исключение p_0/A_0 из (2.3) и (2.10) дает дисперсионное соотношение

$$\Phi(\Omega) = i^{1/2}k^2 K^{-3/2} (k^2 + m^2) [(1 - M_{\infty}^2)k^2 + m^2]^{-1/2} \quad (2.11)$$

для дозвукового пограничного слоя с $M_{\infty} < 1$. В случае сверхзвуковой скорости набегающего потока, когда $M_{\infty} > 1$, дисперсионное соотношение

$$\Phi(\Omega) = \begin{cases} -i^{1/2}k^2 \text{sign}(k) K^{-3/2} (k^2 + m^2) [(M_{\infty}^2 - 1)k^2 - m^2]^{-1/2}, & m^2 < (M_{\infty}^2 - 1)k^2 \\ i^{1/2}k^2 K^{-3/2} (k^2 + m^2) [m^2 - (M_{\infty}^2 - 1)k^2]^{-1/2}, & m^2 > (M_{\infty}^2 - 1)k^2 \end{cases} \quad (2.12)$$

получается исключением p_0/A_0 из (2.4) и (2.10). Как показывает (2.12), достижение углом наклона фронта бегущей волны величины того угла, под которым наклонена линия пересечения характеристической поверхности с обтекаемой плоскостью, влечет за собой изменение вида дисперсионного соотношения [12].

3. Свойства дисперсионного соотношения. Чтобы установить присущее дисперсионному соотношению свойство симметрии, будем считать сначала оба волновых числа k и m действительными и положительными (в силу неравенств $-3\pi/2 < \arg K < \pi/2$ под отрицательными величинами $-k$ и $-m$ следует понимать $e^{-i\pi k}$ и $e^{-i\pi m}$, соответственно). Предположим теперь, что тройка чисел ω , k , m , из которых ω , вообще говоря, комплексно, удовлетворяет дисперсионным соотношениям (2.11) или (2.12), тогда числа $-\omega_{c.c.}$, $-k$, $-m$, где индекс с. с. означает комплексное сопряжение, также представляют их решения. Действительно, по определению

$$\Omega(-\omega_{c.c.}, -k, -m) = -i^{1/2}\omega_{c.c.} (-k\tau_x - m\tau_z)^{-2/3} = \Omega_{c.c.} \quad (3.1)$$

В силу свойств функции Эйри имеем

$$\Phi(\Omega_{c.c.}) = \Phi(\Omega)_{c.c.} \quad (3.2)$$

что означает преобразование левых частей дисперсионных соотношений к их комплексно сопряженным значениям. Аналогичному преобразованию подвергаются и их правые части в результате подстановки $-k$, $-m$ вмес-

то k , m , поскольку квадратные корни из всех фигурирующих в них выражений остаются положительными.

При фиксированных k и m рассматриваемые дисперсионные соотношения имеют счетный набор корней, анализ которых упрощается, если от частоты ω перейти к аргументу $\Omega = i^{1/2} \omega k^{-2/3}$ функции Φ . Эти корни образуют бесконечную последовательность точек в комплексной плоскости Ω . Когда k и m начинают меняться, принимая только действительные значения, точки перемещаются вдоль определенных траекторий, составляющих совокупность дисперсионных кривых. Однако движение каждой из таких точек вдоль своей дисперсионной кривой может происходить в обоих направлениях даже при монотонном увеличении или уменьшении волновых чисел. Как показывает определение (2.10) функции Φ , при $k \rightarrow 0$ рассматриваемые точки неограниченно приближаются к точкам на вещественной отрицательной полуоси, положение которых задается нулями производной $d Ai(\Omega)/dY$. Этим свойством можно воспользоваться, чтобы упорядочить дисперсионные кривые $\Omega_j = \Omega_j(k, m; \tau_x, \tau_z, M_\infty)$, пометив их номерами корней уравнения $d Ai(\Omega_{dj})/dY = 0$. Своими другими концами все дисперсионные кривые, за исключением первой, упираются в точки $\Omega_{Ij}^{(\pm)}$, которые фиксируются комплексно сопряженными нулями интеграла $I(\Omega)$, определяемого последней из формул (2.10). Что касается траектории первого корня, то она уходит на бесконечность.

Перейдем к изложению результатов более подробного анализа каждого из дисперсионных соотношений, учитывающих специфический характер исходных пограничных слоев в до- и сверхзвуковых режимах. Положим вначале $M_\infty < 1$ и обратимся к (2.11), причем не умаляя общности рассуждений, можно считать, что не только $\tau_x > 0$, но и $\tau_z > 0$. Дисперсионные кривые в указанном случае изображены на фиг. 1; очевидно, они совпадают с теми, которые получаются в анализе прямых волн Толлмина — Шлихтинга, распространяющихся в пограничном слое Блазиуса [13]. Однако движение изображающей точки вдоль каждой дисперсионной кривой при изменении k и m обладает чертами, присущими только пространственному потоку с $\tau_z \neq 0$. Основным интересом представляет первая из названных кривых, поскольку она дает, как будет видно из дальнейшего, изображение самовозмущающихся колебаний, все остальные кривые относятся к экспоненциально затухающим пульсациям.

Опишем, каким образом совершается прохождение первой дисперсионной кривой, когда при $m = m_0 = \text{const}$ продольное волновое число k пробегает отрицательные и положительные значения.

