Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 531.36

Н. К. Мощук, И. Н. Синицын

О СТАЦИОНАРНЫХ И ПРИВОДИМЫХ К СТАЦИОНАРНЫМ РЕЖИМАХ В НОРМАЛЬНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматриваются стационарные в узком смысле режимы в многомерных нелинейных нормальных системах, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями Ито с винеровскими процессами. Получены условия существования стационарных и приводимых к стационарным одномерных распределений. Найдены точные выражения для стационарных распределений в некоторых механических системах.

1. Многие задачи статистической динамики систем с сервосвязями, систем с идеальными стохастическими голономными и неголономными связями, находящихся под действием позиционно консервативных и неконсервативных, ускоряющих и диссипативных, гироскопических и возмущающих сил, путем расширения вектора состояния приводятся к рассмотрению нормальных стохастических систем [1—3]. Под нормальной стохастической дифференциальной системой (СДС) будем понимать стохастическую систему, состояние которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с соответствующим начальным условием

$$\mathbf{Z}^{\cdot} = \mathbf{a}(\mathbf{Z}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{Z}, t)\mathbf{V}, \quad \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{Z} \in R^k$ — вектор состояния (в общем случае расширенный), $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{Z}, t)$ и $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{Z}, t)$ — детерминированные функции отмеченных переменных размерности $k \times 1$ и $k \times l$ соответственно, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t)$ — вектор (размерности l) независимых нормально распределенных белых шумов с нулевым математическим ожиданием и матрицей $l \times l$ интенсивностей $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(t)$, представляющий собой производную по времени от винеровского процесса. Начальное значение $\mathbf{Z}_0$ вектора состояния в момент t_0 представляет собой случайную величину, не зависящую от значений белого шума $\mathbf{V}(t)$ при $t \geqslant t_0$.

СДС (1.1) назовем стационарной, когда интенсивность $\boldsymbol{\nu}$ белого шума $\mathbf{V}(t)$ постоянна, а функции $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не зависят от времени $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{Z})$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{Z})$. В этом случае СДС (1.1) принимает вид

$$\mathbf{Z}^{\cdot} = \mathbf{a}(\mathbf{Z}) + \mathbf{b}(\mathbf{Z})\mathbf{V}, \quad \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0 \tag{1.2}$$

СДС (1.1) называется приводимой к стационарной, если существует гладкая обратимая замена переменных состояния и независимого аргумента, такая, что в новых переменных СДС имеет вид (1.2).

Проблеме нахождения стационарных режимов в многомерных стационарных нелинейных СДС посвящено много работ (см., например, [1—4]) и приведенную там библиографию), в которых для ряда важных практических случаев указаны точные выражения для одномерных распределений. Для линейных СДС точные выражения для распределений приведены в [1]. Для многомерных нелинейных СДС разработан ряд приближенных методов определения стационарных распределений (метод нормальной аппроксимации, метод моментов, семиинвариантные методы, методы, основанные на ортогональных разложениях и др.), основанных на параметризации распределений (см. например, [1]).

Поставим задачу найти точные выражения для одномерных распределений стационарных в узком смысле режимов в СДС (1.2), а также для режимов, приводимых к стационарным.

Как известно (см., например, [1]), одномерная плотность $f = f(\mathbf{z}, t)$ случайного процесса $\mathbf{Z}(t)$ в СДС (1.1) удовлетворяет следующему уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}[\mathbf{a}(\mathbf{z}, t) f] + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}}\frac{\partial^T}{\partial \mathbf{z}}[\sigma(\mathbf{z}, t) f]\right\}, \qquad \sigma = \mathbf{b}\nu\mathbf{b}^T \quad (1.3)$$

с соответствующим начальным условием и условием нормировки.

2. *Утверждение* 1. Функция $f = f(\mathbf{z}, t)$ будет решением уравнения ФПК (1.3) тогда и только тогда, когда векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{z}, t)$ допускает представление $\mathbf{a}(\mathbf{z}, t) = \mathbf{a}_1(\mathbf{z}, t) + \mathbf{a}_2(\mathbf{z}, t)$, такое, что функция f является плотностью конечной инвариантной меры системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{z}^{\cdot} = \mathbf{a}_1(\mathbf{z}, t) \qquad (2.1)$$

т. е. удовлетворяет условию

$$\partial^T/\partial \mathbf{z}\,(\mathbf{a}_1 f) = 0 \qquad (2.2)$$

а составляющая $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2(\mathbf{z}, t)$ определяется формулой

$$\mathbf{a}_2 = [\sigma\partial \ln f/\partial \mathbf{z} + (\partial^T/\partial \mathbf{z}\sigma)^T]/2 \qquad (2.3)$$

Доказательство немедленно вытекает из уравнения ФПК. Перепишем (1.3) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^T}{\partial \mathbf{z}} f\left\{\mathbf{a} - \frac{1}{2f}\left[\frac{\partial^T}{\partial \mathbf{z}}(\sigma f)\right]^T\right\} = 0 \qquad (2.4)$$

Отсюда ясно, что f будет решением (1.3), если и только если

$$\partial f/\partial t + \partial^T/\partial \mathbf{z}\,(\mathbf{a}_1 f) = 0$$

где $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_2$.

