Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 531.36

А. Л. Куницын, М. В. Матвеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТИМЫХ СИСТЕМ

Рассматривается задача об устойчивости точки покоя автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, относящейся к такому классу обратимых систем [1], для которого реализуется критический случай m нулевых и n пар чисто мнимых корней и при отсутствии внутренних резонансов [2, 3] точка покоя всегда обладает полной устойчивостью по Биркгофу [2]. Наличие же внутренних резонансов может привести к неустойчивости по Ляпунову, причем условия устойчивости и неустойчивости модельной системы при резонансах третьего порядка могут быть получены на основе критериев, разработанных ранее [4] для критического случая чисто мнимых корней.

Полученные результаты применяются при исследовании устойчивости поступательно-вращательного движения активного искусственного спутника Земли (ИСЗ) на круговой некеплеровой орбите, в том числе и геостационарного ИСЗ на произвольной широте [4, 5]. В предположении центральности поля тяготения Земли строится область устойчивости положений относительного равновесия и регулярной прецессии ИСЗ и исследуются резонансные режимы движения.

1. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{X}^{\cdot} = D\mathbf{X} + \Phi(\mathbf{X});\ \ \mathbf{X} \in R^N;\ \ \Phi(0) = 0 \tag{1.1}$$

(D — постоянная квадратная матрица, $\Phi(\mathbf{X})$ — голоморфная вектор-функция, разложение которой по степеням возмущений начинается членами не ниже второго порядка).

Предположим, что система (1.1) является обратимой в смысле [1], т. е. допускает линейный автоморфизм вида [6]

$$\mathbf{X} \to Q\mathbf{X},\ \ t \to -t,\ \ Q^2 = E \tag{1.2}$$

где Q — невырожденная квадратная матрица, E — единичная матрица. Тогда существует линейное преобразование, позволяющее ввести новые переменные $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, в которых матрица D диагонализируется, а автоморфизм (1.2) переходит в

$$\mathbf{U} \to \mathbf{U},\ \ \mathbf{V} \to -\mathbf{V},\ \ t \to -t \tag{1.3}$$

Ясно, что размерность вектора $\mathbf{U}$ определяется числом собственных значений матрицы Q, равных $+1$, а вектора $\mathbf{V}$ — равных -1. Из (1.2) следует, что все собственные значения Q равны $+1$. Предположим, дополнительно, что $\dim \mathbf{U} > \dim \mathbf{V}$. Тогда в новых переменных система (1.1) примет вид

$$\begin{gathered}\mathbf{U}^{\cdot} = A\mathbf{V} + F_u(\mathbf{U}, \mathbf{V}),\\ \mathbf{V}^{\cdot} = B\mathbf{U} + F_v(\mathbf{U}, \mathbf{V}),\quad \mathbf{U} \in R^{m+n},\quad \mathbf{V} \in R^n,\quad m + 2n = N\\ (F_u(\mathbf{U}, -\mathbf{V}) = -F_u(\mathbf{U}, \mathbf{V}),\quad F_v(\mathbf{U}, -\mathbf{V}) = F_v(\mathbf{U}, \mathbf{V}))\end{gathered} \tag{1.4}$$

где A и B — постоянные прямоугольные матрицы, а F_u и F_v — функции, аналогичные Φ в (1.1).

Анализируя структуру матрицы системы первого приближения для (1.1), можно убедиться, что ее характеристическое уравнение имеет по-крайней мере m нулевых корней с m группами решений. Остальные $2n$ корней можно [1] считать (в случае устойчивости в первом приближении и при отсутствии дополнительного вырождения) чисто мнимыми и различными.

Из сказанного следует, что от переменных $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ можно перейти к новым переменным $\xi \in R^m$, $\zeta \in C^n$, $\bar{\zeta} \in C^n$, в которых матрица D приводится к диагональному виду. Можно убедиться, что искомая матрица преобразования имеет следующую блочную структуру:

$$P = \begin{Vmatrix} M & F & F \\ 0 & iS & -iS \end{Vmatrix}$$

Здесь M, F, S — некоторые действительные прямоугольные матрицы размером $(m+n) \times m$, $(m+n) \times n$ и $n \times n$ соответственно.

Матрица обратного преобразования будет иметь вид

$$P^{-1} = \begin{Vmatrix} T & 0 \\ K & iL \\ K & -iL \end{Vmatrix}$$

где T, K, L — также некоторые действительные матрицы размером $m \times \times (m \times n)$, $n \times (m+n)$ и $n \times n$ соответственно.