При $k \rightarrow -\infty$ имеем

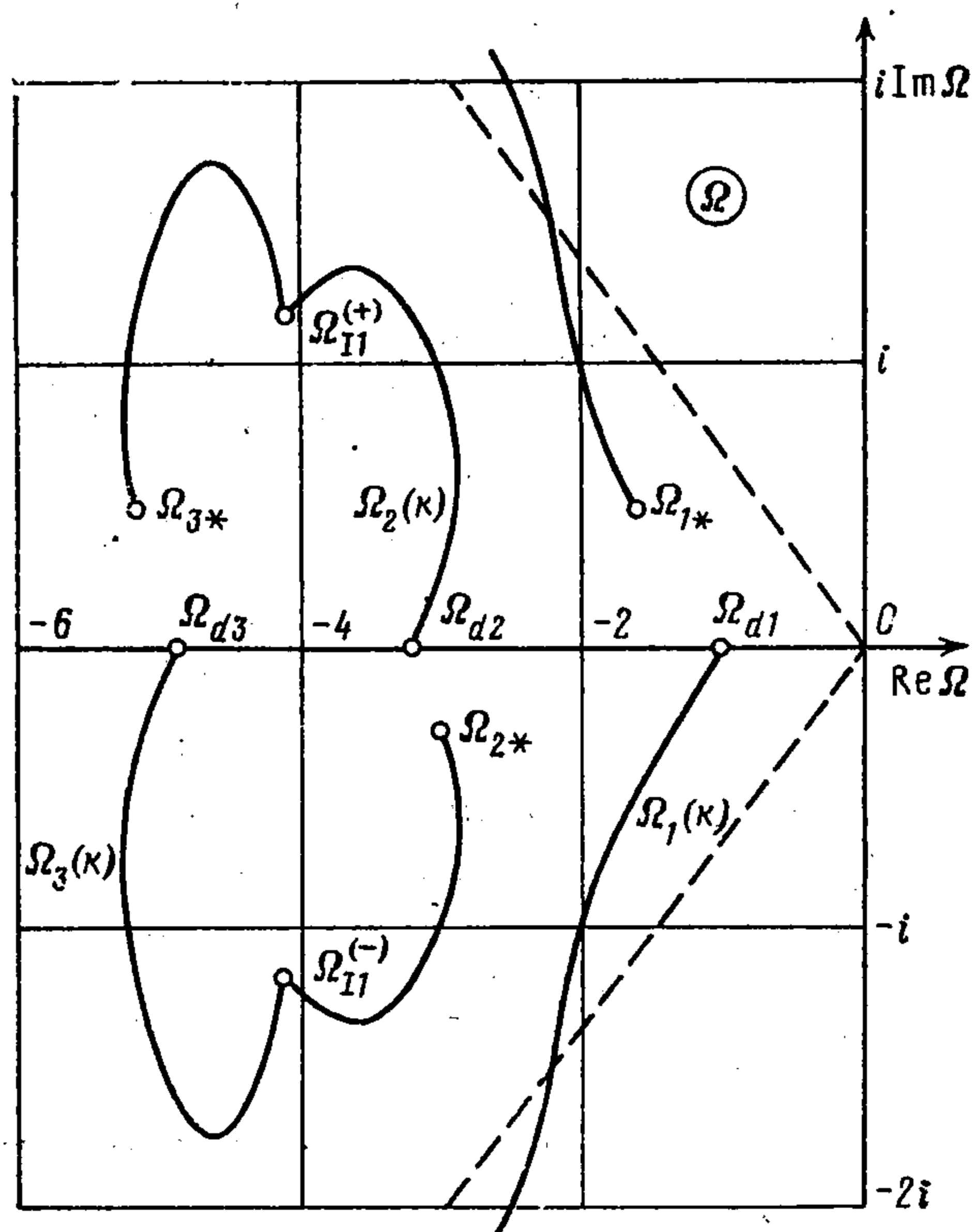
$$\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(5\pi i/6) \quad (3.3)$$

Увеличение k приводит к движению вниз вдоль кривой на фиг. 1 до некоторой предельной точки Ω_{1*} , положение которой зависит от знака бокового волнового числа m_0 . Пусть сначала $m_0 > 0$, тогда указанная точка Ω_{1*} находится в верхней полуплоскости (ее координаты определяются величинами m_0 , и также τ_x , τ_z и M_∞). По достижении предельной точки направление движения вдоль первой дисперсионной кривой меняется на обратное, в результате при $K \rightarrow 0_-$, т. е. при $k \rightarrow -m_0 \tau_z / \tau_x < 0$, имеем снова соотношение (3.3). Переход через значение $K = 0$ знаменует начало движения вдоль ветви дисперсионной кривой в нижней полуплоскости:

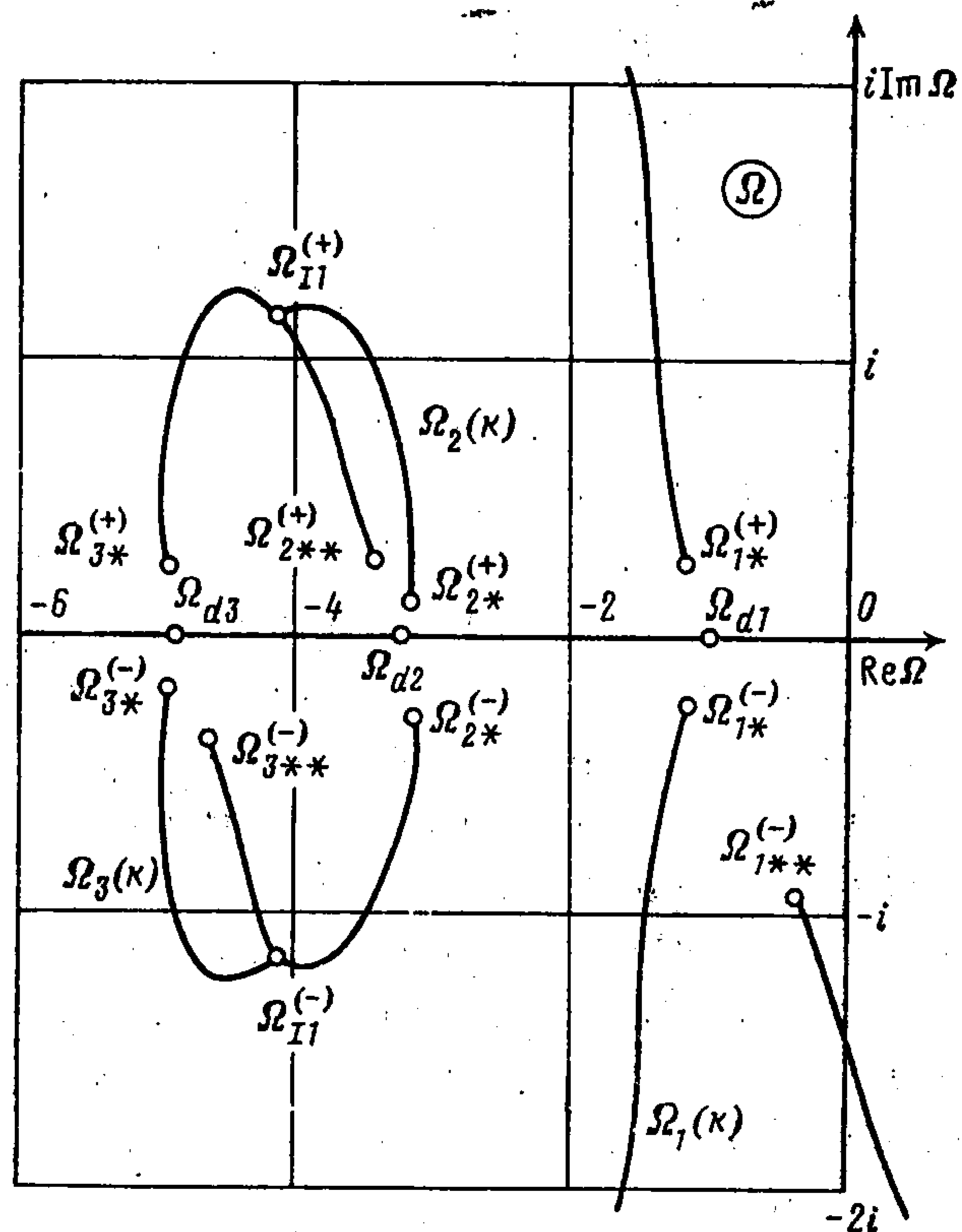
$$\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(-5\pi i/6) \quad (3.4)$$