Замечания. 1°. Систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) назовем невозмущенной. Такое определение позволяет трактовать исходную СДС (1.1) как результат возмущения системы (2.1) некоторыми диссипативными составляющими $\mathbf{a}_2$ и случайными членами $\mathbf{b}\mathbf{V}$. Возникает аналогия между СДС (1.1) и гладкой динамической системой, описываемой уравнениями (2.1). Математическое ожидание известной функции состояния при такой аналогии переходит в среднее по мере. Отмеченная аналогия может оказаться полезной для доказательства отсутствия стационарных распределений (см. разд. 4).

2°. Невозмущенная система по смыслу существует всегда, но особый интерес она вызывает в случае существования стационарного режима. Для стационарного режима невозмущенная система представляет собой автономную систему $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(\mathbf{z})$.

Для стационарной СДС (1.2) невозмущенная система (2.1) описывается уравнением

$$\mathbf{z}^{\cdot} = \mathbf{a}_1(\mathbf{z}) \qquad (2.5)$$

Поэтому из утверждения 1 следует, что стационарное в узком смысле решение существует тогда и только тогда, когда существует представление $\mathbf{a}(\mathbf{z}) = \mathbf{a}_1(\mathbf{z}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{z})$, где невозмущенная система (2.5) имеет конечную инвариантную меру с плотностью $f(\mathbf{z})$. Таким образом, стационарные режимы в исходной СДС (1.2) существуют, если (и только если) ее можно рассматривать как возбуждение невозмущенной системы (2.5) с конечной инвариантной мерой некоторыми диссипативными и случайными воздействиями. Конечно, нахождение $\mathbf{a}_1(\mathbf{z})$ и $\mathbf{a}_2(\mathbf{z})$, удовлетворяющих условиям утверждения 1, это такая же трудная задача, как и решение уравнения ФПК (1.3). Однако в приложениях (например, в задачах механики) часто исходное векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{z})$

сразу представляется в виде $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, где система (2.5) имеет интегральный инвариант (или даже целое семейство). Отсюда вытекает и конструктивный подход к поиску одномерных стационарных распределений.

Утверждение 2. Предположим, что в СДС (1.2) известно представление векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{z})$ в виде $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1(\mathbf{z}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{z})$, причем $\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\mathbf{a}_1\mu) = 0$, где $\mu(\mathbf{z}) \geqslant 0$ — некоторая скалярная функция. Тогда если

1) существует обратная матрица $\sigma^{-1}(\mathbf{z})$,

2) векторное поле $\gamma(\mathbf{z}) = \sigma^{-1}\{2\mathbf{a}_2 - \mu^{-1}[\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\sigma\mu)]^T\}$ безвихревое, т. е. $\partial\gamma_i/\partial z_j = \partial\gamma_j/\partial z_i$; $i, j = 1, \ldots, k$,

3) $F(\mathbf{z}) = \int \gamma^T(\mathbf{z})d\mathbf{z}$ — первый интеграл системы (2.5),

4) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu(\mathbf{z}) \exp F(\mathbf{z})\, d\mathbf{z} = 1$,

то $f(\mathbf{z}) = \mu(\mathbf{z}) \exp F(\mathbf{z})$ является одномерной плотностью стационарного процесса $\mathbf{Z}(t)$ СДС (1.2).

Доказательство. Представим $f(\mathbf{z})$ в виде $f = \mu f_0$ и перепишем уравнение ФПК в форме

$$\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\mathbf{a}_1\mu f_0) + \partial^T/\partial\mathbf{z}\Theta = 0, \quad \Theta = \mathbf{a}_2\mu f_0 - {}^1/_2\,[\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\sigma\mu f_0)]^T$$

Можно получить следующее выражение:

$$\Theta = \mu f_0\,\{\mathbf{a}_2 - {}^1/_2\mu^{-1}[\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\sigma\mu)]^T - {}^1/_2\sigma\partial\ln f_0/\partial\mathbf{z}\} = {}^1/_2\mu f_0\sigma\,[\gamma(\mathbf{z}) - \partial\ln f_0/\partial\mathbf{z}]$$

