

УДК 531.36 : 62—50

© 1991 г.

Ф. Л. Черноусько

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Рассматривается динамическая управляемая система с одной степенью свободы, на которую действует сила нелинейного сопротивления, управляющая и возмущающая силы. На величины управления и возмущения наложены ограничения. Построено управление по принципу обратной связи, которое обеспечивает приведение системы в заданное состояние. Показано, что предложенный закон управления обладает преимуществами перед другим подходом, при котором возмущения вообще игнорируются. Управление получено при произвольном виде нелинейного сопротивления. Оно является субоптимальным по быстродействию и малочувствительным к вариациям параметров и возмущениям.

1. Постановка задачи. Пусть динамика системы с одной степенью свободы описывается уравнением

$$mq'' = R(q') + U + V(q, q', t) \quad (1.1)$$

Здесь q — обобщенная координата системы, $m > 0$ — постоянный инерционный коэффициент (масса), $R(q')$ — сила, $V(q, q', t)$ — возмущающая сила; точка означает производную по времени t .

Предполагаем, что сила сопротивления $R(q')$ направлена против скорости, а ее величина строго возрастает с ростом скорости и обращается в нуль в состоянии покоя. Функцию $R(q')$ считаем гладкой. Таким образом, имеем

$$q'R(q') < 0, \quad dR(q')/dq' < 0 \quad (q' \neq 0), \quad R(0) = 0 \quad (1.2)$$

Управляющую и возмущающую силы предполагаем стесненными геометрическими ограничениями, причем максимальная величина возмущения строго меньше максимальной величины управления. Имеем

$$|U| \leq U_0, \quad |V(q, q', t)| \leq \rho U_0, \quad \rho < 1 \quad (1.3)$$

Здесь $U_0 > 0$ и $\rho < 1$ — постоянные. В остальном возмущение $V(q, q', t)$ может быть произвольной функцией своих аргументов.

Требуется построить управление по принципу обратной связи $U(q, q')$, приводящее систему (1.1) из произвольного начального состояния

$$q(t_0) = q^0, \quad q'(t_0) = (q^0)^\circ \quad (1.4)$$

в заданное конечное состояние с нулевой скоростью

$$q(t_1) = q^*, \quad q'(t_1) = 0 \quad (1.5)$$

за конечное время. Здесь t_0 , q^0 , $(q^0)^\circ$, q^* — некоторые заданные числа, время t_1 не фиксировано.

Пусть $l > 0$ — некоторая величина размерности координаты q . Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{(q - q^*)}{l}, \quad t' = \frac{(t - t_0)}{T_0}, \quad u = \frac{U}{U_0}, \quad f = -\frac{R}{U_0} \quad (1.6)$$

$$v = \frac{V}{U_0}, \quad T_0 = \left(\frac{ml}{U_0}\right)^{1/2}$$

После замены (1.6) уравнение (1.1) примет вид

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) = u + v(x, \dot{x}, t) \quad (1.7)$$

Здесь и далее точкой обозначены производные по безразмерному времени t' , которое в (1.7) и ниже обозначено просто через t . Гладкая функция $f(x)$ в (1.7) обладает, согласно (1.2) и (1.6), следующими свойствами:

$$zf(z) > 0, f'(z) > 0 (z \neq 0), f(0) = 0 \quad (1.8)$$

На величины u и v в (1.7) наложены ограничения (см. (1.3), (1.6))

$$|u| \leq 1, |v| \leq \rho, \rho < 1 \quad (1.9)$$

Начальные условия (1.4) и конечные условия (1.5) после замены (1.6) примут вид:

$$x(0) = \xi, \dot{x}(0) = \eta \quad (1.10)$$

$$x(T) = 0, \dot{x}(T) = 0 \quad (1.11)$$

Здесь обозначено

$$\xi = (q^0 - q^*)/l, \eta = (\dot{q}^0)^0 T_0/l, T = (t_1 - t_0)/T_0$$

Поставленная задача управления теперь может быть сформулирована следующим образом.

Задача 1. Построить управление по принципу обратной связи $u(x, \dot{x})$, удовлетворяющее ограничению (1.9) и переводящее систему (1.7) при произвольном возмущении v , стесненном ограничением (1.9), из произвольного начального состояния (1.10) в заданное конечное состояние (1.11) за конечное время.

Отметим, что рассматриваемая постановка задачи является обобщением задач, решенных в работах [1, 2], на случай силы нелинейного сопротивления $f(\dot{x})$ в системе (1.7). Функция $f(\dot{x})$ должна удовлетворять условиям (1.8), а в остальном может быть произвольна.

2. Игровой подход. Рассмотрим уравнение (1.7) с точки зрения теории дифференциальных игр, полагая, что u и v — управления двух противников, стесненные ограничениями (1.9). Будем искать такое позиционное управление $u(x, \dot{x})$, которое переводит систему (1.7) из состояния (1.10) в состояние (1.11) за минимальное гарантированное время T при любом допустимом возмущении v . Это управление $u(x, \dot{x})$, полученное в результате решения дифференциальной игры, будет, как нетрудно видеть, давать решение поставленной выше задачи 1. С другой стороны, решение рассматриваемой дифференциальной игры сводится [3, 4] к решению задачи оптимального быстрогодействия для системы

$$\ddot{x} + f(\dot{x}) = (1 - \rho)u; |u| \leq 1, 0 \leq \rho < 1, T \rightarrow \min \quad (2.1)$$

при граничных условиях (1.10), (1.11). Уравнение (2.1) получено из (1.7) при условии $v = -\rho u$, что соответствует наихудшему для u управлению противника: оптимальные управления игроков таковы, что $u = \pm 1$, $v = \mp \rho$ в любой момент времени.

Искомое в задаче 1 управление $u(x, \dot{x})$ и соответствующее ему время T получим, решая задачу синтеза оптимального быстрогодействия для уравнения (2.1) при граничных условиях (1.10), (1.11). Указанную задачу быстрогодействия перепишем в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -f(x_2) + (1 - \rho)u; |u| \leq 1, 0 \leq \rho < 1 \quad (2.2)$$

$$x_1(0) = \xi, x_2(0) = \eta, x_1(T) = x_2(T) = 0, T \rightarrow \min$$

$$(x_1 = x, x_2 = \dot{x})$$

3. **Оптимальное быстроедействие.** Воспользуемся принципом максимума [5] для решения задачи (2.2). Функция Гамильтона для задачи (2.2) имеет вид

$$H = p_1 x_2 + p_2 [(1 - \rho)u - f(x_2)] \quad (3.1)$$

где p_1, p_2 — сопряженные переменные.