если $K \rightarrow 0_+$. Ясно, что предельной точкой такого движения будет первый нуль Ω_{d1} производной функции Эйри, который достигается при $k = 0$. После разворота в точке Ω_{d1} движение по нижней ветви дисперсионной кривой совершается в обратном направлении вплоть до (3.4), когда $k \rightarrow \infty$.

Характер прохождения первой дисперсионной кривой в случае $m_0 < 0$ легко установить, используя свойства симметрии, выражаемые формулами (3.1) и (3.2). Изменение направления движения вдоль ветви этой кривой, расположенной в верхней полуплоскости, имеет место в точке Ω_{d1} при $k = 0$. Последующий переход через значение $K = 0$ влечет за собой начало движения по ветви той же кривой в нижней полуплоскости. Сюда попадает предельная точка Ω_{1*} , где направление движения меняется на обратное. Существенно, что при $m_0 \neq 0$ точки Ω_{1*} и Ω_{d1} разделены конечным расстоянием. Если, однако, $m_0 = 0$, то $K = k\tau_x$, поэтому (2.11) сводится к дисперсионному соотношению для прямых волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое



Фиг. 1



Фиг. 2

Блазиуса. Результатом будет слияние Ω_{1*} с Ω_{d1} , что исключает разворот в образовавшейся двойной точке, когда $k = 0$. Аналогично обстоит дело с прохождением остальных дисперсионных кривых на фиг. 1, разница сводится к тому, что при $k \rightarrow \pm \infty$ величина $\Omega_j \rightarrow \Omega_{1j}^{(\pm)}$.

Обратимся к сверхзвуковому пограничному слою, сохранив предположение $\tau_x > 0$, $\tau_z > 0$ и отметив сразу, что значение $\tau_z/\tau_x = 1/\beta$, $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ играет в определенном смысле роль порогового в последующем анализе. При $M_\infty > 1$ дисперсионное соотношение принимает одну из двух форм (2.12) в зависимости от относительной величины $(m/k)^2$ по сравнению с $M_\infty^2 - 1$. Как и выше, зафиксируем $m = m_0 = \text{const.}$ Если $k \rightarrow -\infty$, то заведомо $(m_0/k)^2 < M_\infty^2 - 1$, отсюда вытекает необходимость использовать первую форму (2.12) в соответствии с которой имеем

$$\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(-2\pi i/3) \quad (3.5)$$

Пусть далее в рассматриваемом диапазоне значений $k < -|m_0|/\beta$ приведенное волновое число K не меняет знака, т. е. остается отрицательным. Если $m_0 > 0$, то следствием сформулированного ограничения будет неравенство $\tau_z/\tau_x < 1/\beta$, означающее, что направление поверхностного трения лежит внутри угла Маха α_∞ набегающего потока; напротив, выбор $m_0 < 0$ никаких требований на отношение τ_z/τ_x не налагает. С увеличением k начинается перемещение вверх вдоль первой дисперсионной кривой на фиг. 2 вплоть до предельной точки $\Omega_{1*}^{(-)}$, расположенной в нижней полуплоскости. После разворота в указанной точке движение вдоль дисперсионной кривой совершается в обратном направлении, при $k \rightarrow -|m_0|/\beta$ получим снова (3.5).

Переход к положительным значениям k , удовлетворяющим прежнему неравенству $(m_0/k)^2 < M_\infty^2 - 1$, дает начало движению по ветви дисперсионной кривой в верхней полуплоскости с

$$\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(2\pi i/3) \quad (3.6)$$

когда $k \rightarrow |m_0|/\beta$. Будем считать, что приведенное волновое число k не меняет знака также во всем диапазоне положительных $k > |m_0|/\beta$, т. е. является положительным в соответствии со своим предельным значением при $k \rightarrow \infty$. Если $m_0 < 0$, то из последнего ограничения вытекает неравенство $\tau_z/\tau_x < 1/\beta$, ему удовлетворяют только такие направления поверхностного трения, которые снова попадают внутрь угла Маха α_∞ набегающего потока; напротив, выбрав $m_0 > 0$, никаких требований на отношение τ_z/τ_x не получаем. Перемещение вниз вдоль дисперсионной кривой заканчивается при некотором конечном k в предельной точке $\Omega_{1*}^{(+)}$, лежащей в верхней полуплоскости. Дальнейшее увеличение k сопровождается прохождением дисперсионной кривой в противоположном направлении, причем выполнено (3.6) при $k \rightarrow \infty$. Координаты обеих предельных точек $\Omega_{1*}^{(\mp)}$ зависят как от m_0 , так и от τ_x , τ_z , M_∞ .