Отсюда видно, что если поле $\gamma(\mathbf{z})$ безвихревое и $\ln f_0 = \int \gamma^T(\mathbf{z})d\mathbf{z}$, то $\Theta = 0$. Далее

$$\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\mathbf{a}_1\mu f_0) = f_0\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\mathbf{a}_1\mu) + \mathbf{a}_1^T\mu\partial f_0/\partial\mathbf{z} = \mu\mathbf{a}_1^T\partial f_0/\partial\mathbf{z}$$

Если f_0 — первый интеграл системы (2.5), то $\mathbf{a}_1^T\partial f_0/\partial\mathbf{z} = 0$ и $\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\mathbf{a}_1\mu f_0) = 0$. Следовательно, $\partial^T/\partial\mathbf{z}\,(\mathbf{a}_1\mu f_0) = \partial^T/\partial\mathbf{z}\Theta = 0$.

Замечания. 1°. Плотность интегрального инварианта $\mu(\mathbf{z})$ и первый интеграл $f_0(\mathbf{z})$ определены с точностью до постоянного множителя.

2°. Система (2.5) при выполнении всех условий утверждения 2 имеет целое семейство инвариантных мер, плотность которых равна произведению μ на произвольную функцию первых интегралов. Разумеется, $f(\mathbf{z})$ также является плотностью инвариантной меры системы (2.5).

3°. Утверждение 2 допускает обобщение на случай, когда $\Theta \neq 0$, но $\Theta = \mathrm{const}$.

Отдельно рассмотрим важный частный случай СДС (1.2)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{b}(\mathbf{q})\,\mathbf{V} \qquad (2.6)$$

часто возникающих при изучении механических систем, находящихся под действием случайных воздействий. В (2.6) $\mathbf{q} = [q_1, \ldots q_n]^T$ — вектор координат, $\mathbf{p} = [p_1 \ldots p_m]^T$ — вектор импульсов, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$ — детерминированные функции той же размерности, что и векторы $\mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ соответственно, а $\mathbf{V}(t)$ — вектор нормальных стационарных белых шумов. Для такой системы матрица σ в СДС (1.2) вырождена.

Переформулируем утверждение 2 для этого случая.

Утверждение 3. Предположим, что известно представление вектора $\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{P}_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{P}_2(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, причем $\partial^T/\partial\mathbf{q}\,(\mathbf{Q}\mu) + \partial^T/\partial\mathbf{p}\,(\mathbf{P}_1\mu) = 0$, $\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \geqslant 0$. Тогда если

1) $\det\sigma(\mathbf{p}) \neq 0 \quad (\sigma = \mathbf{b}\nu\mathbf{b}^T)$,

2) $\partial\gamma_i/\partial p_j = \partial\gamma_j/\partial p_i$ $(i, j = 1, \ldots, m)$; $\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 2\sigma^{-1}(\mathbf{q})\,\mathbf{P}_2$,

3) $F(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \int \gamma^T(\mathbf{q}, \mathbf{p})\,d\mathbf{p}$ — первый интеграл системы $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q}$, $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{P}_1$,

4) функция $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \exp F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ удовлетворяет условию нормировки, то $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ — одномерная плотность стационарного процесса $[\mathbf{q}(t)^T \mathbf{p}(t)^T]^T$ системы (2.6).

Заметим, что если $\mathbf{P}_2 = \partial\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p})/\partial\mathbf{p}$, то условие 2 означает, что коммутатор матриц σ^{-1} и $\Phi_{\mathbf{pp}} = (\partial/\partial\mathbf{p})(\partial^T/\partial\mathbf{p})\Phi$ равен нулю.

Естественным образом на случай системы (2.6) переносится и утверждение 1.

Утверждение 4. Функция $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ будет решением уравнения (1.3) для СДС (2.6), если и только если вектор $\mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ допускает представление $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ так, что f — плотность конечной инвариантной меры системы

$$\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{P}_1 \tag{2.7}$$

а функция $\mathbf{P}_2$ определяется формулой

$$\mathbf{P}_2 = {}^1/_2\sigma(\mathbf{q})\,\partial \ln f/\partial\mathbf{p} \tag{2.8}$$

Таким образом, задачу нахождения одномерных стационарных распределений в системе (2.6) можно переформулировать как задачу нахождения плотности f инвариантной меры (если она существует) системы специального вида

$$\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - {}^1/_2\sigma(\mathbf{q})\,\partial \ln f/\partial\mathbf{p} \tag{2.9}$$

Было рассмотрено [4] стохастическое возмущение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с конечной инвариантной мерой и получены достаточные условия существования стационарных в узком смысле решений, одномерная плотность которых просто совпадает с плотностью инвариантной меры невозмущенной системы. На самом деле эти условия являются и необходимыми. Приведем эти условия.

