ние которого имеют вид

$$w(\xi) = (1 - M_0) \frac{c_0}{a_0} \left\{ 1 - \left[1 - 2 \frac{a_0 (R_0/c_0 - \xi)}{c_0 (1 - M_0)^2} \right]^{1/2} \right\}$$

В случае произвольного закона движения границы, но при выполнении условия $(R_1/(c_0 t))^2 \ll 1$ решение уравнения (2.2) можно найти методом последовательных приближений, в соответствии с которым запишем первые три приближения

$$w_1(\xi) = \xi, \quad w_2(\xi) = \xi + \frac{R_1(\xi)}{c_0}, \quad w_3(\xi) = \xi + \left(1 + \frac{1}{c_0} \frac{dR_1}{d\xi}\right) \frac{R_1(\xi)}{c_0}$$

где $R_1(\xi) = R(\xi) - R_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бескаравайный Н. М., Поздеев В. А.* Излучение звука оболочками при конечных перемещениях // Тр. 2-го Всесоюз. симпоз. по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. М.: Наука, 1982. С. 273—278.
2. *Поздеев В. А.* Нестационарные звуковые волны, вызванные конечным перемещением плоской границы раздела двух сред // Докл. АН УССР. 1985. № 2. С. 39—42.
3. *Поздеев В. А.* Акустическое излучение сферической полостью с учетом кинематической нелинейности // Докл. АН УССР. 1988. № 3. С. 42—45.
4. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.
5. *Гринберг Г. А.* Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых его приложениях // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 193—203.
6. *Тюлин В. Н.* Введение в теорию излучения и рассеяния звука. М.: Наука, 1976. 254 с.

Николаев

Поступила в редакцию
20.II.1990

УДК 532.5 : 534.222.2

В. С. Крутиков

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Предлагается новый подход к решению задачи с подвижными границами. Для сферически симметричного случая рассматриваются волновые явления при движении поверхности с произвольными законом изменения скорости и величиной начального радиуса в сжимаемой среде. Полученные соотношения пригодны для решения обратных и прямых задач.

Учет влияния подвижности границ в задачах, описываемых волновым уравнением, исследовался в основном в случаях, когда граничные условия удовлетворялись на подвижных границах (прямая задача) [1, 2]. Применение метода работы [1] сводит такую задачу к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Ниже рассматривается случай, когда дополнительное условие задано не на подвижной границе, а в фиксированной точке волновой зоны (обратная задача), и необходимо определить исследуемые функции в других точках, включая подвижные границы. При этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению. Кроме того, упомянутое дополнительное условие может быть и нелинейным.

При решении используется подход, основанный на определении зависимости между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в других точках при учете реальных величин запаздываний [3]. В некоторых случаях он позволяет получить в явном виде формулы для исследуемых функций при движении цилиндрической поверхности [4], движении проницаемой сферической границы [5].

1. Линейные дополнительные условия. Рассмотрим задачу

$$\varphi_{tt} - a^2\varphi_{rr} - 2a^2r^{-1}\varphi_r = 0, \quad r \geqslant R(t) \tag{1.1}$$

$$\varphi_r(r, 0) = \varphi(r, 0) = 0, \quad R(0) = r_0 \tag{1.2}$$

$$\rho\varphi_t|_{r=r_1} = P = f(t - (r_1 - r_0)/a) \tag{1.3}$$

$$-\varphi_r|_{r=R(t)} = v \tag{1.4}$$

где t — время, $R(t)$, r_0, r, r_1 — координаты подвижных границ, начальная, текущая точки волновой зоны соответственно, a, ρ — постоянные. Если известны условия (1.3) и необходимо реконструировать значения исследуемых функций φ и ее производных в любых других точках, включая подвижные границы, то имеем обратную задачу, а если только условия (1.4) — прямую.

Применяя одностороннее преобразование Лапласа к волновому уравнению (1.1), при учете нулевых начальных условий получаем операторное уравнение

$$\overline{\varphi}_{rr}(r, s) + 2r^{-1}\overline{\varphi}_r(r, s) - s^2a^{-2}\overline{\varphi}(r, s) = 0$$

решением которого будет

$$\overline{\varphi}(r, s) = r^{-1}[c_1(s)\exp(-sr/a) + c_2(s)\exp(sr/a)]$$

где s — параметр преобразования.

