ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский Л. А.* Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18. N. 2. С. 181—191.
2. *Островский Л. А., Степанянц Ю. А.* Нелинейные поверхностные и внутренние волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны. М.: Наука, 1991.
3. *Leonov A. I.* The effect of Earth rotation on the propagation of weak nonlinear surface and internal long oceanic waves // Annals New York Acad. Sci. 1981. V. 373. P. 150—159.
4. *Шрира В. И.* Распространение длинных нелинейных волн в слое вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. N 1. С. 76—81.
5. *Шрира В. И.* О длинных существенно нелинейных волнах во вращающемся океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. N. 4. С. 395—405.
6. *Петвиашвили В. И., Похотелов О. А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989. 199 с.
7. *Козлов В. А., Литвак А. Г., Суворов Е. В.* Солитоны огибающих релятивистских сильных электромагнитных волн // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. Вып. 1. С. 148—157.
8. *Bogomolov Ya. L., Kol'chugina I. A., Litvak A. G., Sergeev A. M.* Near-sonic Langmuir solitons // Phys. Lett. 1982. V. 94A. N. 9. P. 447—450.
9. *Grimshaw R.* Evolution equations for weakly nonlinear long internal waves in a rotating fluid // Stud. Appl. Math. 1985. V. 73. Pt. 1. P. 1—33.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
24.VIII.1990

УДК 533.6.01 : 534

В. А. Поздеев

МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕНИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

При помощи нового метода решения краевых задач с подвижными границами для линейного волнового уравнения [1—3] получено решение краевой задачи с заданием граничных условий трех типов [4].

Ранее [5] был разработан наиболее общий метод решения задач теории теплопроводности, диффузии и волновых процессов при наличии движущихся границ, где использовано разложение по мгновенным собственным частотам. Однако практическая реализация этого метода очень трудоемка.

1. Математическая постановка краевой задачи. Рассмотрим [5] краевую нестационарную задачу излучения осесимметричных волн, вызванных некоторыми физическими процессами, происходящими на движущейся поверхности. Требуется найти функцию потенциала φ, удовлетворяющую линейному волновому уравнению при наличии симметрии по пространственной координате r:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (1.1)$$

где $m = 0, 1, 2$; t — время; c_0 — скорость распространения возмущений. Начальные условия в области изменения координаты $r \geqslant R_0$ полагаем нулевыми

$$\varphi\,|_{t=0} = \partial\varphi/\partial t\,|_{t=0} = 0 \qquad (1.2)$$

Кроме того, полагаем, что искомая функция φ удовлетворяет условию излучения, согласно которому решение уравнения (1.1) содержит лишь убегающие волны. Решение уравнения (1.1) при учете начальных условий (1.2) и условия излучения имеет вид

$$\varphi(r, t) = f(t^\circ)\, r^{-m/2}, \quad t^\circ = t - (r - R_0)/c_0 \qquad (1.3)$$

где t° — волновой аргумент. Заметим, что решение (1.3) при $m = 1$ является приближенным, справедливым [6] при достаточно больших значениях координаты r. Более тщательный анализ дает условие применимости решения вида (1.3) при $m = 1$: $c_0t/R_0 \ll 1$.

Вид функции f в (1.3) определится из граничного условия на движущейся границе. Оно может быть одним из следующих типов [4]:

$$\varphi\,|_{r=R(t)} = q_1(t) \quad (\text{тип } 1) \tag{1.4}$$

$$\partial\varphi/\partial r\,|_{r=R(t)} = q_2(t) \quad (\text{тип } 2) \tag{1.5}$$

$$(\partial\varphi/\partial r + \alpha R_0^{-1}\varphi)\,|_{r=R(t)} = q_3(t) \quad (\text{тип } 3) \tag{1.6}$$

где α — произвольная постоянная, а $R_0 \neq 0$.

Отметим, что в граничных условиях вида (1.4)—(1.6) закон движения границы выражается произвольной, но непрерывной функцией времени. Функцию f можно интерпретировать как интенсивность некоторого условного точечного источника, расположенного в начале координат вне области определения функции φ для поставленной краевой задачи. Решение краевой задачи (1.1)—(1.6) ищем в области изменения независимых переменных $t \geqslant 0$, $r \geqslant R_0$. Получение конкретного решения задачи для каждого типа граничного условия (1.4)—(1.6) рассмотрим раздельно.