Сопряженная система имеет вид

$$p_1 \dot{=} 0, \quad p_2 \dot{=} -p_1 + f'(x_2)p_2 \quad (3.2)$$

Так как система (2.2) автономна, то для рассматриваемой задачи оптимального быстрогодействия имеем первый интеграл

$$H = p_1 x_2 + p_2 [(1 - \rho)u - f(x_2)] = h \geq 0 \quad (3.3)$$

где h — постоянная.

Согласно принципу максимума, получим из (3.1) при ограничении $|u| \leq 1$ (см. (2.2)):

$$u = \text{sign } p_2 \quad (3.4)$$

Отдельно рассмотрим вопрос о возможности особых участков оптимальной траектории, на которых $p_2 = 0$. На таком участке, согласно второму уравнению (3.2), имеем $p_1 = 0$. Следовательно, при наличии такого участка на всей траектории имеем $p_1 \equiv \text{const} = 0$. Тогда на всей траектории второе уравнение (3.2) становится однородным, и, так как $p_2 = 0$ на особом участке, имеем $p_2 \equiv 0$ на всей траектории. Однако на оптимальной траектории, согласно принципу максимума, сопряженный вектор не равен тождественно нулю. Полученное противоречие доказывает отсутствие особых участков оптимальной траектории. Итак, равенство $p_2 = 0$ может иметь место лишь в отдельные моменты времени (момент переключения) и, согласно (3.4), почти всюду имеем $u = \pm 1$.

Рассмотрим сначала участки оптимальной траектории, на которых $p_2 > 0, u = 1$. Из уравнений (2.2) получим для этих участков

$$dx_1/dx_2 = x_2 [1 - \rho - f(x_2)]^{-1} \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует, что участки оптимальной траектории в плоскости x_1, x_2 при $p_2 > 0$ есть дуги следующих кривых:

$$x_1 = \Phi_\rho^+(x_2) + c^+ \quad (p_2 > 0) \quad (3.6)$$

Здесь c^+ — произвольная постоянная, а функция $\Phi_\rho^+(x_2)$ определена равенством

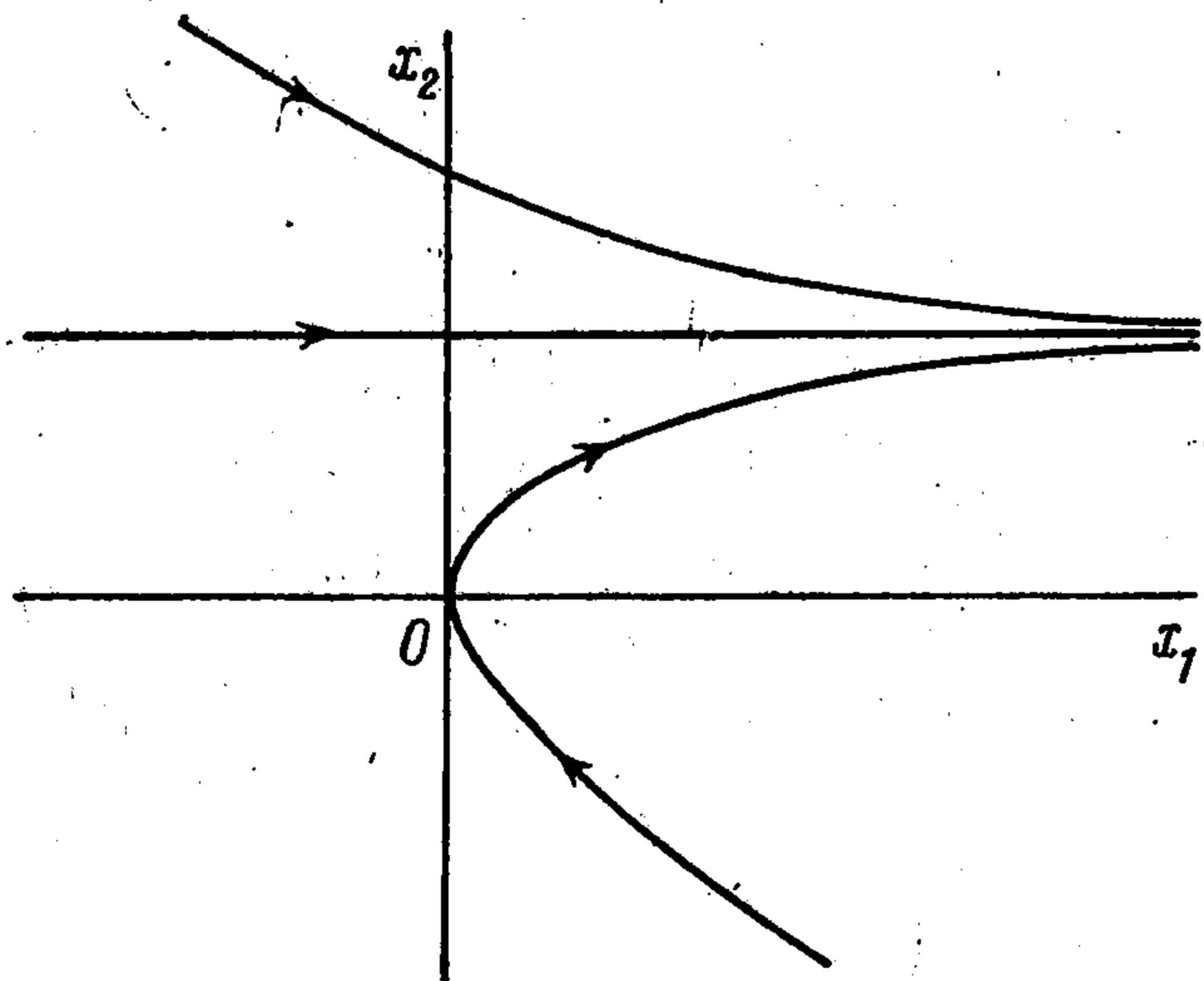
$$\Phi_\rho^+(y) = \int_0^y \frac{z dz}{1 - \rho - f(z)}, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (3.7)$$

Отметим некоторые свойства функции $\Phi_\rho^+(y)$, вытекающие из равенств (3.7), (1.8) и необходимые для дальнейшего. При изменении y от $-\infty$ до 0 функция Φ_ρ^+ положительна и строго убывает, обращаясь в нуль при $y = 0$. Точка $y = 0$ является единственным экстремумом функции $\Phi_\rho^+(y)$ и притом ее минимумом. Если следующее трансцендентное уравнение для z^+ :

$$f(z^+) = 1 - \rho \quad (3.8)$$

не имеет решения, т. е. $f(z) < 1 - \rho$ при всех z , то функция $\Phi_\rho^+(y)$ строго возрастает при всех $y \geq 0$. В этом случае $\Phi_\rho^+(y) > 0$ при всех $y \neq 0$.