Рассмотрим следующую СДС:

$$\mathbf{Z}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{a}_1(\mathbf{Z}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{Z}) + \mathbf{b}(\mathbf{Z})\mathbf{V} \tag{2.10}$$

Предположим, что скалярная функция $N(\mathbf{z})$ — плотность конечной инвариантной меры системы $\mathbf{z}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{a}_1(\mathbf{z})$, т. е.

$$\frac{\partial^T}{\partial\mathbf{z}}(\mathbf{a}_1 N) = 0, \quad N \geqslant 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} N\,d\mathbf{z} = 1$$

Утверждение 5. Функция $N(\mathbf{z})$ будет одномерной плотностью стационарного процесса СДС (2.10) тогда и только тогда, когда существует такая матричная функция $\mathbf{A}(\mathbf{z})$, что

$$1)\ \ \mathbf{a}_2 N = (\partial^T/\partial\mathbf{z}\mathbf{A})^T, \qquad 2)\ \ \mathbf{A} + \mathbf{A}^T = \sigma N \tag{2.11}$$

Сопоставим утверждения 2, 3 и 5. Конечно, во всех этих утверждениях искомая одномерная плотность совпадает с плотностью инвариантной меры невозмущенной системы. Однако утверждения 2, 3 удобнее использовать там, где у невозмущенной системы заранее неизвестны первые интегралы, а известна только плотность инвариантной меры (не обязательно конечной). В тех же случаях, когда у невозмущенной системы известны и плотность инвариантной меры, и некоторые (или все) ее первые интегралы, удобнее использовать утверждение 5.

Пусть, например, натуральная механическая система $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, $\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ обладает инвариантной мерой с плотностью $N(\mathbf{q})$ и набором первых интегралов $H_1, \ldots, H_\varkappa$, квадратичных или линейных по $\mathbf{p}$. Тогда, если эта система находится в случайной среде, то одномерную плотность стационарного распределения можно искать в виде

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = N(\mathbf{q}) \exp(-\theta H) \qquad (2.12)$$

где θ — скалярный параметр, а в качестве функции H можно использовать связку интегралов Четаева

$$H = \sum \lambda_i H_i + \sum \lambda_j' H_j^2$$

Здесь λ_i, λ_j' — некоторые постоянные, подбираемые так, чтобы функция H была определенно-положительной квадратичной формой импульсов.

При помощи утверждения 5 были получены [4] условия существования стационарных режимов в стохастических неголономных системах Чаплыгина при стохастической нестабильности связей.

Важное практическое значение в задачах механики имеет случай стационарных распределений, для которого логарифм одномерной плотности является квадратичной формой по части переменных.

Рассмотрим гамильтонову систему с функцией Гамильтона $H = \mathbf{p}^T\Omega(\mathbf{q})\mathbf{p}/2 + \Pi(\mathbf{q})$, находящуюся под действием диссипативных сил, линейных по импульсам, а также случайных сил

$$\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = \partial H/\partial \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = -\partial H/\partial \mathbf{q} + \mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{p} + \mathbf{b}(\mathbf{q})\mathbf{V} \qquad (2.13)$$

Здесь $\mathbf{V}(t)$ — вектор стационарных нормальных белых шумов.

Поставим задачу об отыскании необходимых и достаточных условий существования стационарных распределений, одномерная плотность которых является функцией вида $f = c \exp(-F)$, $F = \mathbf{p}^T\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{p}/2 + h(\mathbf{q})$ — определенно-положительная форма p. Такие распределения являются нормальными по отношению к импульсам $\mathbf{p}$.

Прямой подстановкой в уравнение ФПК доказывается

Утверждение 6. Функция $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ будет решением уравнения ФПК тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $\{F, H\} = 0$, 2) $\mathbf{AD} + \mathbf{D}^T\mathbf{A} + \mathbf{A}\sigma\mathbf{A} = 0$

Это утверждение допускает обобщение на случай СДС вида

$$\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mathbf{D}(\mathbf{q})\mathbf{p} + \mathbf{b}(\mathbf{q})\mathbf{V}$$

Здесь функция $\mathbf{Q}$ линейна, а функция $\mathbf{P}$ квадратична по импульсам $\mathbf{p}$. Такими уравнениями описываются, например, стохастические неголономные системы Чаплыгина [2].

Предположим, что уравнения $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{P}$ имеют интегральный инвариант с плотностью $\mu(\mathbf{q}) \geqslant 0$.