2. Граничное условие первого типа. Из решения (1.3) после удовлетворения его граничному условию (1.4) получим

$$f\,(t - (R\,(t) - R_0)/c_0) = R^{m/2}(t)\, q_1(t) \tag{2.1}$$

Теперь воспользуемся преобразованием [1—3]

$$\xi = t - (R\,(t) - R_0)/c_0 \tag{2.2}$$

Пусть $t = w\,(\xi)$ — решение уравнения (2.2). Тогда равенство (2.1) при учете преобразования (2.2) можно представить в виде

$$f\,(\xi) = R^{m/2}(w\,(\xi)) \tag{2.3}$$

Переменная ξ в (2.2) и в (2.3) играет роль нового времени. Поэтому принимая в (2.3) в соответствии с (1.3) $\xi = t^\circ$ и подставляя в (1.3), получим искомое решение краевой задачи первого типа

$$\varphi\,(r, t) = [R\,(w\,(t^\circ))/r]^{m/2}\, q_1(w\,(t^\circ)) \tag{2.4}$$

Действительно, функция (2.4) — решение волнового уравнения, так как соответствует форме (1.3) и является функцией волнового аргумента. С другой стороны, конструкция функции f найдена из граничного условия (1.4), заданного на подвижной границе.

Рассмотрим частный случай движения границы с постоянной скоростью:

$$R\,(t) = R_0 + v_0 t, \quad v_0 = \text{const}, \quad w\,(t^\circ) = t^\circ/(1 - M_0)$$
$$M_0 = v_0/c_0, \quad R\,(w\,(t^\circ)) = R_0 + v_0 t^\circ/(1 - M_0)$$

При этом выражение (2.4) примет вид

$$\varphi\,(r, t) = \left[\frac{R_0}{r}\left(1 + \frac{v_0 t^\circ}{R_0\,(1 - M_0)}\right)\right]^{m/2} q_1\!\left(\frac{t^\circ}{1 - M_0}\right) \tag{2.5}$$

3. Граничное условие второго типа. Из решения (1.3) после удовлетворения его граничному условию (1.5) получим уравнение для нахождения функции $f\,(\xi)$:

$$\frac{df\,(\xi)}{d\xi} + \frac{c_0 m}{2}\,\frac{f\,(\xi)}{R\,(w\,(\xi))} = -\,c_0 R^{m/2}(w\,(\xi))\, q_2(w\,(\xi)) \tag{3.1}$$

где $t = w\,(\xi)$ — решение уравнения (2.2).

Решение уравнения (3.1) известно и имеет вид

$$f\,(\xi) = -\,c_0 \begin{cases} \displaystyle\int_0^\xi q_2(w\,(\xi_1))\, d\xi_1, & m = 0 \\ \displaystyle F\,(\xi)\int_0^\xi \frac{R^{m/2}(w\,(\xi_1))\, q_2(w\,(\xi_1))}{F\,(\xi_1)}\, d\xi_1, & m = 1, 2 \end{cases} \tag{3.2}$$

$$F\,(\xi) = \exp\left[-\frac{c_0 m}{2}\int_0^\xi \frac{d\xi}{R\,(w\,(\xi))}\right]$$

Подставляя выражение (3.2) в решение (1.3) и заменяя аргумент ξ на волновой аргумент t°, получим искомое решение краевой задачи второго типа

$$\varphi(r,t) = -c_0 \begin{cases} \int\limits_0^{w(t^\circ)} \left[1 - \frac{1}{c_0}\frac{dR}{dt}\right] q_2(t)\,dt, & m=0 \\ \left[\frac{R(w(t^\circ))}{r}\right]^{m/2} G(w(t^\circ)) \int\limits_0^{w(t^\circ)} \frac{q_2(t)}{G(t)}\left[1-\frac{1}{c_0}\frac{dR}{dt}\right] dt, & m=1,2 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$G(t) = \exp\left[-\frac{c_0 m}{2}\int\limits_0^t \frac{dt}{R(t)}\right]$$

В частном случае движения границы с постоянной скоростью решение (3.3) примет вид

$$\varphi(r,t) = -c_0(1-M_0)\times$$

$$\times\begin{cases} \int\limits_0^{t^\circ/(1-M_0)} q_2(t)\,dt, & m=0 \\ \left(\frac{R_0}{r}\right)^{m/2} \psi^{m/2(1-1/M_0)}(t^\circ) \int\limits_0^{t^\circ/(1-M_0)} q_2(t)\,\psi^{m/(2M_0)}(t)\,dt, & m=1,2. \end{cases}$$

$$\psi(t) = 1 + \frac{v_0 t}{R_0(1-M_0)}\,.$$

4. Граничное условие третьего типа. Из решения (1.3) после удовлетворения его граничному условию (1.6) получим

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} + \frac{mc_0}{2}\left[\frac{1}{R(w(\xi))} - \frac{2\alpha}{mR_0}\right] f(\xi) = -c_0 R^{m/2}(w(\xi))\, q_3(w((\xi)) \tag{4.1}$$