Если же уравнение (3.8) имеет корень z^+ , то этот корень положителен и единствен в силу условий (1.8). В этом случае в интервале $y \in (0, z^+)$ функция $\varphi_{\rho^+}(y)$ строго возрастает от 0 до ∞ , а при $y > z^+$ она строго убывает. Типичный график зависимости (3.6) в плоскости x_1, x_2 при $c^+ = 0$ представлен на фиг. 1 для случая, когда уравнение (3.8) имеет корень $z^+ > 0$. Направление роста времени t вдоль траектории, вытекающее из первого уравнения (2.2), указано на фиг. 1 стрелками.



Фиг. 1

добным (3.7)

Совершенно аналогично рассматриваются участки траекторий при $p_2 < 0$, которые являются дугами кривых

$$x_1 = \varphi_{\rho^-}(x_2) + c^- \quad (p_2 < 0) \quad (3.9)$$

Здесь аналогично (3.6) c^- — произвольная постоянная, а функция φ_{ρ^-} определена равенством, по-

$$\varphi_{\rho^-}(y) = \int_0^y \frac{z dz}{-(1-\rho) - f(z)}, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (3.10)$$

Введем трансцендентное уравнение для z^- , аналогичное (3.8)

$$f(z^-) = -(1-\rho) \quad (3.11)$$

Если уравнение (3.11) не имеет решения z^- , т. е. $f(z) > \rho - 1$ при всех z , то функция $\varphi_{\rho^-}(y)$ из (3.10) строго возрастает при $y < 0$ и строго убывает при $y > 0$. При этом $\varphi_{\rho^-}(y) < 0$ при всех $y \neq 0$.

Если же корень z^- уравнения (3.11) существует, то он единствен и отрицателен ($z^- < 0$) в силу условий (1.8). В этом случае функция $\varphi_{\rho^-}(y)$ строго убывает при $y \in (-\infty, z^-)$, строго возрастает при $y \in (z^-, 0)$ и вновь строго убывает при $y \in (0, \infty)$. При $y \rightarrow z^-$ эта функция стремится к $-\infty$, а при $y = 0$ она имеет локальный нулевой максимум. Типичный график функции $\varphi_{\rho^-}(y)$ можно получить из графика функции $\varphi_{\rho^+}(y)$, изображенного на фиг. 1, путем преобразования центральной симметрии (или, что то же самое, путем одновременного изменения направлений обеих осей x_1, x_2).

Описанные выше кривые представляют собой траектории, отвечающие $p_2 > 0$ и $p_2 < 0$ и проходящие через начало координат в плоскости x_1, x_2 . Другие кривые, дуги которых могут служить участками оптимальных траекторий, получаются, согласно (3.6), (3.9), из указанных кривых путем параллельного переноса на c^+, c^- вдоль оси x_1 .

Отметим, что если трансцендентные уравнения (3.8), (3.11) имеют решения, то система (2.2) допускает соответствующие решения

$$x_2 = z^+ \quad (p_2 > 0), \quad x_2 = z^- \quad (p_2 < 0) \quad (3.12)$$

Решениям (3.12) в плоскости x_1, x_2 отвечают фазовые траектории — прямые, параллельные оси x_1 . Эти прямые — асимптоты кривых (3.6), (3.9) соответственно (см. фиг. 1).

Таким образом, искомые оптимальные траектории состоят из участков кривых (3.6), (3.9) с различными c^+, c^- , а также, возможно, из участков прямых (3.12), если разрешимы соответствующие уравнения (3.8), (3.11).

Покажем теперь, что на каждой оптимальной траектории имеется не более одной точки переключения управления, т. е. функция $p_2(t)$ обращается в нуль не более одного раза.

Предположим противное. Пусть функция $p_2(t)$ обращается в нуль в два момента времени t' , t'' , между которыми она положительна. Тогда имеем

$$p_2(t) > 0, t \in (t', t''); p_2(t') = p_2(t'') = 0 \quad (3.13)$$

Из первого интеграла (3.3) для моментов времени t' , t'' в силу (3.13) получим

$$p_1 x_2(t') = p_1 x_2(t'') = h \geq 0 \quad (3.14)$$

Если $p_1 = \text{const} = 0$, то из (3.2) получим для $p_2(t)$ линейное однородное уравнение, которое при нулевых условиях (3.13) в моменты t' , t'' имеет тождественно нулевое решение $p_2(t) \equiv 0$. Но это противоречит принципу максимума, утверждающему существование ненулевого сопряженного вектора. Следовательно, $p_1 = \text{const} \neq 0$ и из (3.14) получим $x_2(t') = x_2(t'')$. Однако на всех фазовых траекториях, кроме прямых (3.12), переменная x_2 либо строго возрастает, либо строго убывает с ростом времени t . Это следует из приведенного выше анализа фазовых траекторий и видно на фиг. 1. Значит, равенство $x_2(t') = x_2(t'')$ возможно лишь в случае, если рассматриваемый участок траектории принадлежит прямой (3.12), т. е.

$$x_2(t) \equiv z^+, t \in (t', t'') \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) во второе сопряженное уравнение (3.2), получим линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\dot{p}_2 = -p_1 + k p_2, k = f'(z^+) > 0$$

где $k > 0$ согласно (1.8). Общее решение полученного уравнения имеет вид

$$p_2(t) = p_1/k + C e^{kt} \quad (3.16)$$

где $p_1 = \text{const} \neq 0$, а C — произвольная постоянная. Но решение (3.16) монотонно по t и ни при каких $p_1 \neq 0$ и C не может удовлетворять условиям (3.13). Таким образом, участок оптимальной траектории, на котором выполняются условия (3.13), не может быть отрезком прямой (3.15). Тем самым доказано, что оптимальная траектория не может включать участок вида (3.13).

Совершенно аналогично доказывается, что оптимальная траектория не может также содержать участок, на котором функция $p_2(t)$ отрицательна, а на его границе обращается в нуль.

Следовательно, функция $p_2(t)$ на каждой оптимальной траектории обращается в нуль не более одного раза, т. е. управление имеет не более одного переключения.