Продолжим анализ первой формы дисперсионного соотношения (2.12), допустив перемену знака приведенного волнового числа K в одном из рассматривавшихся выше диапазонов значений k . Перемена знака возможна только при условии $\tau_z/\tau_x > 1/\beta$; она имеет место в интервале отрицательных $k < -m_0/\beta$, если $m_0 > 0$, либо осуществляется после перехода в интервал положительных $k > |m_0|/\beta$, когда $m_0 < 0$. Пусть реализуется первая из этих возможностей с $m_0 > 0$. Движение по первой дисперсионной кривой начинается при $k \rightarrow -\infty$ из окрестности особой точки (3.5) в нижней полуплоскости и продолжается до предельной точки $\Omega_{1*}^{(-)}$, где $K < 0$. Однако предел (3.5) при перемещении вдоль той же кривой в обратном направлении достигается за счет $K \rightarrow 0$, а не в силу $k \rightarrow -m_0/\beta$. Как видно из фиг. 2, в результате перехода через значение $K = 0$ возникает дополнительная особая ветвь дисперсионной кривой с

$$\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(-i\pi/3) \quad (3.7)$$

при $K \rightarrow 0_-$, на которой находится новая предельная точка $\Omega_{1**}^{(-)}$. После разворота в ней вход в особую точку (3.7) реализуется, когда $k \rightarrow -m_0/\beta$. Скачок к положительным $k \rightarrow m_0/\beta$ влечет за собой начало движения вниз по основной ветви дисперсионной кривой в верхней полуплоскости из окрестности особой точки (3.6). Как обычно, эта ветвь проходит дважды, смена направлений движения происходит в предельной точке $\Omega_{1*}^{(+)}$, а знак K сохраняется положительным.

Анализ другой возможности, выраженной неравенством $m_0 < 0$, приводит к следующим изменениям в использовании ветвей первой дисперсионной кривой на фиг. 2. Эти изменения устанавливаются при помощи формул симметрии (3.1) и (3.2). Поскольку при всех $k < -|m_0|/\beta$ знак K остается отрицательным, в нижней полуплоскости надлежит обратиться только к основной ветви кривой, упирающейся в особую точку (3.5). Поскольку смена знака K с отрицательного на положительный имеет место в интервале $k > |m_0|/\beta$, в верхней полуплоскости движение идет как по основной, так и по дополнительной (особой) ветвям дисперсионной кривой. Сначала проходит особая ветвь, скачок в бесконечно удаленную точку которой

$$\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(i\pi/3) \quad (3.8)$$

совершается при $k \rightarrow |m_0|/\beta$; после изменения знака K следует привлечь к рассмотрению основную ветвь с особой точкой (3.6) на бесконечности.

При $m_0 \neq 0$ предельные точки $\Omega_{1*}^{(-)}$ и $\Omega_{1*}^{(+)}$, расположенные на двух основных ветвях дисперсионной кривой, разделены конечным расстоянием. Если же $m_0 = 0$, то $K = k\tau_x$, поэтому первая форма (2.12) сводится к дисперсионному соотношению для прямых волн Толлмина — Шлихтинга, распространяющихся в сверхзвуковом пограничном слое Блазиуса. Результат выражается в слиянии $\Omega_{1*}^{(-)}$ и $\Omega_{1*}^{(+)}$, что представляет разворот в образовавшейся двойной точке, которая совпадает, очевидно, с Ω_{d1} . Что касается обеих особых ветвей первой дисперсионной кривой, то они перестают существовать, так как скачок в расположенные на них бесконечно удаленные точки (3.7) и (3.8) совершается либо при изменении знака K , либо при $k \rightarrow \mp |m_0|/\beta$; в этих случаях равенство $m_0 = 0$ влечет за собой $k = 0$. Вполне аналогично ведут себя остальные дисперсионные кривые, разница состоит в том, что в пределе $\Omega_j \rightarrow \Omega_{1j}^{(\pm)}$ при $k \rightarrow \pm \infty$.

Остается изложить результаты, относящиеся ко второй форме дисперсионного соотношения (2.12). Поскольку она справедлива для $(m/k)^2 > M_\infty^2 - 1$, то при фиксированном $m = m_0 = \text{const}$ предельные значения $k \rightarrow \mp \infty$ из анализа исключаются. Если приведенное волновое число K меняет знак, для чего необходимо наложить требование $\tau_z/\tau_x < 1/\beta$, то характер движения вдоль ветвей первой дисперсионной кривой качественно такой же, как и в разобранный выше случае дозвукового пограничного слоя. Отсюда ясно, что для иллюстрации основных заключений следует вновь обратиться к фиг. 1, но учесть, что достижение изображенных на ней бесконечно удаленных точек осуществляется, когда вместо прежних пределов $k \rightarrow \mp \infty$ берутся значения $k \rightarrow \mp |m_0|/\beta$. Сохранение знака приведенного волнового числа K во всем диапазоне изменения k меняет ситуацию: ветвь основной дисперсионной кривой с расположенной на ней точкой поворота Ω_{1*} перестает существовать, давая начало дополнительной (особой) ветви, показанной на фиг. 2. Что касается другой ветви первой дисперсионной кривой с точкой Ω_{d1} , то движение по ней происходит, как обычно, в прямом и обратном направлениях. Общее количество ветвей первой дисперсионной кривой, используемых в анализе сверхзвукового пограничного слоя, остается равным четырем. Аналогичные замечания справедливы по отношению к остальным дисперсион-

ным кривым, упирающимся своими концами в точки $\Omega_j \rightarrow \Omega_{Ij}^{(\pm)}$ при $k \rightarrow \mp |m_0|/\beta$. Отметим, что при $m_0 = 0$ вторая форма дисперсионного соотношения вырождается, принимая вид $k = 0$.

Как видно из фиг. 1 и 2, дисперсионные кривые, являющиеся изображениями траекторий корней дисперсионных соотношений (2.11) и (2.12), не пересекаются при произвольных действительных k и m . Отсюда следует, что определяемые ими любые две функции $\omega_p = \omega_p(k, m; \tau_x, \tau_z, M_\infty)$ и $\omega_q = \omega_q(k, m; \tau_x, \tau_z, M_\infty)$ принимают различные значения при одинаковых k и m , если $p \neq q$. Иными словами, в комплексной плоскости ω точки ветвления отсутствуют, если k и m ограничены действительными числами.