Утверждение 7. Функция $f = c \exp(-F)$ будет решением уравнения ФПК (1.3), если и только если выполнены условия:

1) $F - \ln \mu$ будет первым интегралом уравнений $\mathbf{q}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{Q}$, $\mathbf{p}^{\boldsymbol{\cdot}} = \mathbf{P}$,

2) $\mathbf{AD} + \mathbf{D}^T\mathbf{A} + \mathbf{A}\sigma\mathbf{A} = 0$

3. Рассмотрим несвободное движение системы материальных точек массы m_s $(s = 1, 2, \ldots)$ относительно некоторой декартовой системы координат. Положение системы задается радиус-векторами $\mathbf{r}_s$ ее точек. Связи предполагаются удерживающими, голономными, стационарными и идеальными. Обозначим через $\mathbf{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T$ вектор обобщенных координат системы. Предположим, что система находится в однородном поле случайных сил с ускорением, представляющим собой вектор независимых нормальных белых шумов $\mathbf{V}$ постоянной интенсивности ν, а также в поле потенциальных и диссипативных сил с функцией диссипации Φ, пропорциональной квадрату скорости центра масс.

Запишем уравнения движения в гамильтоновой форме. Вектор $\mathbf{Q}_1$ обобщенных случайных сил равен $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{b}(\mathbf{q})\mathbf{V}$, $\mathbf{b}(\mathbf{q}) = \partial/\partial\mathbf{q}\,(M\mathbf{r})$. Здесь M — масса всей системы, $\mathbf{r} = \sum_s m_s\mathbf{r}_s/M$ — радиус-вектор центра масс системы. Действительно

$$\sum_s m_s\mathbf{V}\delta\mathbf{r}_s = \sum_s m_s\mathbf{V}\sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathbf{r}_s}{\partial q_i}\delta q_i = M\sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_i}\mathbf{V}\delta q_i$$

Так как $\Phi = \varepsilon(M\mathbf{r}^{\bullet})^2/2$ ($\varepsilon = \text{const}$), то вектор $\mathbf{Q}_2$ обобщенных сил сопротивления определяется выражением

$$\mathbf{Q}_2 = -\varepsilon\mathbf{a}(\mathbf{q})\,\mathbf{q}^{\bullet}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{q}) = \mathbf{b}\mathbf{b}^T$$

Действительно

$$-\mathbf{Q}_2 = \frac{\partial}{\partial\mathbf{q}^{\bullet}}\left[\frac{1}{2}\varepsilon(M\mathbf{r}^{\bullet})^2\right] = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}^{\bullet}}\left(\frac{\partial^T M\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{q}^{\bullet}\right)^2 = \varepsilon\frac{\partial M\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}}\frac{\partial^T M\mathbf{r}}{\partial\mathbf{q}}\mathbf{q}^{\bullet}$$

Следовательно, стохастические уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\mathbf{q}^{\bullet} = \frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}}, \quad \mathbf{p}^{\bullet} = -\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}} - \varepsilon\mathbf{a}(\mathbf{q})\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}} + \mathbf{b}(\mathbf{q})\mathbf{V} \tag{3.1}$$

где H — функция Гамильтона системы.

Воспользуемся теперь утверждением 3. В данном случае $\mathbf{P}_1 = -\partial H/\partial\mathbf{q}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_2$, $\mu = 1$, $\det\sigma(\mathbf{q}) \neq 0$ ($\sigma = \gamma\mathbf{b}\mathbf{b}^T$), а векторное поле

$$\gamma(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = -2\sigma^{-1}\varepsilon\mathbf{a}\partial H/\partial\mathbf{p} = -2\varepsilon\nu^{-1}\partial H/\partial\mathbf{p} \tag{3.2}$$

Из условия 3 получаем, что $F = -2\varepsilon\nu^{-1}H$.

Таким образом, если функция

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = c\exp\left[-2\varepsilon\nu^{-1}H(\mathbf{q}, \mathbf{p})\right] \tag{3.3}$$

удовлетворяет условию нормировки, то она является одномерной плотностью стационарного в узком смысле решения.

Заметим, что однородное поле случайных сил возникает, если система находится в условиях поступательной вибрации с ускорением, представляющим собой вектор белых шумов.

Пусть, например, n-звенный плоский маятник движется в однородном поле тяжести и точка подвеса вибрирует с виброускорениями, представляющими собой независимые нормальные белые шумы. Тогда если диссипативная функция пропорциональна квадрату скорости (относительно точки подвеса) центра масс, то существует стационарное в узком смысле решение, одномерная плотность которого определяется формулой Гиббса (3.3).

Заметим, что наложение некоторой новой голономной связи на систему (3.1) не влияет на существование стационарного режима. Изменится вид функции H, матриц $\mathbf{a}$ и σ, но формулы (3.2) и (3.3) останутся справедливыми.