Единственными фазовыми траекториями, которые входят в начало координат при возрастании времени, являются ветвь кривой (3.6) при $c^+ = 0$, лежащая в квадранте $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ (см. фиг. 1), и ветвь кривой (3.9) при $c^- = 0$, лежащая в квадранте $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$. Эти ветви кривых отвечают управлениям $u = 1$ и $u = -1$ соответственно. Совокупность указанных ветвей образует кривую переключений, уравнение которой представим в виде

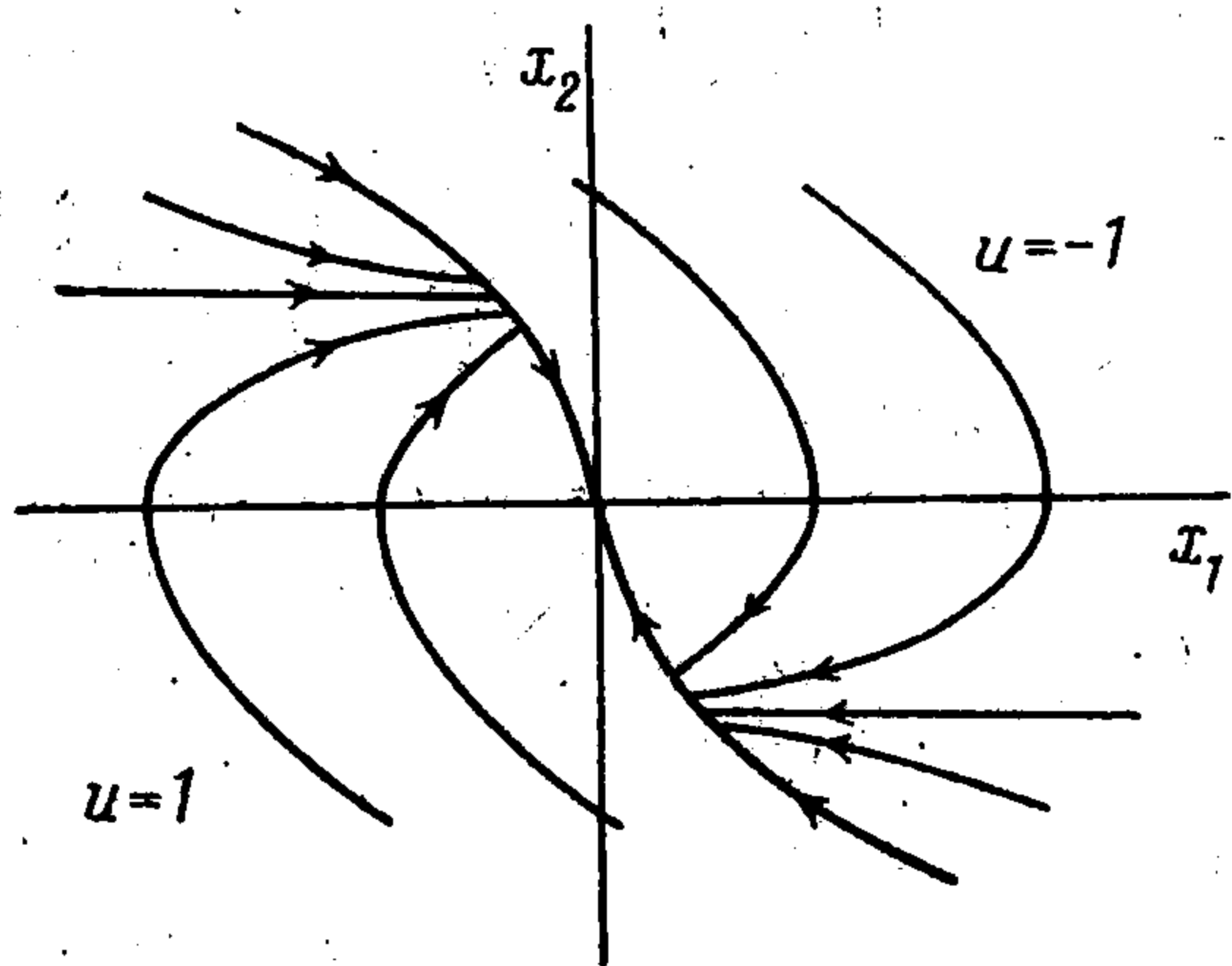
$$x_1 = \psi_\rho(x_2) \quad (3.17)$$

Здесь введено обозначение

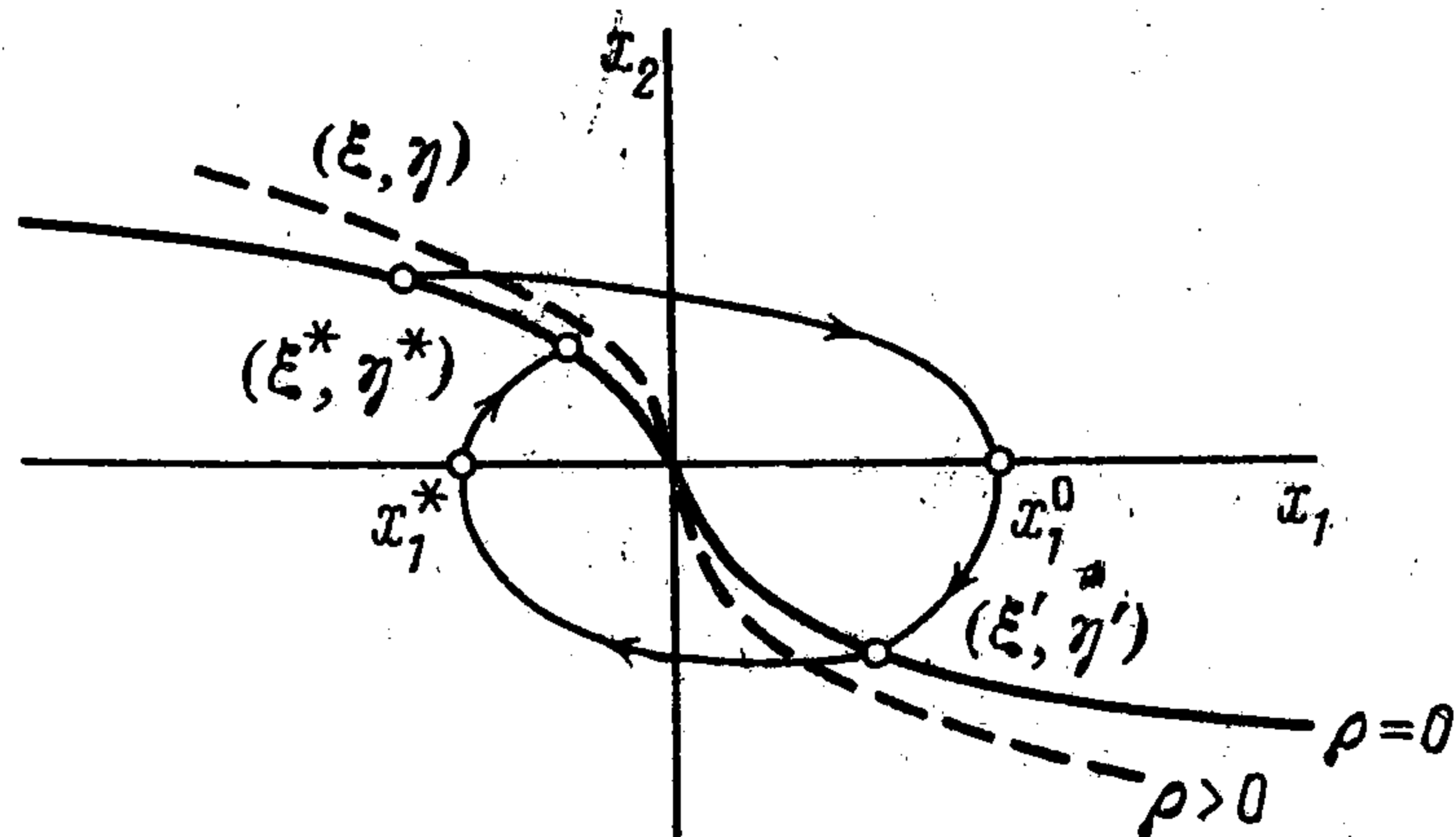
$$\psi_\rho(y) = \varphi_\rho^+(y), y \leq 0; \psi_\rho(y) = \varphi_\rho^-(y), y \geq 0 \quad (3.18)$$