4. Анализ устойчивости. Затухание или раскачка колебаний определяются $\arg \omega$ комплексной частоты ω , именно, амплитуда пульсаций экспоненциально нарастает при условии, что $-\pi < \arg \omega < 0$. Поскольку $\arg K$ может быть равным только 0, либо $-\pi$, когда оба волновых числа k и m выбираются действительными, то как до-, так и сверхзвуковой пограничные слои теряют устойчивость в двух интервалах изменения $\arg \Omega$, которые задаются следующими неравенствами:

$$\begin{aligned} -5\pi/6 < \arg \Omega < \pi/6, \text{ для } \arg K = 0 \\ -\pi/6 < \arg \Omega < 5\pi/6 \text{ для } \arg K = -\pi \end{aligned} \quad (4.1)$$

Обратимся к дозвуковому потоку. На фиг. 1 штриховыми линиями нанесены лучи, наклон которых фиксируется посредством $\arg \Omega = 5\pi/6$ и $\arg \Omega = -5\pi/6$. Указанные лучи пересекают лишь первую дисперсионную кривую с теми же углами входа в бесконечно удаленные особые точки $\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(\pm 5\pi i/6)$, т. е. для названной кривой существует диапазон действительных значений k и m , обеспечивающих выполнение неравенств (4.1). Отсюда вытекает заключение, что первый корень дисперсионного соотношения (2.11) может представлять параметры (частоту и пару волновых чисел) неустойчивых собственных колебаний. Что касается всех остальных корней, то они соответствуют возмущениям с экспоненциально затухающей во времени амплитудой. Таким образом, анализ устойчивости пространственного пограничного слоя при $M_\infty < 1$ в значительной мере повторяет тот, который был развит [13] применительно к прямым волнам Толлмина — Шлихтинга, распространяющимся в двумерном течении у пластинки (разница сводится к прохождению дисперсионных кривых в прямом и обратном направлениях).

Несколько более тонко решается вопрос об устойчивости сверхзвукового пространственного пограничного слоя. Начнем со второй формы дисперсионного соотношения (2.12), которая справедлива при условии, что $(m/k)^2 > M_\infty^2 - 1$. Поскольку названная форма вырождается в $k = 0$ при $m = 0$, то ее применение связано исключительно с косыми волнами Толлмина — Шлихтинга. Существование диапазона их неустойчивости легко устанавливается при помощи той же фиг. 1. Учитывая соотношение $k/m = \operatorname{tg} \gamma$, где через γ обозначен угол наклона фронта волны к вектору скорости внешнего невозмущенного потока, подчеркнем, что рассматриваемые косые волны распространяются в направлениях, удовлетворяющих условию $\gamma < \alpha_\infty$. Для таких волн проекция скорости внешнего потока на нормаль к фронту меньше местной скорости звука, т. е. по существу механизм неустойчивости сверхзвукового пространственного пограничного

слоя в данном случае объясняется причинами, вызывающими экспоненциальный рост колебаний в вязком течении при дозвуковых скоростях.

Положив $(m/k)^2 < M_\infty^2 - 1$, обратимся к первой форме дисперсионного соотношения (2.12). Все косые волны Толлмина — Шлихтинга, распространяющиеся в двумерном пограничном слое Блазиуса, при таком ограничении являются устойчивыми [12]. Действительно, вычисленные по их параметрам значения Ω образуют на фиг. 2 основные ветви первой дисперсионной кривой с особыми точками $\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(\mp 2\pi i/3)$, не попадающими ни в один из интервалов (4.1). Наличие боковой составляющей τ_z в поверхностном трении ведет к новому механизму неустойчивости. Ясно, что самовозбуждающиеся колебания могут изображаться только особыми ветвями дисперсионной кривой, фиксируемыми бесконечно удаленными точками $\Omega_1 \rightarrow \infty \exp(\mp \pi i/3)$ внутри (4.1): форма основных ветвей от τ_z не зависит (меняются только положения точек поворота $\Omega_{1*}^{(\mp)}$ на них). Но, как было установлено выше, образование особых ветвей обусловлено изменением знака приведенного волнового числа K , для чего требуется удовлетворить условию $\tau_z/\tau_x > 1/\beta = \alpha_\infty$. Таким образом, сверхзвуковой пространственный пограничный слой может терять устойчивость, если направление поверхностного трения на пластинке выходит за угол Маха набегающего потока. Что касается угла γ наклона фронта волны к вектору скорости внешнего потока, то и этот угол $\gamma > \alpha_\infty$.

Для более полного анализа свойств неустойчивого движения в до- и сверхзвуковых режимах рассмотрим линии уровня функции $\text{Im } \omega_1$, придавая волновым числам k и m действительные значения. Первый из этих случаев иллюстрирует фиг. 3, при построении которой положено $M_\infty = 0,1$, $\tau_x = \tau_z = \sqrt{2}/2$. Отметим, в частности, что форма кривых на плоскости k, m подтверждает установленное выше свойство симметрии корней дисперсионного соотношения, которое выражается посредством формул (3.1) и (3.2).