Из структуры матрицы P^{-1} и наличия у системы (1.4) автоморфизма (1.3) следует, что в новых переменных система будет обладать автоморфизмом вида

$$\xi \to \xi, \ \zeta \to \bar{\zeta}, \ \bar{\zeta} \to \zeta, \ t \to -t \tag{1.5}$$

Можно убедиться, что вследствие этого степенные ряды в правых частях полученных уравнений будут иметь чисто мнимые коэффициенты; то же самое справедливо (аналогично случаю одних чисто мнимых корней [1, 7]) и для системы, получаемой после нелинейной нормализации [2, 3]. Поэтому при отсутствии внутренних резонансов после нелинейной нормализации (1.1) будем иметь систему

$$\begin{aligned} z_s^{\boldsymbol{\cdot}} &= z_s f_s (x_1, \ldots, x_m, z_1\bar{z}_1, \ldots, z_n\bar{z}_n) \\ \bar{z}_s^{\boldsymbol{\cdot}} &= \bar{z}_s \bar{f}_s (x_1, \ldots, x_m, z_1\bar{z}_1, \ldots, z_n\bar{z}_n) \\ x_k^{\boldsymbol{\cdot}} &= 0, \ (k = 1, \ldots, m; \ s = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{1.6}$$

где f_s, $\bar{f}_s$ — формальные ряды с чисто мнимыми коэффициентами. Как известно [2], тривиальное решение системы (1.6) (а следовательно, и исходной) обладает полной устойчивостью по Биркгофу, а при сходимости нормализующего преобразования — и по Ляпунову.

2. Рассмотрим теперь резонансный случай, когда вопрос об устойчивости решается первыми нелинейными членами, для чего между корнями $i\lambda_s$ должно выполняться соотношение (резонанс третьего порядка [2, 3])

$$\langle p, \lambda \rangle = 0, p_1 + \ldots + p_l = 3, 2 \leqslant l \leqslant 3, \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \tag{2.1}$$

где $p = (p_1, \ldots, p_l)$ — целочисленный вектор с взаимно-простыми неотрицательными компонентами. Тогда, переходя в нормальной форме к полярным координатам r_β, θ_β по формулам $z_\beta = r_\beta^{1/2} e^{i\theta_\beta}$, $\bar{z}_\beta = r_\beta^{1/2} e^{-i\theta_\beta}$, получим уравнения

$$\dot{x}_k = O(|x|^3, \ |x||r|, \ |r|^2) \ (k = 1, \ldots, m)$$

$$r_s^{\boldsymbol{\cdot}} = b_s \sin\theta \prod_{j=1}^{l} r_j^{p_j/2} + O(|x|^3, |r|^{3/2}) r_s^{1/2}, \quad (s = 1, \ldots, l)$$

$$\theta^{\cdot} = \sum_{s=1}^{l} \frac{1}{r_s} \Big[\sum_{k=1}^{m} p_s c_{sk} x_k + p_s b_s \cos\theta \prod_{j=1}^{l} r_j^{p_j - \delta_{sj}} + O(|x|^3, |r|^{3/2}) \Big] \quad (2.2)$$

$$\theta = p_1\theta_1 + \ldots + p_l\theta_l, \quad x = (x_1, \ldots, x_m), \quad r = (r_1, \ldots, r_n)$$

Здесь b_s и c_{sk} — некоторые вещественные постоянные; δ_{sj} — символ Кронекера.

Видно, что если в модельной системе, получаемой из (2.2) отбрасыванием невыписанных явно членов, положить $x = 0$, то она примет тот же вид, что и в случае одних чисто мнимых собственных значений [3, 8]. Это означает, что неустойчивость в модельной системе, если она имела место без нулевых корней, сохранится и при их наличии. С другой стороны, при $x \neq 0$ возможно построение знакоопределенного, интеграла, если он существует при $x = 0$. Указанное, а также известные результаты исследования устойчивости при резонансе третьего порядка позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Если все постоянные b_s в уравнениях (2.2) отличны от нуля и среди них найдется хотя бы одна пара b_μ, b_ν, такая, что $b_\mu b_\nu < 0$, то точка покоя модельной системы, соответствующей (2.2), устойчива по Ляпунову; в противном случае имеем неустойчивость.