В силу отмеченных выше свойств функций (3.7), (3.10) функция $\psi_\rho(y)$ из (3.18) строго убывает при всех y , а при $y = 0$ она обращается в нуль и имеет точку перегиба.

Теперь нетрудно дать описание всего поля оптимальных траекторий. Оптимальная траектория, начинающаяся в произвольной точке фазовой плоскости x_1, x_2 состоит из отрезка кривой одного из семейств (3.6) или (3.9) и отрезка кривой переключений (3.17).



Фиг. 2



Фиг. 3

Качественно поле оптимальных траекторий показано на фиг. 2 для случая существования корней уравнений (3.8), (3.11). Жирной линией на фиг. 2 изображена кривая переключений (3.17), а стрелками указано направление роста времени t . Отметим, что построенная картина поля оптимальных траекторий подобна той, которая имеет место в случае линейного сопротивления [6].

Синтез оптимального управления, отвечающий построенному полю фазовых траекторий, может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} u_\rho(x_1, x_2) &= \text{sign} [\psi_\rho(x_2) - x_1], \quad x_1 \neq \psi_\rho(x_2) \\ u_\rho(x_1, x_2) &= \text{sign } x_1 = -\text{sign } x_2, \quad x_1 = \psi_\rho(x_2) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$(x_1 = x, x_2 = \dot{x})$$

где функция ψ_ρ определена соотношениями (3.18), (3.7), (3.10).

Полученный закон управления (3.19) по построению дает решение задачи 1. Это решение можно назвать субоптимальным, так как оно оптимально по быстрдействию (неулучшаемо), если возмущение v является «наихудшим», что предполагается при игровом подходе. При наихудшем возмущении $v = -\rho u$ движение системы происходит по оптимальным траекториям, см. фиг. 2. Если же возмущение v отличается от наихудшего ($v \neq -\rho u$), как это обычно имеет место, то траектории движения отличается от оптимальных. При этом движение по кривой переключений происходит в скользящем режиме, а время до попадания в начало координат лишь уменьшается.

4. Упрощенный подход. Выше возмущение не предполагалось известным, однако его максимально возможная величина была задана и построенное управление от него существенно зависит. В безразмерных переменных ограничение на возмущение имеет вид $|v| \leq \rho$ см. (1.9), и полученный синтез управления (3.19) зависит от параметра ρ .

Нередко используется другой подход к построению управления при наличии возмущений, когда возмущения просто игнорируются.

Этот подход, названный упрощенным, в рассматриваемом случае просто означает, что параметр ρ при построении управления полагаем равным нулю, возмущениями пренебрегаем. Полученное таким образом управление $u_0(x_1, x_2)$ определяется соотношениями (3.19), (3.18), (3.7), (3.10) при $\rho = 0$. Кривая переключений для упрощенного управления задается формулой (3.17) при $\rho = 0$. Она изображена на фиг. 3 сплошной жирной линией.

Сравним два способа построения управления — игровой и упрощенный. Для этого исследуем динамику системы (1.1) при некотором $\rho \in$

$\in (0, 1)$ под действием упрощенного управления $u_0(x_1, x_2)$. Эту систему представим в виде

$$\begin{aligned} x_1 \dot{} &= x_2, \quad x_2 \dot{} = -f(x_2) + u_0(x_1, x_2) + v \\ |v| &\leq \rho < 1 \quad (x_1 = x, \quad x_2 = x') \end{aligned} \quad (4.1)$$

Поставим для системы (4.1) следующую вспомогательную задачу о нахождении наилучшего возмущения.

Задача 2. Найти оптимальное управление $v(x_1, x_2)$ системой (4.1), удовлетворяющее ограничению $|v| \leq \rho$, и такое, что любая фазовая траектория этой системы первый раз пересекает кривую переключений $x_1 = \psi_0(x_2)$ как можно дальше от начала координат, т. е. при максимально возможном $|x_1|$ или, что то же самое, максимально возможном $|x_2|$.