Рассматривая случай движения границы в безграничной среде, при учете условия (1.3) определяем $c(s) = f(s)\, r_1(s\rho)^{-1}\exp(sr_0/a)$. Тогда решение волнового уравнения имеет вид

$$\overline{P}(r, s) = \rho[s\overline{\varphi} - \varphi(r, 0)], \quad \overline{v}(r, s) = \left(s\frac{r}{a} + 1\right)\frac{\overline{\varphi}(r, s)}{r}$$

$$\overline{\varphi}(r, s) = \frac{r_1}{r\rho}\frac{\overline{f}(s)}{s}\exp\left(-s\frac{r - r_0}{a}\right)$$

Переходя к оригиналам, получаем искомые зависимости при учете реальных величин запаздываний.

Значения исследуемых функций в любых точках таковы

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r}f(\xi), \quad v(r, t)\frac{r^2\rho}{r_1} = \frac{r}{a}f(\xi) + \int_0^t f(\xi)\,dt,$$

$$\varphi(r, t) = \frac{r_1}{r\rho}\int_0^t f(\xi)\,dt, \quad \xi = t - \frac{r - r_0}{a} \tag{1.5}$$

На подвижной границе

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)}f\left(t - \frac{R(t) - r_0}{a}\right), \quad v(R(t), t)\frac{R^2(t)\rho}{r_1} =$$

$$= \frac{R(t)}{a}f\left(t - \frac{R(t) - r_0}{a}\right) + \left[\int_0^t f(\xi)\,dt\right]_{r=R(t)},$$

$$\varphi(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)\rho}\left[\int_0^t f(\xi)\,dt\right]_{r=R(t)} \tag{1.6}$$

Для вычисления по формулам (1.6) при решении обратных задач необходимо знание величины $R(t)$. Изменение радиуса подвижной границы можно определить следующим образом. Известно [6], что объем жидкости, протекающей через замкнутую поверхность ($4\pi r^2$), равен изменению объема в единицу времени, т. е. $dV/dt = 4\pi r^2 v(r, t)$, где v — второе соотношение из (1.5). Интегрируя от 0 до t и переходя на подвижную границу, можно получить следующее кубическое уравнение:

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3]\rho}{3r_1} = \left[\int_0^t \frac{r}{a}f(\xi)\,dt + \int_0^t\int_0^t f(\xi)\,dt\,dt\right]_{r=R(t)} \tag{1.7}$$

Функция f в (1.7) для обратных задач известна.

Произвольная функция f может быть аппроксимирована разными способами [3]. Пусть

$$P(r_1, t) = Ae^{-\alpha\xi_1}\sigma_0(\xi_1), \quad A, \alpha = \mathrm{const}, \quad \xi_1 = t - \frac{r_1 - r_0}{a}, \quad \sigma_0(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t<\tau \\ 1, & t\geqslant\tau \end{cases}$$

(σ_0 — единичная разрывная функция нулевого порядка). Тогда при учете соотношений (1.5)—(1.7) можно получить формулы

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r} Ae^{-\alpha\xi}\sigma_0(\xi), \quad v(r, t) = \frac{r_1 A}{\rho r^2}\left\{\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{r}{a} - \frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha\xi}\right\} \tag{1.8}$$

$$P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)} Ae^{-\alpha\xi}\sigma_0(\xi), \quad v(R(t), t) = \frac{r_1 A}{\rho R^2(t)}\left\{\frac{1}{\alpha} + \left(\frac{R(t)}{a} - \frac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha\xi}\right\} \tag{1.9}$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3]\rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a}\frac{A}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\xi}) + \frac{A}{\alpha}\left[\xi - \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\xi})\right] \tag{1.10}$$

В общем случае произвольных законов движения границ и вида функций f последнюю удобно аппроксимировать полиномом Лагранжа степени m

$$f = \sum A_m \xi_1^m, \quad A_m = \mathrm{canst} \tag{1.11}$$

Выше и всюду далее, если не оговорить противное, суммирование ведется по m от нуля до бесконечности. Число m характеризует количество точных значений функции и может быть сколь угодно большим [7].

Последовательность расчета при решении обратных задач следующая: по формулам (1.7), (1.10) определяем изменение радиуса подвижной границы, а по (1.6), (1.9)— значения исследуемых функций на подвижной границе. По формулам (1.5), (1.8) определяем значения этих функций в других точках.