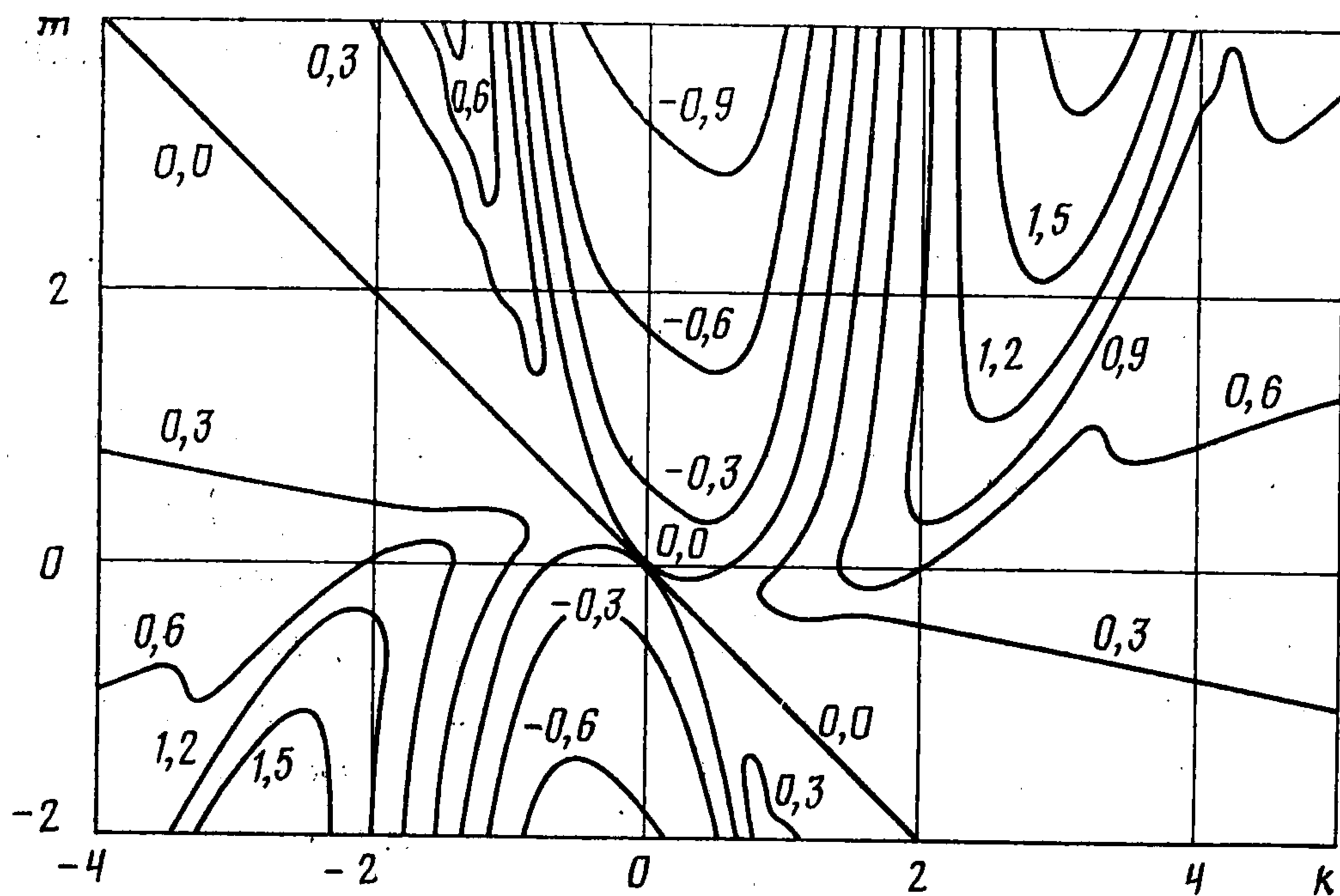
Докажем принципиально важный факт, что существуют области, где $\text{Im } \omega_1$ не только меньше нуля, но с ростом $|k|$ и $|m|$ также растет по абсолютной величине. Иными словами, задача Коши для линеаризованной системы уравнений (1.16) с давлением, вводимым при помощи (1.17), является, вообще говоря, некорректной по Петровскому [14].

С этой целью рассмотрим первый квадрант плоскости k, m ; из фиг. 3 видно, что аналогичной структурой обладает третий квадрант. Положим $m = ck^3$, $c > 0$, и пусть $k \rightarrow \infty$. Дисперсионное соотношение (2.11) в первом приближении сводится тогда к виду

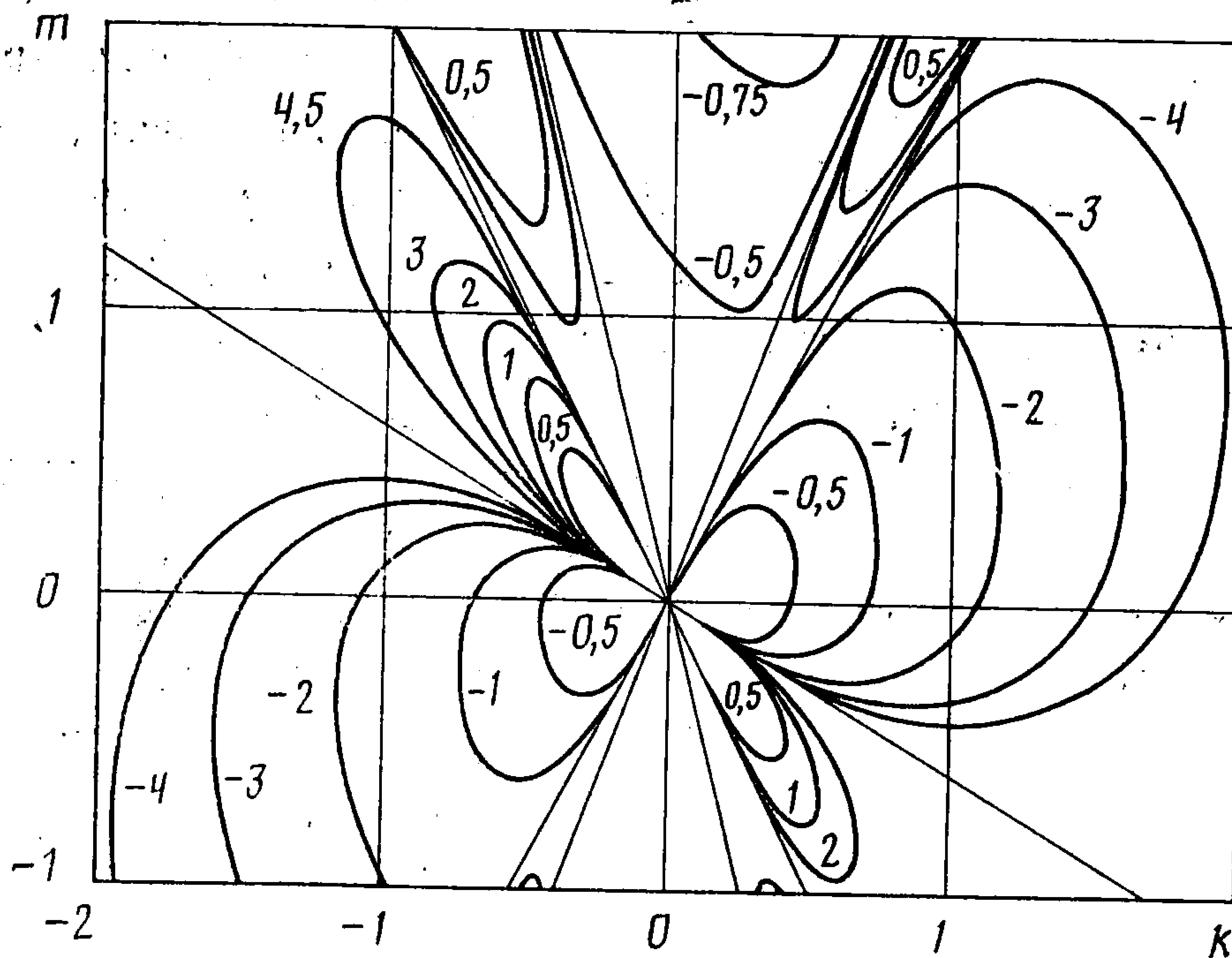
$$\Phi(\Omega) = i^{1/3} c^{-2/3} \tau_z^{-5/3}, \quad \omega = i^{-1/3} \Omega c^{2/3} \tau_z^{2/3} k^2 \quad (4.2)$$