Более интересен вопрос о влиянии наложения чаплыгинских неголономных связей на исходную систему (3.1). Пусть $\mathbf{q} = [\mathbf{q}'^T\mathbf{q}''^T]^T$ и уравнения неголономных связей имеют вид (Λ — некоторая матрица)

$$\mathbf{q}'^{\bullet} = \Lambda(\mathbf{q}'')\,\mathbf{q}''^{\bullet}$$

Тогда уравнения (3.1) следует заменить на

$$\mathbf{q}''^{\bullet} = \frac{\partial H^*}{\partial\mathbf{p}''}, \quad \mathbf{p}''^{\bullet} = -\frac{\partial H^*}{\partial\mathbf{q}''} + \Gamma(\mathbf{q}'', \mathbf{p}'') - \varepsilon\mathbf{a}^*(\mathbf{q}'')\frac{\partial H^*}{\partial\mathbf{p}''} + b^*(\mathbf{q}'')\mathbf{V} \tag{3.4}$$

где $H^*(\mathbf{q}'', \mathbf{p}'')$ — новая функция Гамильтона, Γ — вектор-столбец членов неголономности. Теперь $\mathbf{P}_1 = -\partial H/\partial\mathbf{q}'' + \Gamma$. Вычисления показывают, что $\gamma(\mathbf{q}'', \mathbf{p}'')$ определяется выражением (3.2), где вместо H и $\mathbf{p}$ надо подставить H^* и $\mathbf{p}''$. Однако существование стационарного режима в этом случае зависит от существования инвариантной меры у системы (3.4) при $\varepsilon = 0$, $V = 0$. Если она существует и ее плотность равна $\mu(\mathbf{q}'')$, то стационарный режим существует и его одномерная плотность определяется формулой (3.3), где вместо c надо подставить $\mu(\mathbf{q}'')$.

Таким образом, при наложении неголономных связей Чаплыгина на систему (3.1) найденный стационарный режим не исчезает, если полученная неголономная система при отсутствии диссипации и случайных возмущений имеет инвариантную меру.

4. Как уже было отмечено, задача нахождения стационарных распределений сводится к задаче о нахождении плотности f инвариантной меры невозмущенной системы. Конечно, это осложнено тем, что в правую часть уравнений невозмущенной системы входит неизвестная функция f, однако эта аналогия может оказаться полезной при доказательстве отсутствия стационарных распределений, так как необходимым условием существования стационарных распределений является существование какой-либо инвариантной меры у невозмущенной системы.

Поясним это на примере гладкой системы (2.6), которой соответствуют невозмущенная система (2.9). Предположим, что для любой функции f существует особая точка уравнений (2.9). Не ограничивая общности, будем считать, что это точка $\mathbf{p} = 0$, $\mathbf{q} = 0$. Это будет, если $\mathbf{b}(0) = 0$, $\mathbf{P}(0,\ 0) = 0$, $\mathbf{Q}(0,\ 0) = 0$. Тогда соотношение

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{Q} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{P}\right)_{\mathbf{q}=0,\ \mathbf{p}=0} = 0 \tag{4.1}$$

будет необходимым условием существования инвариантной меры (а следовательно, и стационарного распределения) с гладкой плотностью у системы (2.9) в окрестности положения равновесия [5].

В качестве иллюстрации рассмотрим плоское движение математического маятника единичной длины в однородном поле тяжести. Предполагается, что точка подвеса вертикально вибрирует случайным образом с ускорением V, представляющим собой нормальный белый шум постоянной интенсивности. На маятник действует диссипативный момент, пропорциональный угловой скорости. Уравнения движения имеют вид

$$\varphi^{\boldsymbol{\cdot}} = \omega, \quad \omega^{\boldsymbol{\cdot}} = -g\sin\varphi - d\omega + V\sin\varphi$$

где $d > 0$ — коэффициент трения, g — ускорение свободного падения. Необходимое условие (4.1) в данном случае не выполнено:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\omega + \frac{\partial}{\partial\omega}(-g\sin\varphi - d\omega)\right]_{\varphi=0,\ \omega=0} = -d \neq 0$$

Следовательно, в данной системе не существует стационарного распределения с гладкой одномерной плотностью. Оно может существовать, если, например, $d = d(\varphi)$ и $d(0) = 0$. Таким образом, вырождаемость матрицы диффузии в особых точках уравнений системы без случайных воздействий может служить препятствием для существования стационарных режимов с гладкой одномерной плотностью.