Полученные решения задачи для волнового уравнения с подвижными границами (1.1)—(1.4) могут быть использованы для описания процесса расширения сферы в сжимаемой среде. В этом случае функцию $P(R(t), t)$ необходимо вычислять с учетом нелинейного члена интеграла Коши — Лагранжа $0{,}5\rho\varphi_r^2$ [8]. Подстановка решений (1.5), (1.6), (1.8), (1.9) в волновое уравнение превращает его левую часть в нуль, при $a \to \infty$ они переходят в известные решения для несжимаемой среды. Действительно, дифференцируя дважды уравнение (1.7) при $a \to \infty$, получим известную формулу $P - P_0 = \rho r^{-1}(2R\dot{R}^2 + R^2\ddot{R})$ для точки r_1. Они применимы для решения прямых и обратных задач.

Следует отметить, что кубическое уравнение (1.7), а также подобные ему (1.10), и третье уравнение из (2.3) можно решить, например, методом последовательных приближений [3]. За первое приближение можно взять значение, вычисленное при $a \to \infty$, либо для предыдущего момента времени. Эти соотношения обладают хорошей сходимостью и таким способом можно вычислить $R(t)$ с любой степенью точности.

2. Нелинейное дополнительное условие. Пусть задано условие

$$P(r, t) = -\rho\left(\varphi_t + \frac{1}{2}\varphi_r^2\right)\Big|_{r=r_1} \tag{2.1}$$

Используя разложение (1.11) при учете соотношений (1.5)—(1.7) можно записать

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r}\sum A_m\xi^m, \quad P(R(t), t) = \frac{r_1}{R(t)}\sum A_m\xi^m \tag{2.2}$$

$$\frac{v(r, t)r^2\rho}{r_1} = \frac{r}{a}\sum A_m\xi^m + \sum\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1} \tag{2.3}$$

$$\frac{v(R(t), t)R^2(t)\rho}{r_1} = \frac{R(t)}{a}\sum A_m\xi^m + \sum\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1}$$

$$\frac{[R^3(t) - r_0^3]\rho}{3r_1} = \frac{R(t)}{a}\sum\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1} + \sum\frac{A_m}{(m+1)(m+2)}\xi^{m+2}$$

$$\xi = t - \frac{R(t) - r_0}{a}$$

Запишем условие (2.1) в виде

$$P(r, t) = \frac{r_1}{r}\sum A_m\xi^m - \frac{1}{2}\rho\left\{\frac{r_1}{r^2\rho}\left[\frac{r}{a}\sum A_m\xi^m + \sum\frac{A_m}{m+1}\xi^{m+1}\right]\right\}^2 \tag{2.4}$$

Покажем, что решение задачи можно свести к решению одного алгебраического уравнения. Вычислим значение A_0, когда решение, аппроксимированное полиномом Лагранжа $A_0\sigma_0(\xi_1)$, представляет собой прямую в точке $r = r_1$ для момента t_0. Это момент прихода волны в точку r_1. Из (2.4) имеем квадратное уравнение относительно A_0, решая которое, получаем

$$A_0 = \frac{1}{2c_1} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 - \frac{P(r_1, t)}{c_1}}, \quad c_1 = \frac{1}{2\rho a^2}, \quad t_0 = \frac{r_1 - r_0}{a}, \quad \xi = 0 \tag{2.5}$$

Расширим временной интервал на некоторую величину Δt и определим решение, которое аппроксимируем полиномом Лагранжа $A_0 + A_1\xi$, проходящее через точку t_0 и вторую точку $t_1 = t_0 + \Delta t$. Тогда из (2.1) получаем

$$P(r_1, t_1) = A_0 + A_1\xi - c_2\left\{\left[\frac{r_1}{a}(A_0 + A_1\xi) + A_0\xi + \frac{A_1}{2}\xi^2\right]\right\}^2, \quad c_2 = \frac{1}{2r_1^2\rho} \tag{2.6}$$

Величина P известна по условию, A_0 — из (2.5). Тогда A_1 определится из решения квадратного уравнения (2.6).

