Удовлетворительное согласование результатов различных расчетов свидетельствует о правомочности предложенного подхода к решению поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринберг Г. А.* Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях // ПММ. 1967, Т. 31, Вып. 2. С. 193—203.
2. Вопросы математической физики / Под ред. В. М. Тучкевича. Л.: Наука, 1976.— 296 с.
3. *Крутиков В. С.* Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка, 1985. 125 с.
4. *Крутиков В. С.* О восстановлении давления на движущейся границе плазменного поршня // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 6. С. 510—514.
5. *Крутиков В. С.* Приближенная оценка влияния проницаемости подвижной границы плазменного поршня // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 14. С. 45—48.
6. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1954. 566 с.
7. Математическая энциклопедия. Т. 2 / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Сов. энциклопедия, 1979. 1103 с.
8. *Слепян Л. И.* Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 4. С. 809—813.
9. *Рождественский Б. Л.*, *Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

Николаев

Поступила в редакцию
22.III.1990

УДК 539.3

В. И. Моссаковский, Е. В. Пошивалова

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ ВНЕ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Формула для влияния нагрузки, действующей вне штампа круговой формы в плане, известна [1]. Ниже предлагается новый подход к исследованию давления, возникающего под подошвой неосесимметричного плоского штампа в результате действия нормальных усилий на свободной поверхности упругого полупространства. Он включает в себя метод сведения пространственной задачи теории потенциала к плоским, предложенный В. И. Моссаковским. Существенным достоинством данного метода по сравнению, например, с решением [2], основанным на методе Зоммерфельда, является возможность построения эффективных расчетных алгоритмов, так как фактически каждое следующее приближение может быть построено независимо от предыдущего прибавлением некоторых дополнительных членов. Рассматриваемая задача в конечном счете сводится к системе плоских задач теории потенциала, граничные условия которых содержат тригонометрические полиномы с неизвестными коэффициентами, которые находятся из условия регулярности решения в области контакта.

Пусть на поверхности упругого полупространства вне области контакта S приложена нормальная сила R в точке ξ, η. Вследствие этого под штампом возникают дополнительное давление и нормальное смещение.

Предположим, что нормальное смещение штампа $W(\rho, \alpha)$ совпадает с перемещением границы полупространства, вызванным действием силы R. Тогда для определения давления под подошвой штампа необходимо найти значение функции $P(\rho, \alpha) = \varphi_z'(\rho, \alpha)$ в области S, причем гармоническая в полупространстве $z \leqslant 0$ функция $\varphi(\rho, \alpha, z)$ определяется граничными условиями

$$\varphi(x, y, 0) = -R\,\frac{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{1/2}}{2(1-\nu^2)}, \quad |\rho| < \rho(\alpha)$$

$$\varphi_z'(x, y, 0) = 0, \ |\rho| > \rho(\alpha) \tag{1.1}$$

где $\rho(\alpha)$ — уравнение границы области контакта; ρ, α — полярные координаты.

Переходя к новым переменным $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $\eta = c\sin\psi$, $\xi = c\cos\psi$, $\alpha = \varphi - \psi$ и разлагая числитель в формуле (1.1) в ряд Фурье, получим

$$c^{-1}(1-\rho c^{-1}e^{-i\alpha})^{-1/2}(1-\rho c^{-1}e^{i\alpha})^{-1/2} = c^{-1}\{f_0(\rho) + 2(f_1(\rho)\cos\alpha + f_2(\rho)\cos 2\alpha + \ldots)\}$$

$$f_0(\rho) = a^2(1) + a^2(2)\rho^2c^{-2} + a^2(3)\rho^4c^{-4} + \ldots$$

$$f_1(\rho) = a(1)\,a(2)\rho c^{-1} + a(2)\,a(3)\rho^3c^{-3} + \ldots$$

$$a(1) = 1, \quad a(2) = \frac{1}{2}, \quad a(3) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \ldots$$

Функция $\varphi(\rho, z, \alpha)$ также может быть разложена в ряд

$$\varphi(\rho, z, \alpha) = \varphi_0(\rho, z) + \varphi_1(\rho, z)\cos\alpha + \varphi_2(\rho, z)\cos 2\alpha + \ldots$$