5. В динамике голономных систем со случайными возмущениями типа нормального белого шума иногда удается найти стационарное распределение Гиббса, одномерная плотность которого имеет вид [1]

$$f(\mathbf{q},\ \mathbf{p}) = c\exp\left[-\theta H(\mathbf{q},\ \mathbf{p})\right], \quad c,\ \theta = \mathrm{const} \tag{5.1}$$

где H — гамильтониан некоторой системы. Обсудим два интересных свойства этого распределения, связанные с изменением жесткости и массы системы. Рассмотрим соотношение (5.1) в случае, когда H — гамильтониан натуральной механической системы с n степенями свободы, т. е. $H = \mathbf{p}^T\Omega\mathbf{p}/2 + \Pi(\mathbf{q})$, причем матрица Ω — постоянная. Ясно, что в этом случае математическое ожидание $\mathbf{p}$ равно нулю ($M\mathbf{p} = 0$), а нормировочную постоянную c можно подсчитать в явном виде. В результате получаем

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sqrt{\frac{|\theta\Omega|}{(2\pi)^n}} \exp(-\theta H) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-\theta\Pi)\, d\mathbf{q}\right]^{-1} \tag{5.2}$$

Сопоставим две системы с разными матрицами Ω. Будем говорить, что система с Ω_2 имеет бо́льшую массу, чем система с Ω_1, если $\mathbf{p}^T\Omega_1\mathbf{p} \geqslant \mathbf{p}^T\Omega_2\mathbf{p}$ (или, что то же самое, $\dot{\mathbf{q}}^T\Omega_1\dot{\mathbf{q}} \leqslant \dot{\mathbf{q}}^T\Omega_2\dot{\mathbf{q}}$). Докажем сначала, что при увеличении массы системы дисперсии импульсов Dp_i ($i = 1, \ldots, n$) возрастут (первое свойство).

Действительно, имеем

$$Dp_i = \sqrt{\frac{|\theta\Omega|}{(2\pi)^n}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_i^2 \exp\left(-\frac{1}{2}\theta\mathbf{p}^T\Omega\mathbf{p}\right) d\mathbf{p} = k_{ii} \tag{5.3}$$

где k_{ii} — диагональный элемент матрицы $K = \theta^{-1}\Omega^{-1}$. Так как вторая система более жесткая, то эллипсоид $\mathbf{p}^T\Omega_2\mathbf{p} = \xi = \text{const}$ находится внутри эллипсоида $\mathbf{p}^T\Omega_1\mathbf{p} = \xi$, а потому любая прямая, проведенная из начала координат, пересечет сначала второй эллипсоид, а потом первый. Отсюда следует

$$1/\sqrt{k_{ii}^{(2)}} \leqslant 1/\sqrt{k_{ii}^{(1)}} \quad \text{и} \quad k_{ii}^{(2)} \geqslant k_{ii}^{(1)} \tag{5.4}$$

Здесь верхний индекс — это номер системы.

Заметим, что если потребовать еще, чтобы $\Pi(-\mathbf{q}) = \Pi(\mathbf{q})$, т. е. чтобы математическое ожидание $\mathbf{q}$ было равно нулю, то можно показать, что Dq_i ($i = 1, \ldots, n$) при изменении массы системы не изменятся.

Рассмотрим второе свойство. Пусть теперь

$$H = \mathbf{p}^T\Omega(\mathbf{q})\mathbf{p}/2 + \mathbf{q}^T\mathbf{B}\mathbf{q}/2,$$

где $\mathbf{B}$ — постоянная матрица. Будем говорить, что система с матрицей потенциальной энергии $\mathbf{B}_2$ жестче системы с матрицей $\mathbf{B}_1$, если $\mathbf{q}^T\mathbf{B}_1\mathbf{q} \leqslant \mathbf{q}^T\mathbf{B}_2\mathbf{q}$. Аналогично доказывается, что при увеличении жесткости дисперсии Dq_i уменьшаются.

6. Переходим к рассмотрению нестационарных процессов, которые, однако, можно привести к стационарным [1, 6]. Приведем точную формулировку. Нестационарное распределение в СДС (1.1) называется приводимым к стационарному в узком смысле распределению, если существует гладкая обратимая замена переменных и независимого аргумента

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{\Psi}(\mathbf{Z}(\delta(t)), t) \tag{6.1}$$

такая, что в новых переменных $\mathbf{Y}$ СДС имеет вид

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{a}^*(\mathbf{Y}) + \mathbf{b}^*(\mathbf{Y})\mathbf{V} \tag{6.2}$$

и допускает стационарное в узком смысле одномерное распределение с плотностью $F_1(\mathbf{y})$. Приводимость в этом определении понимается в узком смысле (ср. [1]).