Используя решение уравнения (4.1), в соответствии с выражением (1.3) найдем искомое решение краевой задачи третьего типа

$$\varphi(r,t) = -c_0 \begin{cases} \exp\left(\frac{c_0\alpha}{R_0} w(t^\circ)\right) \int\limits_0^{w(t^\circ)} q_3(t)\exp\left(-\frac{c_0\alpha}{R_0}t\right) dt, & m=0 \\ \left[\frac{R(w(t^\circ))}{r}\right]^{m/2} H(w(t^\circ)) \int\limits_0^{w(t^\circ)} \frac{q_3(t)}{H(t)}\left[1-\frac{1}{c_0}\frac{dR}{dt}\right] dt, & m=1,2 \end{cases} \tag{4.2}$$

$$H(t) = \exp\left[-\frac{c_0 m}{2}\int\limits_0^t \frac{dt_1}{R(t_1)} + \frac{\alpha}{c_0}t\right]$$

При движении границы с постоянной скоростью решение задачи (4.2) примет вид.

$$\varphi(r,t) = -c_0 \begin{cases} \int\limits_0^{t^\circ/(1-M_0)} q_3(t)\exp\left(-\frac{\alpha c_0}{R_0}t\right) dt, & m=0 \\ (1-M_0)\left(\frac{R_0}{r}\right)^{m/2} \psi^{m/4(1/2-1/M_0)}\psi(t^\circ)\exp\left(\frac{\alpha t^\circ}{R_0(1-M_0)}\right)\times \\ \times \int\limits_0^{t^\circ/(1-M_0)} q_3(t)\,\psi^{m/(2M_0)}\psi(t)\exp\left(-\frac{\alpha t}{R_0}\right) dt, & m=1,2 \end{cases} \tag{4.3}$$

5. Решение определяющего уравнения. При решении краевой задачи с подвижными границами методом нелинейного преобразования времени основная трудность связана с нахождением решения определяющего алгебраического уравнения (2.2). Ранее уже было получено его аналитическое решение при движении границы с постоянной скоростью v_0. В более общем случае при задании закона движения границы в виде $R(t) = R_0 + v_0 t + a_0 t^2/2$ получим квадратное уравнение относительно переменной t, решение которого имеют вид

$$w(\xi) = (1 - M_0)\frac{c_0}{a_0}\left\{1 - \left[1 - 2\,\frac{a_0(R_0/c_0 - \xi)}{c_0(1 - M_0)^2}\right]^{1/2}\right\}$$

В случае произвольного закона движения границы, но при выполнении условия $(R_1/(c_0 t))^2 \ll 1$ решение уравнения (2.2) можно найти методом последовательных приближений, в соответствии с которым запишем первые три приближения

$$w_1(\xi) = \xi, \quad w_2(\xi) = \xi + \frac{R_1(\xi)}{c_0}, \quad w_3(\xi) = \xi + \left(1 + \frac{1}{c_0}\frac{dR_1}{d\xi}\right)\frac{R_1(\xi)}{c_0}$$

где $R_1(\xi) = R(\xi) - R_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бескаравайный Н. М., Поздеев В. А.* Излучение звука оболочками при конечных перемещениях // Тр. 2-го Всесоюз. симпоз. по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. М.: Наука, 1982. С. 273—278.
2. *Поздеев В. А.* Нестационарные звуковые волны, вызванные конечным перемещением плоской границы раздела двух сред // Докл. АН УССР. 1985. № 2. С. 39—42.
3. *Поздеев В. А.* Акустическое излучение сферической полостью с учетом кинематической нелинейности // Докл. АН УССР. 1988. № 3. С. 42—45.
4. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 431 с.
5. *Гринберг Г. А.* Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии, волновых и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых его приложениях // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 2. С. 193—203.
6. *Тюлин В. Н.* Введение в теорию излучения и рассеяния звука. М.: Наука, 1976. 254 с.

Николаев

Поступила в редакцию
20.II.1990

УДК 532.5 : 534.222.2

В. С. Крутиков

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Предлагается новый подход к решению задачи с подвижными границами. Для сферически симметричного случая рассматриваются волновые явления при движении поверхности с произвольными законом изменения скорости и величиной начального радиуса в сжимаемой среде. Полученные соотношения пригодны для решения обратных и прямых задач.

Учет влияния подвижности границ в задачах, описываемых волновым уравнением, исследовался в основном в случаях, когда граничные условия удовлетворялись на подвижных границах (прямая задача) [1, 2]. Применение метода работы [1] сводит такую задачу к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Ниже рассматривается случай, когда дополнительное условие задано не на подвижной границе, а в фиксированной точке волновой зоны (обратная задача), и необходимо определить исследуемые функции в других точках, включая подвижные границы. При этом закон движения границы неизвестен и подлежит определению. Кроме того, упомянутое дополнительное условие может быть и нелинейным.

При решении используется подход, основанный на определении зависимости между значениями исследуемых функций на подвижных границах и в других точках при учете реальных величин запаздываний [3]. В некоторых случаях он позволяет получить в явном виде формулы для исследуемых функций при движении цилиндрической поверхности [4], движении проницаемой сферической границы [5].