Устойчивость может быть доказана при помощи интеграла

$$F = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} x_k^2 + \sum_{s=1}^{l} \gamma_s r_s + \sum_{\alpha=l+1}^{n} r_\alpha$$

который, как можно убедиться, будет знакоопределенным ($\gamma_s > 0$) при выполнении условия устойчивости теоремы 1. Неустойчивость следует из наличия у модельной системы растущего решения

$$x_k^* = 0, \ k = 1, \ldots, m; \ r_\alpha^* = 0, \ \alpha = l + 1, \ldots, m$$

$$\theta^* = \pm \frac{\pi}{2}, \quad r_s^* = \frac{|b_s|}{(a-t)^2} \Big(\prod_{j=1}^{l} |b_j|^{p_j} \Big)^{-1}, \quad s = 1, \ldots, l \quad (2.3)$$

Указанная неустойчивость влечет за собой неустойчивость и полной системы, т. е. справедлива.

Теорема 2. При наличии у модельной системы, соответствующей (2.2), решения (2.3) имеет место неустойчивость тривиального решения системы (2.2).

Доказательство проведем основываясь на рассуждениях, изложенных в [9] (иное доказательство, по-видимому, можно провести согласно [10]). Для этого перейдем в (2.2) к координатам θ, ρ, $y_1, \ldots, y_m$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{l-1}$, $r_{l+1}, \ldots, r_n$ по формулам

$$r_s = \sigma_s \rho \cos\varphi_s \prod_{j=1}^{s-1} \sin\varphi_j, \quad s = 1, \ldots, l-1$$

$$r_l = \sigma_l \rho \prod_{j=1}^{l-1} \sin\varphi_j \quad (2.4)$$

$$\rho y_k = x_k, \quad k = 1, \ldots, m; \quad \sigma_\beta = |b_\beta| \prod_{j=1}^{l} |b_j|^{p_j/2}, \quad \beta = 1, \ldots, l$$

и введем возмущения $\eta = \theta - \theta^*$, $\xi_s = \varphi_s - \varphi_s^*$, $s = 1, \ldots, l - 1$, где φ_s^* — значения φ_s на решении (2.3).

Уравнения для новых переменных запишутся так:

$$y_k^{\cdot} = -2l^{-1/4}\rho^{1/2}y_k\,[1 + O(|\xi|)] + O(\rho^3|y|^3, \rho|y||\rho_*|, |\rho_*|^2),\ k = 1, \ldots, m$$

$$\rho^{\cdot} = 2l^{-1/4}\rho^{3/2}\,[1 + O(|\xi|, \rho^2|y|^3, |P^{1/2}|^3\rho^{-1})] \tag{2.5}$$

$$\eta^{\cdot} = -3l^{-1/4}\rho^{1/2} + \rho\sum_{s=1}^{l}\sum_{k=1}^{m} p_s c_{sk} y_k + \rho^{1/2}O(|P^{1/2}|^3\rho^{-1}, |\xi|^2)$$

$$\xi_s^{\cdot} = -2l^{-1/4}\rho^{1/2}\xi_s + O(|P^{1/2}|^3, |\xi|^2\rho)\rho^{-1/2},\quad s = 1, \ldots, l-1$$

$$r_\alpha^{\cdot} = O(|P^{1/2}|^3)\,r_\alpha^{1/2},\quad \alpha = l+1, \ldots, n$$

Здесь

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{l-1}, \eta),\ y = (y_1, \ldots, y_m),\ \rho_* = (\rho, r_{l+1}, \ldots, r_n)$$

$$P^{1/2} = (\rho y_1, \ldots, \rho y_m, \rho^{1/2}, r_{l+1}^{1/2}, \ldots, r_n^{1/2})$$

Рассмотрим функцию [11]

$$2V = \gamma^2\Big(\rho - \sum_{\alpha=l+1}^{n} r_\alpha\Big) - \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \eta^2 - \sum_{s=1}^{l-1}\xi_s^2$$

которая в области $V > 0$ вместе со своей производной $V^{\cdot}$ в силу (2.5) при достаточно большом значении γ будет удовлетворять условию $VV^{\cdot} > 0$ и, следовательно, являться функцией Четаева для системы (2.5).

Замечание. 1°. Использованная в (2.4) замена x_k на y_k не мешает применению теоремы Четаева о неустойчивости, так как рассматриваются лишь движения в области $\rho > |y|^2/\gamma^2$.