в правой части которого ни k , ни m не содержатся. Сопоставим (4.2) с дисперсионным соотношением для прямых волн Толлмина — Шлихтинга, распространяющихся в несжимаемом пограничном слое Блазиуса, что соответствует $m = \tau_z = 0$. В последнем случае амплитуда возмущений остается постоянной во времени, если волновое число $k = k_* = 1,0005$. Отсюда вытекает, что постоянная $c = c_* = k_*^{-2} \tau_z^{-5/2} = 0,999 \tau_z^{-5/2}$ задает нейтральные колебания в дозвуковом пространственном пограничном слое при любом $M_\infty < 1$.

Кривая $m = c_* k^3$ служит асимптотой, отделяющей самовозбуждающиеся пульсации, для которых $c < c_*$, от устойчивых волн с $c > c_*$. Далее среди возмущений в несжимаемом пограничном слое Блазиуса можно вы-



Фиг. 3



Фиг. 4

делить такие, инкременты роста амплитуды которых достигают экстремальных значений. В принятых в [13] терминах соответствующие волновые числа определяются как $k = k_2^* = 2,716$ и $k = k_4^* = 4,346$ для максимумов, между ними лежит $k = k_3^* = 3,616$, реализующее минимум. Ясно, что $c = c_2^* = (k_2^*)^{-2} \tau_z^{-3/2} = 0,1356 \tau_z^{-3/2}$; $c = c_3^* = (k_3^*)^{-2} \tau_z^{-3/2} = 0,07648 \tau_z^{-3/2}$ и $c = c_4^* = (k_4^*)^{-2} \tau_z^{-3/2} = 0,05294 \tau_z^{-3/2}$ также обладают аналогичными экстремальными свойствами: будучи подставленными в правую часть (4.2), они дают решения Ω_1 с локальными отрицательными минимумами $\text{Im} (i^{-1/3} \Omega_{12}^* c_2^{*2/3} \tau_z^{2/3})$ и $\text{Im} (i^{-1/3} \Omega_{14}^* c_4^{*2/3} \tau_z^{2/3})$ и локальным отрицательным максимумом $\text{Im} (i^{-1/3} \Omega_{13}^* c_3^{*2/3} \tau_z^{2/3})$. Как следует отсюда, скорость роста амплитуды рассматриваемых самовозбуждающихся пульсаций, для которых постоянная $c < c_*$, в пределе $k \rightarrow \infty$ подчиняется оценке $\text{Im} \omega_1 \sim -k^2 \rightarrow -\infty$. Утверждение о некорректности задачи Коши, таким образом, доказано.

Контуры области вокруг первого главного минимума $\text{Im} (i^{-1/3} \Omega_{12}^* c_2^{*2/3} \tau_z^{2/3})$ хорошо видны на фиг. 3, нерегулярности в поведении линий уровня $\text{Im} \omega_1$ связаны с локальным максимумом $\text{Im} (i^{-1/3} \Omega_{13}^* c_3^{*2/3} \tau_z^{2/3})$ и вторым, более слабо выраженным минимумом $\text{Im} (i^{-1/3} \Omega_{14}^* c_4^{*2/3} \tau_z^{2/3})$.

К выводу о некорректности задачи Коши для линеаризованной системы уравнений (1.16), (1.17) можно прийти, рассмотрев также второй квадрант

изображенной на фиг. 3 плоскости k, m ; аналогичную структуру имеет четвертый квадрант. Положив $m = ck^3$, $c < 0$, будем считать $k \rightarrow -\infty$. Из $m > 0$ вытекает, что $K > 0$, поэтому оба соотношения (4.2) сохранят силу, если в них c заменить на $|c|$. Как следует из изложенного выше, кривая $m = -c_* k^3$ с коэффициентом $c_* = 0,999\tau_z^{-5/2}$ является второй ветвью асимптоты, отделяющей самовозбуждающиеся пульсации от устойчивых волн с экспоненциально затухающей амплитудой. Слева от этой ветви отчетливо выделяется область, существование которой обусловлено главным минимумом $\text{Im}(i^{-1/2}\Omega_{12}^* c_2^{*2/3} \tau_z^{2/3})$; нерегулярности в линиях уровня $\text{Im} \omega_1$, порождаемые локальным максимумом $\text{Im}(i^{-1/2}\Omega_{13}^* c_3^{*2/3} \tau_z^{2/3})$ и вторым минимумом $\text{Im}(i^{-1/2}\Omega_{14}^* c_4^{*2/3} \tau_z^{2/3})$, различить трудно. В принципиальном отношении важно, что в пределе $k \rightarrow -\infty$ скорость роста амплитуды самовозбуждающихся пульсаций с постоянной $|c| < c_*$ удовлетворяет оценке $\text{Im} \omega_1 \sim -k^2 \rightarrow -\infty$.

Перейдем к изложению результатов анализа косых волн Толлмина — Шлихтинга, распространяющихся в сверхзвуковом пространственном пограничном слое. Пусть снова $m = ck^3$, где постоянная может быть как положительной, так и отрицательной, и положим $k \rightarrow \pm \infty$ соответственно. Такие возмущения подчиняются второй из форм дисперсионного соотношения (2.12), которая в первом приближении сводится к (4.2) с заменой c на $|c|$. Отсюда сразу следует заключение о некорректности по Петровскому задаче Коши для линеаризованной системы уравнений (1.16) с давлением, определяемым соотношением (1.18). В данном случае некорректность вызывается волнами, направление нормали к фронту которых выходит за угол Маха α_∞ внешнего потока. Более того, вихри в таких волнах (как и в аналогичных волнах, движущихся в дозвуковом пограничном слое) вытянуты в направлении, весьма близком к направлению основного течения.