Функции $\varphi_n(\rho, 0)$, $\varphi_{nz}(\rho, 0)$ можно представить в виде контурных интегралов [3]. Тогда граничные условия (1.1) запишутся так

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_n(s)\, 2^{1-t}\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(1+\frac{n}{2}+\frac{s}{2}\right)^{s-2}ds = 0, \quad |\rho| > \rho(\alpha)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F_n(s)\, 2^{2-s}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-\frac{s}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+\frac{s}{2}\right)\rho^{s-1}\,ds = -R\,\frac{f_n(\rho, \alpha)}{2(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

$$|\rho| < \rho(\alpha), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

2. Неосесимметричная задача (1.2) для каждого значения α в случае четного n может быть приведена к осесимметричной с граничными условиями [3]

$$\Phi(\rho, 0, \alpha) = \frac{R}{2(1-\nu^2)}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{2k} a^2(k+1) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos 2k\alpha\, \times\right.$$

$$\left.\times \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{2n} a^2(n+k) + G(\rho, \alpha)\right), \quad |\rho| < \rho(\alpha) \quad (2.1)$$

$$\Phi_z'(\rho, 0, \alpha) = 0, \; |\rho| > \rho(\alpha)$$

$$G(\rho, \alpha) = G_0 + G_2\rho^2 + G_4\rho^4 + \ldots, \; G_0(\alpha) = \alpha_0{}^2\cos 2\alpha +$$
$$+ \alpha_0{}^4\cos 4\alpha + \ldots, \; G_2(\alpha) = \alpha_2{}^4\cos 4\alpha + \alpha_2{}^6\cos 6\alpha + \ldots, \ldots$$

Давление под штампом связано с осесимметричной функцией зависимостью

$$P(\rho, \alpha) = \Phi_z'(\rho, 0, \alpha) \quad (2.2)$$

Задача (2.1) в свою очередь сводится к задаче потенциала относительно некоторой функции $Q(\xi, \eta)$ гармонической во вспомогательной плоскости $\eta \leqslant 0$, антисимметричной относительно ξ. Граничные условия этой задачи имеют вид

$$Q_\eta'(\xi, 0) = 0, \; |\xi| > \rho(\alpha)$$

$$Q_\xi'(\xi, 0) = \frac{R}{2(1-\nu^2)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\xi}{c}\right)^{2k} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k\alpha)\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{\xi}{c}\right)^{2n} + G(\xi, \alpha)\right), \; |\xi| < \rho(\alpha), \quad (2.3)$$

Функции $Q(\xi, \eta)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ связаны зависимостью

$$Q_\xi'(\xi, 0) = \Phi_z'(\xi, 0)\,\xi \quad (2.4)$$

3. Аналогично для четных n неосесимметричная задача (1.2) для каждого значения α может быть приведена к первой гармонике с граничными условиями

$$\Phi_1(\rho, 0, \alpha) = -\frac{R}{1-\nu^2}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k-1)\alpha\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{2k+2n-3} a(k+n)\,a(k+n-1) + T(\rho, \alpha)$$

$$|\rho| < \rho(\alpha)$$

$$\Phi_{1z}(\rho, 0, \alpha) = 0, \; |\rho| > \rho(\alpha) \quad (3.1)$$

$$T(\rho, \alpha) = T_1(\alpha)\rho + T_3(\alpha)\rho + T_5(\alpha)\rho + \ldots, \; T_1(\alpha) =$$
$$= \alpha_1{}^3\cos 3\alpha + \alpha_1{}^5\cos 5\alpha + \ldots, T_3(\alpha) = \alpha_3{}^5\cos 5\alpha + \alpha_3{}^7\cos 7\alpha + \ldots, \ldots$$

Давление под штампом связано с функцией $\Phi_1(\rho, 0, \alpha)$ зависимостью

$$P(\rho, \alpha) = \Phi_{1z}'(\rho, 0, \alpha) \tag{3.2}$$

Задача (3.1) сводится к задаче потенциала относительно некоторой функции $u(\xi, \eta)$, гармонической во вспомогательной плоскости $\eta \leqslant 0$, антисимметричной относительно ξ. Граничные условия этой задачи следующие:

$$u\eta'(\xi, 0 = 0), \quad |\xi| > \rho(\alpha)$$

$$u_\xi'(\xi, 0) = -\frac{R}{1-\nu^2}\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2k-1)\alpha\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{\xi}{c}\right)^{2n-2} + T(\xi, \alpha), \quad |\xi| < \rho(\alpha) \tag{3.3}$$