2°. Полученный результат справедлив и в том случае, когда обратима не вся система (1.1), а только ее модельная часть, полученная из (1.1) отбрасыванием всех членов выше второго порядка.

3. Применим полученные результаты к исследованию устойчивости поступательно-вращательного движения активного искусственного спутника Земли (ИСЗ), который вследствие сообщения ему малого реактивного ускорения может двигаться по круговой орбите, плоскость которой не проходит через центр Земли. Такое движение представляет интерес, в частности, при рассмотрении геостационарных ИСЗ на произвольной широте [4, 5]. Предполагается, что создаваемое реактивным двигателем ускорение постоянно в связанной с корпусом ИСЗ системе координат $CX_1Y_1Z_1$, оси которой являются главными центральными осями инерции; вектор реактивного ускорения $\mathbf{w}$ приходит через центр масс спутника C. ИСЗ считается твердым телом переменной массы, сохраняющим подобие эллипсоида инерции по мере расхода рабочего тела.

Наличие постоянного реактивного ускорения позволяет осуществить такое движение центра масс, при котором

$$R = R_0\ (\mathrm{const}),\ \varphi = \varphi_0\ (\mathrm{const}),\ \theta_1 = \omega_1 t + \mathrm{const}$$

где R, φ, θ_1 — радиус, широта и долгота соответственно центра масс ИСЗ в сферической, геоцентрической, вращающейся вместе с Землей системе координат. Такое движение ИСЗ возможно в двух случаях: в первом из них (относительное равновесие) ИСЗ, обладая трехосным эллипсоидом инерции, покоится в невозмущенном движении относительно орбитальной системы $CXYZ$ (оси ее направлены по ортам сферической системы координат в точке C). Во втором случае (регулярная прецессия) ИСЗ, имея ось динамической симметрии, вдоль которой направлен вектор $\mathbf{w}$, равномерно вращается вокруг нее. Сама ось динамической симметрии покоится в невозмущенном движении в системе $CXYZ$.

Исследование устойчивости указанных стационарных движений осложняется тем, что наличие вектора реактивного ускорения, во-первых, не позволяет рассматривать движение центра масс независимо от вращательного движения и, во-вторых, приводит к возникновению (дополнительно к потенциальным и гироскопическим силам) еще и позиционных сил, что делает систему негамильтоновой.

Задача устойчивости относительного равновесия рассматривалась в [4] при аппроксимации гравитационного поля Земли полем однородного трехосного эллипсоида, в результате чего не возникало нулевых корней у характеристического уравнения системы в вариациях. В свою очередь учет нецентральности позволял рассматривать лишь такие геостационарные движения, в которых центр масс помещался в одну из точек либрации (такие точки либрации располагаются в двух перпендикулярных плоскостях, каждая из которых содержит одну из осей экваториального сечения земного эллипсоида). Полученные в разд. 1, 2 результаты позволяют теперь снять это ограничение посредством перехода к центральной модели гравитационного поля. Целесообразность такого подхода следует из того, что для геостационарных спутников влияние нецентральности соизмеримо с лунно-солнечными возмущениями.

Для получения уравнений движения в центральном поле достаточно в исходной системе уравнений, приведенной в [4], положить $I = \varepsilon = 0$ — параметры, характеризующие нецентральность, в результате чего от основной системы отделится уравнение для долготы θ_1. Оставшаяся система уравнений 11-го порядка имеет семейство частных решений, соответствующих относительному равновесию ИСЗ на круговой орбите с заданной широтой φ_0

$$R = R_0,\ \varphi = \varphi_0,\ \theta_1^{\cdot} = \omega_1,\ \beta_1 = \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \sin\lambda$$
$$p = 0,\ q = \omega_0 \cos(\varphi_0 - \lambda),\ r = \omega_0 \sin(\varphi_0 - \lambda)$$

Здесь ω_1 — угловая скорость центра масс ИСЗ относительно Земли в проекции на ось вращения последней; $\omega_0 = \omega_1 + \omega_3$ — проекция абсолютной угловой скорости центра масс (ω_3 — угловая скорость вращения Земли), p, q, r — проекции абсолютной угловой скорости ИСЗ на оси связанной системы; β_1, γ_1, γ_2 — направляющие косинусы, задающие взаимное расположение орбитальной и связанной систем координат.