Предположим сначала, что начальная точка лежит в области $x_1 > \psi_0(x_2)$. Тогда, согласно (3.19), для рассматриваемой траектории имеем $u_0 = -1$. При этом фазовая траектория системы (4.1) впервые пересечет ту ветвь кривой $x_1 = \psi_0(x_2)$, на которой $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ (см. фиг. 3). Поставленная задача 2 при этом описывается соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 \dot{} &= x_2, \quad x_2 \dot{} = -f(x_2) - 1 + v, \quad |v| \leq \rho < 1 \\ x_1(0) &= \xi, \quad x_2(0) = \eta, \quad \xi > \psi_0(\eta) \\ x_1(\tau) &= \psi_0(x_2(\tau)), \quad x_1(\tau) > 0, \quad x_2(\tau) < 0, \quad x_1(\tau) \rightarrow \max \end{aligned} \quad (4.2)$$

Момент τ окончания процесса не фиксирован. Максимизация $x_1(\tau)$ эквивалентна в силу (4.2) минимизации следующего интегрального функционала:

$$J = \int_0^{\tau} (-x_2) dt \rightarrow \min \quad (4.3)$$

Применяя принцип максимума к задаче (4.2), (4.3), составим функцию Гамильтона

$$H = p_1 x_2 + p_2 [v - 1 - f(x_2)] + x_2 \quad (4.4)$$

где p_1, p_2 — сопряженные переменные. Они удовлетворяют сопряженной системе

$$p_1 \dot{} = 0, \quad p_2 \dot{} = f'(x_2) p_2 - p_1 - 1 \quad (4.5)$$

и условиям трансверсальности, отвечающим граничным условиям (4.2)

$$p_1 \psi_0'(x_2) + p_2 = 0, \quad H = 0 \quad (t = \tau) \quad (4.6)$$

Из первого условия (4.6), применяя соотношения (3.18), (3.7) при $\rho = 0$ и учитывая, что $x_2(\tau) < 0$, согласно (4.2), получим

$$p_1 = -p_2 [1 - f(x_2)] / x_2 \quad (t = \tau) \quad (4.7)$$

Подставим (4.7) в (4.4) и воспользуемся вторым условием трансверсальности (4.6). После упрощения получим

$$H = p_2 (v - 2) + x_2 = 0 \quad (t = \tau)$$

Так как $x_2(\tau) < 0$ и $|v| \leq \rho < 1$, то из полученного равенства следует

$$p_2(\tau) < 0 \quad (4.8)$$

Оптимальное управление находим из условия максимума H из (4.4) по $|v| \leq \rho$

$$v = \rho \operatorname{sign} p_2 \quad (4.9)$$

Особые участки траектории здесь невозможны. В самом деле, если $p_2 \equiv 0$ на некотором интервале времени, то на этом интервале $p_1 = -1$, согласно второму уравнению (4.5). Но $p_1 \equiv \text{const}$, следовательно, $p_1 = -1$ на всей траектории. Тогда второе уравнение (4.5) становится линейным и однородным для p_2 и его решение при начальном условии (4.8) не может обращаться в нуль.

Следовательно, особые участки отсутствуют и равенство (4.9) означает, что управление $v(t)$ имеет точки переключения там, где $p_2(t) = 0$.

Найдем кривую переключений в плоскости x_1, x_2 . В силу автономности системы (4.2), ее гамильтониан (4.4) вдоль оптимальной траектории сохраняет постоянное значение,

равное нулю согласно (4.6)

$$H = (p_1 + 1)x_2 + p_2[v - 1 - f(x_2)] \equiv 0$$

Отсюда следует, что в момент переключения, то есть при $p_2 = 0$ имеем либо $p_1 = -1$, либо $x_2 = 0$. Но из равенства $p_1 = -1$, как показано выше, вытекает, что p_2 нигде не обращается в нуль. Следовательно, в момент переключения имеем $x_2 = 0$, так что кривая переключений здесь есть луч $x_2 = 0, x_1 > 0$.

Чтобы определить знак управления при $x_2 < 0$ и $x_2 > 0$, достаточно найти этот знак хотя бы в одной точке. В момент окончания процесса τ имеем $x_2(\tau) < 0$ согласно (4.2) и $p_2(\tau) < 0$ в силу (4.8). Следовательно, $v = -\rho$ при $x_2 < 0$.

В результате имеем

$$v(x_1, x_2) = \rho \operatorname{sign} x_2 \quad (4.10)$$

Оптимальный синтез в области $x_1 > \psi_0(x_2)$ построен. Для его построения в области $x_1 < \psi_0(x_2)$ отметим некоторые свойства симметрии.

При замене $f(z)$ на $g(z) = -f(-z)$ имеем согласно (3.7), (3.10)

$$\varphi_\rho^+(y) \rightarrow -\varphi_\rho^-(y), \quad \varphi_\rho^-(y) \rightarrow -\varphi_\rho^+(y), \quad (f(z) \rightarrow -f(-z)) \quad (4.11)$$

Из (3.18) и (4.11) следует, что при указанной замене

$$\psi_\rho(y) \rightarrow -\psi_\rho(-y) \quad (f(z) \rightarrow -f(-z)) \quad (4.12)$$

Сделаем теперь в системе (4.1) замену

$$x_1 \rightarrow -x_2, \quad x_2 \rightarrow -x_1, \quad v \rightarrow -v, \quad f(z) \rightarrow -f(-z) \quad (4.13)$$

При этом согласно (4.12) и (3.19) u_0 заменится на $-u_0$ и система (4.1) останется инвариантной. Отсюда следует, что в области $x_1 < \psi_0(x_2)$ поле оптимальных траекторий и синтез оптимального управления будут теми же, что и в области $x_1 > \psi_0(x_2)$, но с заменой $f(z)$ на $g(z) = -f(-z)$. Так как синтез (4.10) не зависит от конкретного вида функции $f(z)$, то он имеет место и в области $x_1 < \psi_0(x_2)$. Таким образом, равенство (4.10) определяет решение задачи 2 во всей плоскости x_1, x_2 .

5. Анализ фазовых траекторий. Рассмотрим движение системы (4.1) под действием упрощенного управления $u_0(x_1, x_2)$, определяемого соотношениями (3.19), (3.18), (3.7), (3.10) при $\rho = 0$, и наилучшего возмущения v из (4.10). Пусть начальная точка ξ, η лежит на той ветви кривой переключений $x_1 = \psi_0(x_2)$, где $x_1 < 0, x_2 > 0$ (см. фиг. 3). Исследуем фазовую траекторию вплоть до следующего ее пересечения с той же ветвью кривой переключений. Рассматриваемый отрезок траектории состоит из четырех участков, на каждом из которых u_0 и v постоянны. Эти участки характеризуются следующими граничными точками и управлениями (см. фиг. 3):

- 1) $(\xi, \eta) \rightarrow (x_1^0, 0), u_0 = -1, v = \rho$
- 2) $(x_1^0, 0) \rightarrow (\xi', \eta'), u_0 = -1, v = -\rho$
- 3) $(\xi', \eta') \rightarrow (x_1^*, 0), u_0 = 1, v = -\rho$
- 4) $(x_1^*, 0) \rightarrow (\xi^*, \eta^*), u_0 = 1, v = \rho$