Функцию $u(\xi, \eta)$ подбираем таким образом, чтобы выполнялось условие

$$u_\eta'(\xi, 0) = \Phi_{1z}(\xi, 0), \; 0 < \xi < \infty \tag{3.4}$$

4. Для каждого значения α приходим к смешанным задачам теории потенциала для полуплоскости [4]. Решая эти задачи и используя формулы (2.4) и (3.4), определим $\varphi_z'(\rho, 0)$ при $|\rho| < \rho(\alpha)$:

$$\varphi_z'(\rho, 0) = -\frac{R}{2(1-\nu^2)\sqrt{\rho^2(\alpha)-\rho^2}}\Big\{T(\alpha)\left(1-\frac{\rho}{c}e^{i\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{\rho}{c}e^{-i\alpha}\right)^{-1} +$$
$$+ Q_0 + \rho Q_1 + (Q_2 + \rho Q_3)(-\rho^2 + {}^1/_2\rho^2(\alpha)) + (Q_4 + \rho Q_5)\left(-\rho^4 + {}^1/_2\rho^2(\alpha)\rho^2 + \frac{1}{8}\rho^4(\alpha)\right) + \ldots\Big\} \tag{4.1}$$

$$T_{(\alpha)} = \left(1-\left(\frac{\rho(\alpha)}{c}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$Q_0 = \alpha_0^2\cos 2\alpha + \alpha_0^4\cos 4\alpha + \ldots, \; Q_1 = \alpha_1^3\cos 3\alpha +$$
$$+ \alpha_1^5\cos 5\alpha + \ldots, \; Q_{2n} = \alpha_{2n}^{2n+2}\delta^2\cos(2n+2)\alpha +$$
$$+ \alpha_{2n}^{2n+4}\cos(2n+4)\alpha + \ldots \alpha_{2n}^{2n+2}\cos(2n+4)\alpha + \ldots$$

Здесь α_n^k — произвольные постоянные.

Функция $\varphi_z'(\rho, 0, \alpha)$ в окрестности нулевой точки в случае гладкого штампа может быть разложена в ряд Тейлора

$$\varphi_z'(x, y) = A + Bx + Cy \tag{4.2}$$

Следовательно, в разложении $\varphi_z'(\rho, \alpha)$ по степеням ρ должны отсутствовать члены $\rho^m \cos n\alpha$, когда $m < n$:

$$\varphi_z'(\rho, \alpha) = P_0^0 + \rho(P_1^0 + P_1^1\cos\alpha) + \rho^2(P_2^0 + P_2^2\cos 2\alpha) + \ldots$$
$$\ldots + \rho^{2n}(P_{2n}^0 + P_{2n}^2\cos 2\alpha + \ldots + P_{2n}^{2n}\cos 2n\alpha) + \ldots \tag{4.3}$$

Эти условия дают бесконечную систему алгебраических линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов α_n^k.

Рассматриваемую задачу будем решать приближенно, последовательно определяя $\varphi_z'(\rho, \alpha)$, используя разложения (4.1) и (4.3) с точностью до $\rho^2{}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

В случае $n = 0$ ($Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ принимаем равными нулю) имеем

$$\varphi_z'(\rho, \alpha) = \frac{2}{2(1-\nu^2)\sqrt{\rho^2(\alpha)-\rho^2}}\Big(T(\alpha)\left(1-\frac{\rho}{c}e^{i\alpha}\right)^{-1}\left(1-\frac{\rho}{c}e^{-i\alpha}\right)^{-1} -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{2n}\cos(2n\alpha)\Big), \quad \alpha_0^{2n} = \frac{1}{\pi}\int\Big\{-\rho(\alpha)\int T(\alpha)\,d\alpha\left[\int\rho(\alpha)\,d\alpha\right]^{-1} + T(\alpha)\Big\}\cos(2\alpha n)\,d\alpha \tag{4.4}$$

Здесь и в дальнейшем интегрирование по α ведется в пределах от 0 до 2π.