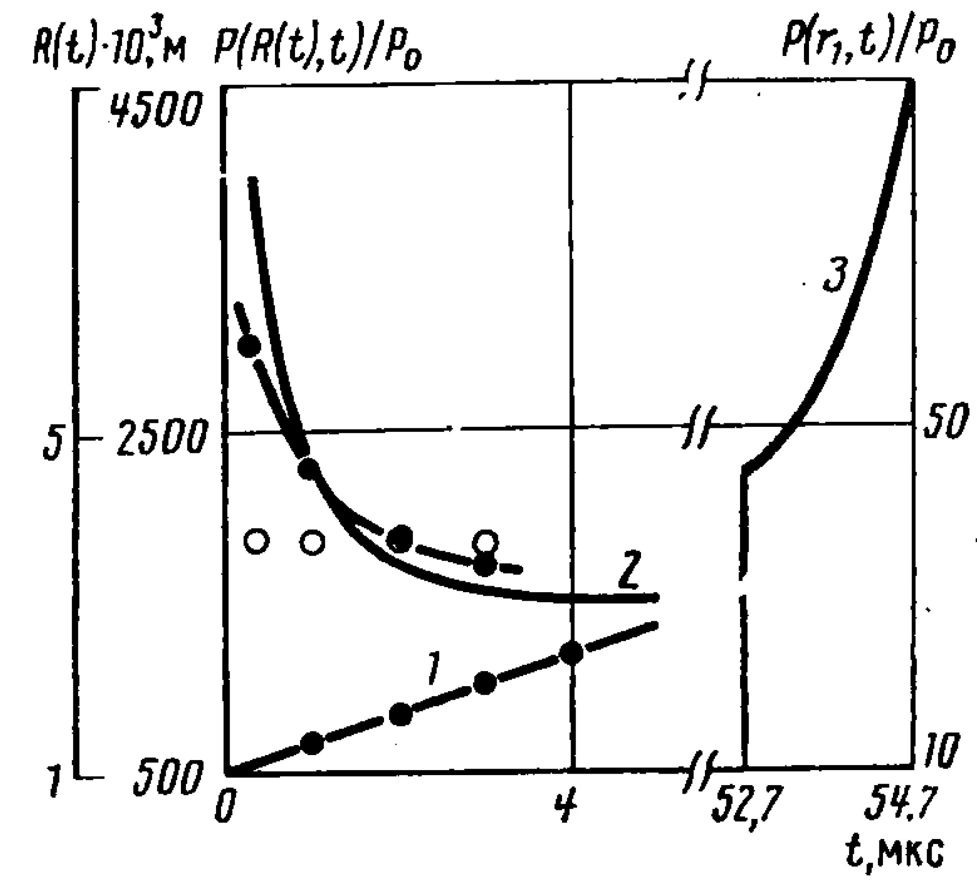
Продолжая таким способом, можно получить необходимое количество коэффициентов полинома Лагранжа. Соотношение для m-го коэффициента будет иметь вид:

$$A_m = -\frac{1}{2}\,\frac{(2c_2c_3c_4 - \xi_1^m)}{c_2c_4^2} \pm \left\{\left[\frac{1}{2}\,\frac{(2c_2c_3c_4 - \xi_1^m)}{c_2c_4^2}\right]^2 + \frac{c_0 - c_2c_3^2}{c_2c_4^2}\right\}^{1/2} \tag{2.7}$$

$$c_0 = -P(r_1, t) + A_0 + A_1\xi_1 + \ldots + A_{m-1}\xi_1^{m-1}, \quad c_2 = \frac{1}{2r_1^2\rho}, \quad \xi_1 = t - \frac{r_1 - r_0}{a}$$

$$c_3 = \frac{r_1}{a}\sum_{m=0}^{m-1} A_m\xi^m + \sum_{m=0}^{m-1}\frac{A_m}{m+1}\xi_1^{m+1}, \quad c_4 = \frac{r_1}{a}\xi_1^m + \frac{1}{m+1}\xi_1^{m+1}$$

Как видим, решение задачи с нелинейным дополнительным условием (2.1) и движущейся с произвольной скоростью границей свелось к вычислению по формуле типа (2.7). Зная коэффициенты A_m, по (2.2), (2.3) определяем исследуемые функции на подвижных границах и в любых других точках, а также параметры движения границы.



Полученные решения обратной задачи для волнового уравнения с нелинейными условиями (2.1) в областях с подвижными границами могут быть использованы, например, при решении вопросов управления движением расширяющейся полости в сжимаемой среде [3].

3. Пример. Рассмотрим задачу из разд. 2. На фигуре приведены результаты расчетов методом характеристик [3, 9] системы уравнений движения, сплошности и состояния для изоэнтропических процессов в форме Тэта

$$v_t - vv_r + \rho^{-1}P_r = 0, \quad \rho_t + (\rho v)_r' + (\nu - 1)\rho v = 0, \quad (P + B)/(P_0 + B) = (\rho/\rho_0)^n \tag{3.1}$$

с соответствующими граничными и начальными условиями (B, n — постоянные, ν — показатель симметрии). Закон расширения сферы $v(R(t), t) = 350 \exp(-10^3 t)$, $r_0 = 10^{-3}$ м, изменение радиуса $R(t)$, давления на подвижной границе и в точке волновой зоны $r_1 = 0{,}08$ м представлены кривыми *1*, *2*, *3* соответственно.