Вводя возмущения

$$\begin{gathered} x_1 = (R - R_0)/R_0,\ x_2 = \varphi - \varphi_0,\ x_3 = (\theta^{\cdot} - \omega_0)/\omega_0,\ x_5 = \varphi^{\cdot}/\omega_0 \\ x_6 = p/\omega_0,\ x_7 = q/\omega_0 - \cos(\varphi_0 - \lambda),\ x_8 = r/\omega_0 - \sin(\varphi_0 - \lambda) \\ x_9 = \beta_1,\ x_{10} = \gamma_1,\ x_{11} = \gamma_2 - \sin\lambda\ \ (\theta = \theta_1 + \omega_3 t) \end{gathered} \tag{3.1}$$

и безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, можно показать, что система уравнений возмущенного движения допускает линейный автоморфизм

$$\begin{gathered} x_1 \to x_1,\ x_2 \to x_2,\ x_3 \to x_3,\ x_4 \to -x_4 \\ x_5 \to -x_5,\ x_6 \to -x_6,\ x_7 \to x_7,\ x_8 \to x_8 \\ x_9 \to -x_9,\ x_{10} \to -x_{10},\ x_{11} \to x_{11},\ \tau \to -\tau \end{gathered} \tag{3.2}$$

из наличия которого следует ее обратимость, причем реализуется рассмотренный выше случай (для доказательства надо в уравнениях возмущенного движения [4] положить $I = \varepsilon = 0$ и проверить (3.2) непосредственной подстановкой).

Из (3.2) и результатов разд. 1 следует, что в случае устойчивости в первом приближении характеристическое уравнение будет иметь лишь чисто мнимые и нулевые корни (из структуры (3.2) следует, что по крайней мере один нулевой корень будет обязательно).

Расчеты на ЭВМ показали, что внутри области устойчивости в первом приближении нулевой корень будет единственным. Таким образом, дальнейшее исследование сводится к построению в пространстве параметров областей, в которых ни один из корней характеристического уравнения не имеет вещественной части (как было указано выше, за исключением резонансных множеств это будут области полной устойчивости по Биркгофу) и выявлению неустойчивых резонансных режимов движения. Как показали расчеты на ЭВМ, полученные области практически (с точностью, пропорциональной параметру $\varepsilon \approx 10^{-6}$), совпадают с областями, построенными для нецентрального поля [4].

Перейдем к задаче об устойчивости регулярной процессии. В этом случае вместо направляющих косинусов для описания взаимного расположения орбитальной $CXYZ$ и связанной $CX_1Y_1Z_1$ систем целесообразно использовать углы Эйлера ψ, ϑ, Φ. В уравнениях движения центра масс вместо производной от долготы $\theta_1^{\cdot}$ удобнее ввести проекцию абсолютной угловой скорости центра масс ИСЗ на ось вращения Земли $\omega = \theta_1^{\cdot} + \omega_3$. Тогда уравнения движения центра масс примут вид

$$\begin{gathered}
d^2R/dt^2 - R\,(\omega^2\cos^2\varphi + \varphi^{\cdot 2}) = w\cos\vartheta - \mu/R^2 \\
d\,(R^2\varphi^{\cdot})/dt + R^2\omega^2\sin 2\varphi/2 = -Rw\cos\psi\sin\vartheta \\
d\,(R^2\omega\cos^2\varphi)/dt = Rw\cos\varphi\sin\psi\sin\vartheta
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь предполагалось, что вектор $\mathbf{w}$ направлен по оси CZ_1 связанной системы координат, которая является осью динамической симметрии ИСЗ; μ — гравитационный параметр центрального поля.

Для получения уравнений, описывающих вращательное движение ИСЗ относительно центра масс, введем еще одну (полусвязанную) систему координат $CX'Y'Z'$, ось CZ' которой совпадает с осью CZ_1, ось CX' направлена по линии узлов, образованной плоскостями X_1CY_1 и XCY, ось CY' дополняет систему до правой. В качестве фазовых координат выберем углы Эйлера ψ, ϑ и проекции p, q, r вектора угловой скорости ИСЗ на оси полусвязанной системы координат.