Параметры граничных точек (5.1) удовлетворяют соотношениям, отражающим их расположение на кривой переключений и осях координат (см. фиг. 3):

$$\begin{aligned} \xi &= \psi_0(\eta), \quad \eta > 0, \quad \xi < 0, \quad x_1^0 > 0 \\ \xi' &= \psi_0(\eta'), \quad \eta' < 0, \quad x_1^* < 0 \\ \xi^* &= \psi_0(\eta^*), \quad \eta^* > 0, \quad \xi^* < 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Подставляя u_0 и v из (5.1) в уравнения (4.1) и интегрируя их вдоль соответствующих участков траектории, имеем

$$\begin{aligned}\xi' - \xi &= \int_{\eta}^0 \frac{z dz}{-1 + \rho - f(z)} + \int_0^{\eta'} \frac{z dz}{-1 - \rho - f(z)} \\ \xi^* - \xi' &= \int_{\eta'}^0 \frac{z dz}{1 - \rho - f(z)} + \int_0^{\eta^*} \frac{z dz}{1 + \rho - f(z)}\end{aligned}$$

В полученных соотношениях заменим ξ , ξ' , ξ^* их выражениями, согласно (5.2), и используем формулы (3.18), (3.7), (3.10) при $\rho = 0$. Получим

$$\begin{aligned}\int_0^{\eta'} \frac{z dz}{1 - f(z)} - \int_0^{\eta} \frac{z dz}{-1 - f(z)} &= \int_0^{\eta} \frac{z dz}{1 - \rho + f(z)} - \int_0^{\eta'} \frac{z dz}{1 + \rho + f(z)} \\ \int_0^{\eta^*} \frac{z dz}{-1 - f(z)} - \int_0^{\eta'} \frac{z dz}{1 - f(z)} &= \int_0^{\eta'} \frac{z dz}{-1 + \rho + f(z)} + \int_0^{\eta^*} \frac{z dz}{1 + \rho - f(z)}\end{aligned} \quad (5.3)$$

Напомним, что $\eta' < 0$, $\eta > 0$, $\eta^* > 0$ согласно (5.2). Положим $\eta' = -\eta^0$, $\eta^0 > 0$ и преобразуем соотношения (5.3) так, чтобы они содержали интегралы лишь по отрезкам положительной полуоси. После упрощений получим

$$\Phi_4(\eta^0) = \kappa^2(\rho)\Phi_1(\eta), \quad \Phi_2(\eta^*) = \kappa^2(\rho)\Phi_3(\eta^0) \quad (5.4)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\Phi_1(y) &= \Phi^+(y; f), \quad \Phi_2(y) = \Phi^-(y; f) \\ \Phi_3(y) &= \Phi^+(y; g), \quad \Phi_4(y) = \Phi^-(y; g) \\ \Phi^\pm(y; h) &= \int_0^y \frac{z dz}{(1+h)[1 \pm (1 \mp \rho)^{-1}h]} \\ f &= f(z) \geq 0, \quad g = -f(-z) \geq 0 \\ \kappa(\rho) &= [\rho(1+\rho)]^{1/2} [(1-\rho)(2+\rho)]^{-1/2}\end{aligned} \quad (5.5)$$

Рассмотрим трансцендентные уравнения (5.4), определяющие η^0 и η^* по заданным $\eta > 0$ и $\rho \in (0, 1)$. Для этого отметим некоторые свойства функций Φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ из (5.5). Напомним, что согласно (1.8) имеем $f(z) > 0$ при $z > 0$ и $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$.

Знаменатели подынтегральных выражений для функций Φ_1 и Φ_3 в (5.5) положительны при всех $z \geq 0$. Следовательно, функции Φ_1 и Φ_3 определены и ограничены при всех $y \geq 0$.

Если уравнения

$$f(z_2) = 1 + \rho, \quad g(z_4) = -f(-z_4) = 1 + \rho \quad (5.6)$$

для z_2, z_4 имеют решения, то знаменатели подынтегральных выражений соответствующих функций Φ_2, Φ_4 в (5.5) обращаются в нуль при конечных значениях z_2, z_4 , равных корням уравнений (5.6). В этом случае функции Φ_2, Φ_4 монотонно возрастают и обращаются в бесконечность при $y = z_2, y = z_4$ соответственно. Если же уравнения (5.6) не имеют решений, то функции Φ_2, Φ_4 определены при всех $y \geq 0$. В обоих случаях знаменатели подынтегральных выражений для функций Φ_2, Φ_4 имеют максимумы по $f \geq 0$ и $g \geq 0$, соответственно равные $(2+\rho)^2(1+\rho)^{-1/4}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\Phi_2(y) \geq \nu y^2/2, \quad \Phi_4 \geq \nu y^2/2, \quad \nu = 4(1+\rho)(2+\rho)^{-2}$$

Таким образом, во всех случаях функции Φ_2 и Φ_4 положительны и строго возрастают, принимая при изменении $y \geq 0$ все значения от 0 до ∞ .

Отсюда вытекает, что трансцендентные уравнения (5.4) при любых $\eta > 0$ и $\rho \in$

$\in (0, 1)$ имеют единственные положительные решения $\eta^0 > 0$ и $\eta^* > 0$. Эти решения являются непрерывными и монотонными функциями от η .

Продифференцируем равенства (5.4) по η . После простых преобразований получим

$$\frac{d\eta^*}{d\eta} = \frac{\kappa^2(\rho) \Phi_3'(\eta^0)}{\Phi_2'(\eta^*)} \frac{d\eta^0}{d\eta} = \frac{\kappa^4(\rho) \Phi_3'(\eta^0) \Phi_1'(\eta)}{\Phi_2'(\eta^*) \Phi_4'(\eta^0)} \quad (5.7)$$

Из соотношений (5.5) и свойств (1.8) функции $f(z)$ вытекают неравенства

$$\frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_2'(y)} < 1, \quad \frac{\Phi_3'(y)}{\Phi_4'(y)} < 1, \quad y > 0$$

Используя второе из этих неравенств, получим из (5.7)

$$\frac{d\eta^*}{d\eta} = \kappa^4(\rho) \frac{\Phi_1'(\eta)}{\Phi_2'(\eta^*)}, \quad \eta > 0 \quad (5.8)$$

Можно проверить, что функция $\kappa^2(\rho)$ из (5.5) строго возрастает от 0 до ∞ на отрезке $\rho \in [0, 1]$, причем $\kappa = 1$ при значении ρ , равном

$$\rho^* = (5^{1/2} - 1)/2 = 0,618... \quad (5.9)$$

Число ρ^* — известное отношение золотого сечения.