Аналогично при $n = 1$ находим для $\varphi_z'(\rho, \alpha)$ выражение, отличающееся от (4.4) наличием дополнительного слагаемого

$$-\frac{R\rho}{2(1-\nu^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_1^{2n+1}\frac{\cos(2n+1)\alpha}{\sqrt{\rho^2(\alpha)-\rho^2}}$$

в правой части.

Неизвестные постоянные α_1^{2n+1} находятся по формуле

$$\alpha_1^{2n+1} = \frac{1}{\pi}\int\left[T(\alpha)\frac{2\cos\alpha}{c} - \rho(\alpha)\left(P_1^0 + P_1^1\cos\alpha\right)\right]\cos(2n+1)\,\alpha d\alpha$$

$$R = \int\rho(\alpha)\,d\alpha\int\rho(\alpha)\cos^2\alpha d\alpha - \left(\int\rho(\alpha)\cos\alpha d\alpha\right)^2$$

$$P_1^0 = \frac{1}{R}\left(\int T(\alpha)\frac{2\cos\alpha}{c}\,d\alpha\int\rho(\alpha)\cos^2\alpha d\alpha - \int T(\alpha)\frac{2\cos^2\alpha}{c}\,d\alpha\int\rho(\alpha)\cos\alpha\,d\alpha\right)$$

$$P_1^1 = \frac{1}{R}\left(\int\rho(\alpha)\,d\alpha\int T(\alpha)\frac{2\cos^2\alpha}{c}\,d\alpha - \int\rho(\alpha)\cos\alpha d\alpha\int T(\alpha)\frac{2\cos\alpha}{c}\,d\alpha\right)$$

Таким же образом были получены выражения для $\varphi_z'(\rho, \alpha)$ в случае $n = 2, 3, \ldots$. В качестве примера рассматривалась задача о давлении плоского штампа эллиптической и прямоугольной формы в плане.

α	$\rho/\rho(\alpha)$	P_0	P_1	P_2	P_0	P_1	P_2
0	0	0,724	0,752	0,752	0,721	0,721	0,721
	0,3	1,037	1,100	1,105	1,071	1,074	1,081
	0,6	1,939	2,060	2,087	1,595	1,617	1,620
1,256	0	0,742	0,753	0,753	0,719	0,719	0,719
	0,3	0,845	0,840	0,841	0,803	0,817	0,821
	0,6	1,114	1,084	1,090	1,965	1,003	1,007
2,513	0	0,779	0,753	0,753	0,701	0,710	0,711
	0,3	0,675	0,660	0,655	0,581	0,603	0,613
	0,6	0,709	0,706	0,687	0,537	0,599	0,600
3,781	0	0,779	0,753	0,753	0,709	0,710	0,712
	0,3	0,675	0,660	0,665	0,574	0,591	0,618
	0,6	0,709	0,706	0,687	0,536	0,601	0,623
5,024	0	0,742	0,753	0,753	0,719	0,719	0,720
	0,3	0,845	0,840	0,841	0,818	0,823	0,831
	0,6	0,114	1,084	1,090	0,964	1,002	1,110

В левой части таблицы приведены значения давлений $P_n(\rho, \alpha)$ с точностью до множителя $^1/_2\,R\,(1 - \nu^2)^{-1}$, когда $n = 0, 1, 2$, случае штампа эллиптической формы (a, b — полуоси эллипса, $c = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, (ξ, η) — координаты точки, в которой приложена сила R, причем $a = 1$, $b = 1,5$, $c = 3$). В правой части таблицы эти же значения приведены в случае штампа прямоугольной формы в плане.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
2. *Мартыненко М. Д.* Некоторые пространственные контактные задачи теории упругости // Контактные задачи и их инженерные приложения. М.: НИИМАШ, 1969. С. 84—90.
3. *Моссаковский В. И.* Давление штампа, близкого в плане к круговому, на упругое полупространство / ПММ. 1954. Т. 18. С. 675—680.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию 11.VII.1990