Не останавливаясь на громоздких промежуточных выкладках, приведем полученные уравнения:

$$\begin{gathered}
p^{\cdot} = -\bar{C}qr + q^2\operatorname{ctg}\vartheta - q\varphi^{\cdot}\sin\psi/\sin\vartheta - q\omega\cos\varphi\cos\psi/\sin\vartheta + \\
+ 3\mu\,(\bar{C} - 1)\,R^{-3}\cos\vartheta\sin\vartheta, \quad q^{\cdot} = \bar{C}pr - pq\operatorname{ctg}\vartheta + \\
+ p\varphi^{\cdot}\sin\psi/\sin\vartheta + p\omega\cos\varphi\cos\psi/\sin\vartheta, \quad r^{\cdot} = 0 \\
\psi^{\cdot} = q/\sin\vartheta - \varphi^{\cdot}\sin\psi\operatorname{ctg}\vartheta - \omega\,(\cos\varphi\cos\psi\operatorname{ctg}\vartheta + \sin\varphi) \\
\vartheta^{\cdot} = p + \varphi^{\cdot}\cos\psi - \omega\cos\varphi, \sin\psi
\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $\bar{C}$ — отношение моментов инерции спутника, а уравнение для $\Phi^{\cdot}$ отделяется и в дальнейшем не используется.

Система уравнений (3.3), (3.4) имеет частное решение, соответствующее регулярной процессии:

$$R = R_0\,(\text{const}),\ \ \varphi = \varphi_0\,(\text{const}),\ \ R^{\cdot} = \varphi^{\cdot} = 0,\ \ \omega = \omega_0\,(\text{const}),\ \ p = 0$$

$$q = \omega_0\cos(\varphi_0 - \vartheta_0),\ \ r = \omega_0\sin(\varphi_0 - \vartheta_0) + \omega^*,\ \ \psi = 0,\ \ \vartheta = \vartheta_0\,(\text{const})$$

При этом должны выполняться следующие соотношения между параметрами невозмущенного движения:

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{\rho\sin 2\varphi_0}{2(\rho\cos^2\varphi_0 - 1)} \qquad \left(\rho = \frac{R_0^3\omega_0^3}{\mu}\right)$$

$$\nu = \frac{\omega_0}{\omega_1^*} = \frac{\bar{C}-1}{2\bar{C}\cos(\varphi_0-\vartheta_0)}\left[\frac{3}{\rho}\sin 2\vartheta_0 - \sin 2(\varphi_0-\vartheta_0)\right]$$

позволяющие сделать вывод о существовании в случае регулярной прецессии двухпараметрического семейства решений (в качестве параметров можно, например, выбрать φ_0 и ρ). Еще одно соотношение определяет величину ω_0:

$$\left[\frac{\mu}{R_0^4} + \left(\omega_0^2 R_0 - \frac{2\mu}{R_0^2}\right) R_0\omega_0^2\cos^2\varphi_0\right]^{1/2} = w$$

Согласно теореме Малкина [11], характеристическое уравнение системы в вариациях для указанного двухпараметрического семейства обязательно будет иметь два нулевых корня.

Вводя аналогично (3.1) безразмерные возмущения и время

$$x_1 = R/R_0 - 1,\ x_2 = \varphi - \varphi_0,\ x_3 = \omega/\omega_0 - 1,\ x_4 = R^{\cdot}/(\omega_0 R_0)$$

$$x_5 = \varphi^{\cdot}/\omega_0,\ x_6 = p/\omega_0,\ x_7 = q/\omega_0 - \cos(\varphi_0 - \vartheta_0)$$

$$x_8 = r/\omega_0 - \sin(\varphi_0 - \vartheta_0) - \nu,\ x_9 = \psi,\ x_{10} = \vartheta - \vartheta_0$$

$$\tau = \omega_0 t$$

запишем уравнения возмущенного движения в виде

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_4,\quad \frac{dx_2}{d\tau} = x_5,\quad \frac{dx_3}{d\tau} = 2(1+x_3)x_5\operatorname{tg}(\varphi_0+x_2) -$$

$$-2\frac{x_4(1+x_3)}{1+x_1} - \frac{S_1\sin 2\varphi_0\sin x_9}{2(1+x_1)\sin\vartheta_0\cos(\varphi_0+x_2)}$$

$$\frac{dx_4}{d\tau} = (1+x_1)\left[(1+x_3)^2\cos^2(\varphi_0+x_2) + x_5^2\right] - \frac{1}{\rho(1+x_1)^2} - \frac{C_1\sin 2\varphi_0}{2\sin\vartheta_0},$$