В заключение отметим особенность в решении дисперсионных уравнений, проистекающую из перехода приведенного волнового числа K через нуль. Очевидный смысл равенства $K = k\tau_x + m\tau_z$ состоит в требовании ортогональности волнового вектора вектору приложенного к стенке поверхностного трения. Используя (2.1), для дозвукового пограничного слоя в пределе $K \rightarrow 0$ ($k \rightarrow k_0$, $m \rightarrow m_0 = -k_0\tau_x/\tau_z$) имеем

$$\omega_1 = -\frac{c_0^2}{K} - \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \frac{K^3}{c_0} + \dots \quad (4.3)$$

$$c_0^2 = \frac{k_0^2 (k_0^2 + m_0^2)}{[(1 - M_\infty^2) k_0^2 + m_0^2]^{1/2}}$$

Недавно аналогичная особенность была указана для вихрей Гертлера в несжимаемой жидкости, обтекающей искривленную цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными вектору скорости основного движения [15—17]. Хотя здесь $\text{Im} \omega_1 = -\sqrt{2}K^3/(2c_0) \rightarrow 0$ вместе с $K \rightarrow 0$, весьма сильная особенность в $\text{Re} \omega_1$ может оказать существенное влияние на распространение сложных волновых структур (например, волновых пакетов).

Для собственных колебаний с $m^2 > (M_\infty^2 - 1)k^2$, имеющих место в сверхзвуковом пограничном слое, первая из формул (4.3) остается в силе, если под постоянной c_0 понимать

$$c_0^2 = \frac{k_0^2 (k_0^2 + m_0^2)}{[m_0^2 - (M_\infty^2 - 1)k_0^2]^{1/2}}$$

В этом случае, как было показано в предыдущем разделе $\tau_z/\tau_x < 1/\beta$, т. е. направление поверхностного трения попадает внутрь угла α_∞ Маха набегающего потока.

Пусть наоборот поле скоростей в исходном пространственном пограничном слое таково, что $\tau_z/\tau_x > 1/\beta$. В качестве примера на фиг. 4 изображены линии уровня функции $\text{Im } \omega_1$ в плоскости действительных волновых чисел k, m ; параметры невозмущенного движения выбраны следующими: $M_\infty = 2,1$, $\tau_x = \sqrt{3}/2$, $\tau_z = 1/2$. Вектор поверхностного трения теперь весьма сильно отклоняется от направления внешнего потока и лежит вне соответствующего ему угла α_∞ Маха. Как установлено в предыдущем разделе, переход через значение $K = 0$ в пограничном слое с рассматриваемой структурой может быть достигнут только в волнах, которые удовлетворяют условию $m^2 < (M_\infty^2 - 1) k^2$, означающему, что углы наклона их фронтов по отношению к направлению внешнего потока превосходят угол α_∞ Маха. Обращаясь к первой из форм дисперсионного соотношения (2.12), находим

$$\omega_1 = i \text{sign}(k) \frac{c_0^2}{K} + \dots, \quad c_0^2 = \frac{k_0^2 (k_0^2 + m_0^2)}{[(M_\infty^2 - 1) k_0^2 - m_0^2]^{1/2}}$$

Отсюда видно, что переход через $K = 0$ влечет за собой смену знака $\text{Im } \omega_1$, причем $\text{Im } \omega_1 = -c_0^2/K \rightarrow -\infty$ при $k < 0$ и $K \rightarrow 0_+$, аналогично $\text{Im } \omega_1 = -c_0^2/|K| \rightarrow -\infty$, когда $k > 0$, но $K \rightarrow 0_-$. Таким образом, даже для конечных значений обоих волновых чисел k и m задача Коши для линеаризованных уравнений (1.16), (1.18) поставлена некорректно по Петровскому, если вектор вязкого трения на дне пограничного слоя достаточно сильно отклоняется от направления сверхзвукового потока на его внешнем крае. Фактически причиной некорректности являются длинноволновые вихри, простирающиеся вдоль направления поверхностного трения (как правило, таким свойством обладают пульсации из коротковолновой части спектра). В итоге пространственные неоднородности, первоначально имевшиеся в исходном пограничном слое или возникшие в начальной фазе развития неустойчивых колебаний, способны оказывать сильное дестабилизирующее влияние на весь ход этого процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stewartson K. On the flow near trailing edge of a flat plate. II // *Mathematika*. 1969. V. 16. Pt 1. № 31. P. 106—121.
2. Messiter A. F. Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate // *SIAM J. Appl. Math.* 1970. V. 18. № 1. P. 241—257.
3. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1969. № 4. С. 53—57.
4. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1969. V. 312. № 1509. P. 181—206.
5. Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // *J. Fluid Mech.* 1977. V. 83. Pt 1. P. 163—176.
6. Жук В. И., Рыжов О. С. Об устойчивости свободно взаимодействующего пограничного слоя // *ПММ*. 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 552—563.
7. Рыжов О. С., Савенков И. В. Асимптотический подход в теории гидродинамической устойчивости // *Мат. моделирование*. 1989. Т. 1. № 4. С. 61—86.
8. Saric W. C., Yeates L. G. Experiments on the stability of crossflow vortices in swept-wing flows // *AIAA Paper*. 1985. № 85—0493. 13 p.
9. Качанов Ю. С., Тарарыкин О. И., Федоров А. В. Экспериментальное моделирование пограничного слоя на скользящем крыле в области формирования вторичного течения // *Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук*. 1989. Вып. 3. С. 44—53.
10. Мануйлович С. В. О свободном взаимодействии пространственного пограничного слоя с внешним потенциальным течением // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1983, № 5, С. 45—53.
11. Stewart P. A., Smith F. T. Three-dimensional instabilities in steady and unsteady

- non-parallel boundary layers, including effects of Tollmien-Schlichting disturbances and cross flow // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1987. V. 409. № 1837. P. 229—248.
12. *Ryzhov O. S., Zhuk V. I.* On the stability of a compressible boundary layer against three-dimensional disturbances with self-induced pressure gradient // Current Problems in Computational Fluid Dynamics. Moscow: MIR, 1986. С. 286—307.
 13. *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974—986.
 14. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Гостехиздат, 1953. 360 с.
 15. *Рожко С. Б., Рубан А. И.* Продольно-поперечное взаимодействие в трехмерном пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 3. С. 42—50.
 16. *Савенков И. В.* О неустойчивости пограничного слоя на искривленной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 176—179.
 17. *Рубан А. И.* Распространение волновых пакетов в пограничном слое на искривленной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 2. С. 59—68.

Москва

Поступила в редакцию
21.11.1991