Предположим сначала, что $\rho < \rho^*$ и, следовательно, $\kappa^2(\rho) < \alpha$, где $\alpha < 1$ — некоторое положительное число. Тогда из (5.8) вытекает

$$d\eta^*/d\eta < \alpha^2 \Phi_1'(\eta)/\Phi_2'(\eta^*), \quad \eta > 0 \quad (5.10)$$

и, следовательно,

$$\Phi_2(\eta^*) < \alpha^2 \Phi_1(\eta), \quad \eta > 0 \quad (5.11)$$

Докажем, что $\eta^* < \eta$. Предположим противное, а именно, что $\eta^* \geq \eta$. Из (5.5) следует $\Phi_2(y) > \Phi_1(y)$ при всех $y > 0$. Тогда, учитывая монотонность функции $\Phi_2(y)$, имеем цепочку неравенств

$$\Phi_2(\eta^*) \geq \Phi_2(\eta) > \Phi_1(\eta)$$

которая приводит к противоречию с неравенством (5.11). Следовательно, $\eta^* < \eta$.

Преобразуем неравенство (5.10), подставляя в него выражения для производных Φ_1' , Φ_2' согласно (5.5) и учитывая положительность функции $f(z)$:

$$\frac{d\eta^*}{d\eta} < \frac{\alpha^2 \eta [1 + f(\eta^*)] [1 - (1 + \rho)^{-1} f(\eta^*)]}{\eta^* [1 + f(\eta)] [1 + (1 - \rho)^{-1} f(\eta)]} < \frac{\alpha^2 \eta [1 + f(\eta^*)]}{\eta^* [1 + f(\eta)]} \quad (\eta > 0)$$

Упростим последнее неравенство, учитывая, что $f(\eta^*) < f(\eta)$ ввиду монотонности функции $f(z)$ и неравенства $\eta^* < \eta$. Получим

$$d\eta^*/d\eta < \alpha^2 \eta/\eta^*, \quad \eta > 0$$

Интегрируя данное неравенство при условии $\eta^* = 0$ при $\eta = 0$, получим $(\eta^*)^2 < \alpha^2 \eta^2$ или $\eta^*/\eta < \alpha$.

Итак, если $\rho < \rho^*$, где ρ^* определено в (5.9), то $\eta^*/\eta < \alpha$, т. е. фазовая траектория приближается к началу координат. При этом расстояние до начала координат убывает не медленнее, чем в геометрической прогрессии. Поэтому система приходит в заданное состояние за конечное время, хотя и после бесконечного числа переключений управления.

Предположим, что система попала в малую окрестность начала координат, так что η достаточно мало. При этом η^0 и η^* также будут малыми ввиду их непрерывной зависимости от η . Так как $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ в силу (1.8), то в интегралах (5.5) при малых y можно опустить члены $f(z)$, $g(z)$, после чего получим в пределе

$$\Phi_i(y) \sim y^2/2, \quad y \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Следовательно, трансцендентные уравнения (5.4) при малом η примут вид

$$(\eta^0)^2 = \kappa^2(\rho) \eta^2, \quad (\eta^*)^2 = \kappa^2(\rho) (\eta^0)^2$$

Отсюда получим

$$\eta^*/\eta = \kappa^2(\rho) \quad (5.12)$$

Пусть $\rho > \rho^*$ и, следовательно, $\kappa^2(\rho) > 1$. Тогда вследствие (5.12) получим $\eta^* > \eta$ и фазовая траектория, даже попавшая в малую окрестность начала координат, удаляется от него. Система в этом случае не приходит в заданное состояние.

Итак, в случае произвольной функции $f(z)$, удовлетворяющей условию (1.8), упрощенный подход приводит к управлению $u_0(x_1, x_2)$, опре-

деляемому соотношениями (3.19) при $\rho \neq 0$ и обладающему следующими свойствами.

Если $\rho < \rho^* = 0,618$, то при любом допустимом возмущении $|v| \leq \rho$ система попадает в начало координат. Время движения при этом конечно, хотя число переключений, вообще говоря, бесконечно.

Если же $\rho > \rho^*$, то существует такое допустимое возмущение v , определяемое равенством (4.10), при котором система никогда не попадает в начало координат.

Следовательно, упрощенное управление гарантирует решение задачи 1 лишь в случае $\rho < \rho^*$, т. е. при условии, что отношение максимальных возможных величин возмущения и управления не превосходит отношения золотого сечения.

Конкретизируя вид функции $f(z)$, можно получить более детальную картину движения. Отметим, что случай отсутствия сопротивления $f(z) = 0$ был ранее подробно исследован в работе [1], а случай линейного сопротивления $f(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$ — в работе [2].

6. Заключение. Предложенный закон управления (3.19), основанный на игровом подходе, гарантирует приведение рассматриваемой системы (1.7) в начало координат за конечное время при любом виде нелинейности $f(z)$ и при любом неопределенном возмущении, если $\rho < 1$. Этот закон управления не требует знания возмущения; необходимо лишь знать его возможное максимальное значение, которое не должно превосходить максимального значения управления.

Подчеркнем различие в требованиях к функциям $f(z)$ и $v(x, \dot{x}, t)$. Обе эти функции могут быть произвольны в рамках соответствующих условий — (1.8) для $f(z)$ и (1.9) для v . Однако функция нелинейного сопротивления $f(z)$ должна быть известна при построении управления, а возмущение $v(x, \dot{x}, t)$ знать не требуется.

Упрощенный подход к построению управления, при котором возмущение вообще игнорируется, оказывается менее эффективным. Он заведомо приводит систему в начало координат лишь при $\rho < \rho^* = 0,618$. Если же $\rho > \rho^*$, то существует такое возмущение, при котором попадание в начало координат оказывается невозможным.

В то же время по своей структуре оба подхода сходны и различаются лишь кривыми переключений.

Предложенный способ управления обладает малой чувствительностью к различным возмущениям и вариациям параметров. Эти факторы трудно учесть, если увеличить предполагаемый уровень возможных возмущений, т. е. параметр ρ , создавая определенный запас по этому параметру.

Отметим, что построенное управление субоптимально по быстродействию в том смысле, что оно оптимально при наихудшем возможном возмущении.

Полученные результаты могут применяться к различным динамическим системам, например, для управления электроприводами робототехнических систем (см. об этом в [2]). При этом открывается возможность учесть различные законы сопротивления, часто встречающиеся на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф. Л. Декомпозиция и субоптимальное управление в динамических системах // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 883—893.
2. Черноусько Ф. Л. Декомпозиция и синтез управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1990. № 6. С. 64—82.
3. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976, 392 с.
6. Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н. Синтез оптимального управления транспортными движениями манипуляционных роботов // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 4. С. 21—29.

Москва

Поступила в редакцию
19.III.1994