$$\frac{dx_5}{d\tau} = -2\frac{x_4x_5}{1+x_1} - \frac{(1+x_3)^2\sin 2(\varphi_0+x_2)}{2} + \frac{S_1\sin 2\varphi_0\cos x_9}{2(1+x_1)\sin\vartheta_0}$$

$$\frac{dx_6}{d\tau} = (\bar{C}_0 + x_7)\left[(\bar{C}_0 + x_7)\frac{C_1}{S_1} - \bar{C}(S_0 + x_8 + \nu) - \frac{x_5\sin x_9}{S_1} -\right.$$

$$\left. - \frac{(1+x_3)\cos(\varphi_0+x_2)\cos x_9}{S_1}\right] + \frac{3(\bar{C}-1)S_1C_1}{\rho(1+x_1)^3}$$

$$\frac{dx_7}{d\tau} = x_6\left[\bar{C}(S_0 + x_8 + \nu) - (\bar{C}_0^- + x_7)\frac{C_1}{S_1} + (1+x_3)\frac{\cos(\varphi_0+x_2)\cos x_9}{S_1}\right]$$

$$\frac{dx_8}{d\tau} = 0,\quad \frac{dx_9}{d\tau} = \frac{C_0^+ + x_7}{S_1} - x_5\frac{C_1}{S_1}\sin x_9 - (1+x_3)\frac{C_1}{S_1}\cos(\varphi_0 +$$

$$+ x_2)\cos x_9 - (1+x_3)\sin(\varphi_0+x_2),\quad \frac{dx_{10}}{d\tau} = x_6 + x_5\cos x_9 -$$

$$-(1+x_3)\cos(\varphi_0+x_2)\sin x_9$$

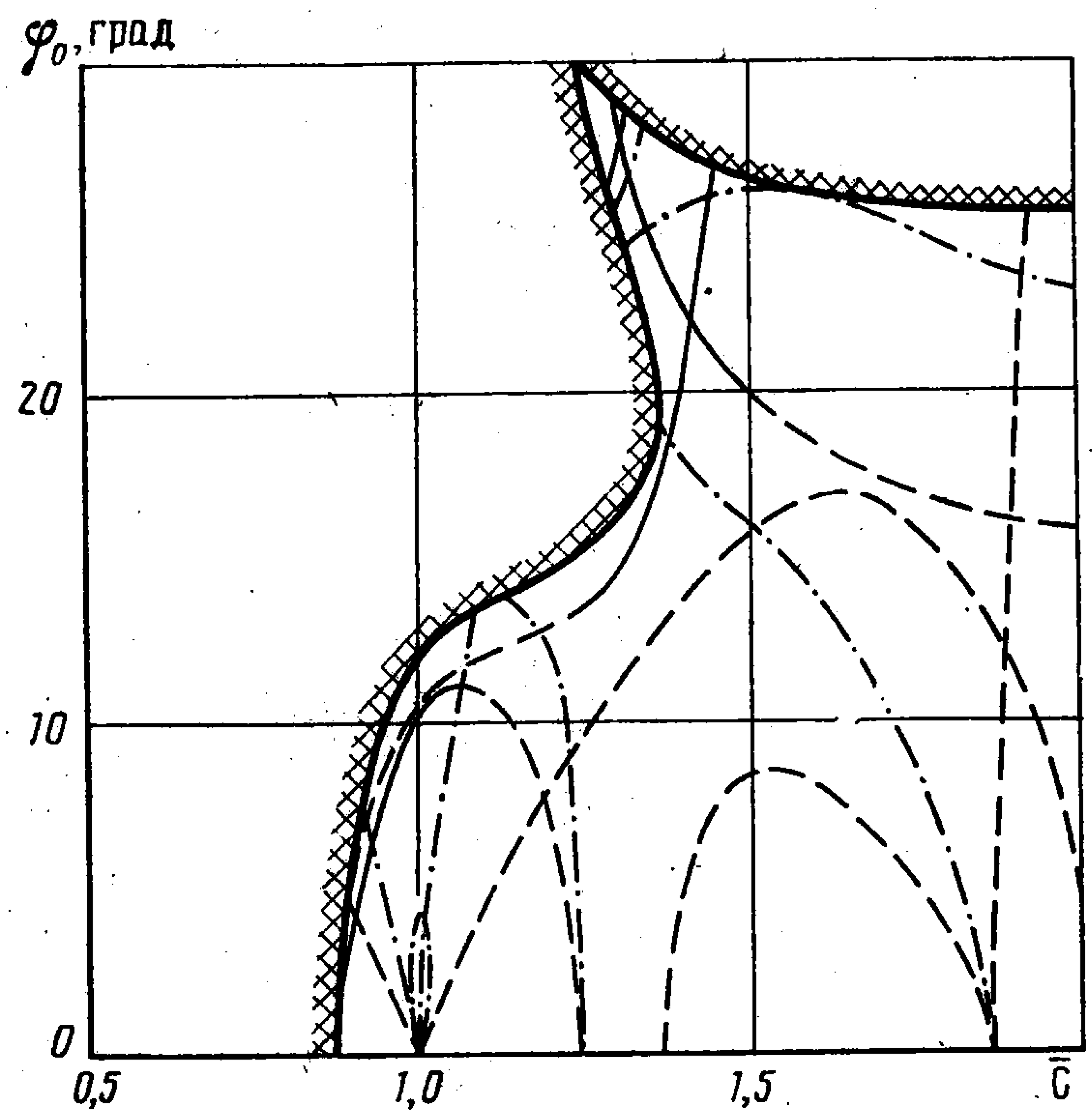
$$(C_0^{\pm} = \cos(\varphi_0 \pm v_0),\ S_0 = \sin(\varphi_0 - \vartheta_0),\ C_1 = \cos(\vartheta_0 + x_{10})$$