Непосредственно проверяется следующее

Утверждение 8. СДС (1.1) допускает нестационарное распределение, приводимое к стационарному, если и только если существуют матричные функции $\mathbf{\Psi}(\mathbf{Z}, t)$, $\mathbf{a}^*(\mathbf{Y})$ ($\dim \mathbf{a}^* = \dim \mathbf{Z} = k$), $\mathbf{b}^*(\mathbf{Y})$ ($\dim \mathbf{b}^* = \dim \mathbf{b}$), а также скалярная функция $\lambda(t) > 0$, такие, что

1) $\det\,[\partial \boldsymbol{\Psi}/\partial \mathbf{z}] \neq 0$

2) $$\boldsymbol{\Psi}_t + \boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{Z}}{}^T\mathbf{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{ZZ}} : \boldsymbol{\sigma}\,|_{\mathbf{Z}\to\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y},t)} = \lambda(t)\,\mathbf{a}^*(\mathbf{Y})$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{Z}}{}^T\mathbf{b}\,|_{\mathbf{Z}\to\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\mathbf{Y},t)} = \sqrt{\lambda(t)}\,\mathbf{b}^*(\mathbf{Y})$$

3) СДС $\mathbf{Y}^{\cdot} = \mathbf{a}^*(\mathbf{Y}) + \mathbf{b}^*(\mathbf{Y})\,\mathbf{V}$ имеет стационарное распределение с плотностью $f_1(\mathbf{y})$.

Искомое распределение тогда имеет вид

$$f(\mathbf{z},\ t) = f_1(\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{z},\ t))\ |\ \partial\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{z},\ t)/\partial\mathbf{z}\ | \tag{6.3}$$

В условии 2) принято обозначение

$$\boldsymbol{\Psi}_{\mathbf{ZZ}} : \boldsymbol{\sigma} = \begin{Vmatrix} \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\Psi}_{1\mathbf{ZZ}}\boldsymbol{\sigma}) \\ \cdots \\ \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{\Psi}_{k\mathbf{ZZ}}\boldsymbol{\sigma}) \end{Vmatrix}$$

Особо интересен случай, когда приводимость осуществляется линейным преобразованием.

Утверждение 9. СДС (1.1) допускает нестационарное распределение приводимое к стационарному, если существуют матричные функции $\boldsymbol{\alpha}(t)$ ($|\,\boldsymbol{\alpha}\,| \neq 0$), $\boldsymbol{\beta}(t)$, $\mathbf{a}^*(\mathbf{Y})$, $\mathbf{b}^*(\mathbf{Y})$, а также скалярная функция $\lambda(t) > 0$, такие, что

1) $\boldsymbol{\alpha}^{\cdot}\boldsymbol{\alpha}^{-1}\mathbf{Y} - \boldsymbol{\alpha}^{\cdot}\boldsymbol{\alpha}^{-1}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^{\cdot} + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{a}(\boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}),\ t) = \lambda\mathbf{a}^*(\mathbf{Y})$,

2) $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{b}(\boldsymbol{\alpha}^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}),\ t) = \sqrt{\lambda}\mathbf{b}^*(\mathbf{Y})$,

3) СДС $\mathbf{Y}^{\cdot} = \mathbf{a}^*(\mathbf{Y}) + \mathbf{b}^*(\mathbf{Y})\,\mathbf{V}$ имеет стационарное распределение с плотностью $f_1(\mathbf{y})$.

Тогда СДС (1.1) имеет нестационарное распределение с плотностью

$$f(\mathbf{z},\ t) = f_1(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{z} + \boldsymbol{\beta},\ t)\ |\ \boldsymbol{\alpha}\ | \tag{6.4}$$

Пример. Рассмотрим одномерное уравнение (1.1). Пусть $a = a(Z - ct)$, $b = b(Z - ct)$ ($c = \mathrm{const}$). Тогда условия 1 и 2 утверждения 9 выполнены, если положить $a^* = v(Y) - c$, $b^* = b(Y)$, $\lambda = 1$. Условия, при которых одномерное уравнение (6.2) допускает стационарное распределение и явный вид для плотности, хорошо известны (см., например, [1]). Ясно, что в этих случаях и исходное уравнение допускает нестационарное распределение с плотностью $f(z - ct)$ (типа «солитон»). Отметим, что подобные системы возникают, например, в динамике стохастических систем переменной массы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пугачев В. С.*, *Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы: Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 630 с.
2. *Мощук Н. К.*, *Синицын И. Н.* О стохастических неголономных системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 2. С. 213—223.
3. *Диментберг М. Ф.* Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. М.: Наука, 1989. 175 с.
4. *Moshchuk N. K.*, *Sinitsyn I. N.* On stationary distributions in nonlinear stochastic differential systems // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1991.
5. *Козлов В. В.* О существовании интегрального инварианта гладких динамических систем // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 538—545.
6. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960. 883 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.XII.1990