По формуле (2.7) способом последовательного определения коэффициентов полинома Лагранжа определяем A_0, где исходными для реконструкции приняты значения $P(r_1, t)$ (кривая *3*) при $\rho = 102$ кгс^2/м^4, $a = 1500$ м/с, $t = 52{,}7$—$55{,}7 \cdot 10^{-6}$ с, и последовательно другие коэффициенты A_m: $A_0 = 49{,}46$; $A_1 = 3{,}56 \cdot 10^4$; $A_2 = 3{,}46 \cdot 10^{12}$; $A_3 = -6{,}355 \cdot 10^{16}$.

Теперь из (2.2), (2.3) определяем другие исследуемые функции. Результаты восстановления $R(t)$ и $P(R(t), t)$ обозначены темными точками, вычисления по известной формуле $P - P_0 = \rho\left(\frac{3}{2}\dot{R}^2 + R\ddot{R}\right)$ — светлыми точками. Подобные результаты получить другими способами нельзя, метод [1] применить к обратным задачам затруднительно.

Удовлетворительное согласование результатов различных расчетов свидетельствует о правомочности предложенного подхода к решению поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гринберг Г. А.* Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях // ПММ. 1967, Т. 31, Вып. 2. С. 193—203.
2. Вопросы математической физики / Под ред. В. М. Тучкевича. Л.: Наука, 1976.— 296 с.
3. *Крутиков В. С.* Одномерные задачи механики сплошной среды с подвижными границами. Киев: Наук. думка, 1985. 125 с.
4. *Крутиков В. С.* О восстановлении давления на движущейся границе плазменного поршня // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. Вып. 6. С. 510—514.
5. *Крутиков В. С.* Приближенная оценка влияния проницаемости подвижной границы плазменного поршня // Письма в ЖТФ. 1989. Т. 15. Вып. 14. С. 45—48.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.: Гостехтеориздат, 1954. 566 с.
7. Математическая энциклопедия. Т. 2 / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Сов. энциклопедия, 1979. 1103 с.
8. *Слепян Л. И.* Об уравнениях динамики осесимметричной полости в идеальной сжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282, № 4. С. 809—813.
9. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 687 с.

Николаев

Поступила в редакцию
22.III.1990

УДК 539.3

В. И. Моссаковский, Е. В. Пошивалова

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ, ПРИЛОЖЕННОЙ ВНЕ ОБЛАСТИ КОНТАКТА

Формула для влияния нагрузки, действующей вне штампа круговой формы в плане, известна [1]. Ниже предлагается новый подход к исследованию давления, возникающего под подошвой неосесимметричного плоского штампа в результате действия и нормальных усилий на свободной поверхности упругого полупространства. Он включает в себя метод сведения пространственной задачи теории потенциала к плоским, предложенный В. И. Моссаковским. Существенным достоинством данного метода по сравнению, например, с решением [2], основанным на методе Зоммерфельда, является возможность построения эффективных расчетных алгоритмов, так как фактически каждое следующее приближение может быть построено независимо от предыдущего прибавлением некоторых дополнительных членов. Рассматриваемая задача в конечном счете сводится к системе плоских задач теории потенциала, граничные условия которых содержат тригонометрические полиномы с неизвестными коэффициентами, которые находятся из условия регулярности решения в области контакта.

Пусть на поверхности упругого полупространства вне области контакта S приложена нормальная сила R в точке ξ, η. Вследствие этого под штампом возникают дополнительное давление и нормальное смещение.

Предположим, что нормальное смещение штампа $W(\rho, \alpha)$ совпадает с перемещением границы полупространства, вызванным действием силы R. Тогда для определения давления под подошвой штампа необходимо найти значение функции $P(\rho, \alpha) = \varphi_z'(\rho, \alpha)$ в области S, причем гармоническая в полупространстве $z \leqslant 0$ функция $\varphi(\rho, \alpha, z)$ определяется граничными условиями

$$\varphi(x, y, 0) = -R\,\frac{((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)^{1/2}}{2(1-\nu^2)}, \quad |\rho| < \rho(\alpha)$$

$$\varphi_z'(x, y, 0) = 0, \; |\rho| > \rho(\alpha) \tag{1.1}$$