$$S_1 = \sin(\vartheta_0 + x_{10})).$$

Выписанная система допускает линейный автоморфизм, отличающийся от (3.2) отсутствием $x_{11} \to x_{11}$ и заменой $x_{10} \to -x_{10}$ на $x_{10} \to x_{10}$. Следовательно, она относится к классу обратимых систем, рассмотренному выше. Таким образом, задача устойчивости для регулярной процессии сводится к построению в пространстве параметров области, в которой корни характеристического уравнения не имеют вещественных частей, и к исследованию внутренних резонансов. Ввиду высокого порядка системы построение области устойчивости на плоскости φ_0, $\bar{C}$ и исследование внутренних резонансов третьего порядка (как наиболее опасных) проводилось численно на ЭВМ. При этом величина ускорения w была выбрана из условия его минимальности, приводящего к необходимости выполнения соотношения [4]:

$$\rho_{opt} = {}^1/_2 \left(\sqrt{1 + 8 \sec^2 \varphi_0} - 1\right)$$

На фигуре штриховкой обозначена граница области полной устойчивости по Биркгофу, а пересекающие ее кривые соответствуют внутренним резонансам третьего порядка. Сплошными линиями показаны резонансные множества, приводящие к неустойчивости по Ляпунову, а штриховыми — на которых устойчивость сохраняется и во втором порядке. Как показали расчеты, на некоторых кривых часть коэффициентов b_3



нормальной формы обращается в нуль. При отсутствии нулевых корней это приводит либо к сохранению устойчивости и во втором порядке, либо к негрубой неустойчивости [8], что остается справедливо и в данном случае, как это следует из полученных выше результатов. Резонансные множества, на которых имеет место негрубая неустойчивость, обозначены штрихпунктирной линией.

Сравнивая полученные результаты с приведенными в [4], можно заметить, что при регулярной прецессии область устойчивости увеличивается по сравнению с относительным равновесием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems. Princeton; New Jersey: Princeton Univ. Press., 1973. 198 p.
2. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
3. *Куницын А. Л.* Методы исследования нелинейных резонансных систем. М.: МАИ, 1983. 59 с.
4. *Куницын А. Л., Медведев С. В.* Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 422—429.
5. *Куницын А. Л., Шибанов А. С.* О поступательно-вращательном движении стационарного орбитального корабля // Проблемы механики управляемого движения. Пермь: Изд. Пермск. ун-т, 1973. № 3. С. 116—124.
6. *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1979. 255 с.
7. *Тхай В. Н.* Об устойчивости механических систем под действием позиционных сил // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 40—48.
8. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л.* Об устойчивости автономных систем при внутреннем резонансе // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 974—984.
9. *Гольцер Я. М., Куницын А. Л., Тхай В. Н.* О грубости свойства неустойчивости одного класса резонансных систем. М.: ВЦ АН СССР. 1980. 12 с.
10. *Медведев С. В.* Об устойчивости периодических движений в одном критическом случае // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 650—659.
11. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

Москва

Поступила в редакцию 25.XI.1990