Приведем полученные выражения для семи первых членов:

$$s_1 = A\tau,\ A = (-v_0 \ln|v_0| + \delta v_0^2 - \mu^2)^{1/2}$$
$$s_2 = h_0\tau^2/2!,\ h_0 = (2\delta v_0 - 1 - \ln|v_0|)/2$$
$$s_3 = Ah_1\tau^3/3!,\ h_1 = (2\delta - 1/v_0)/2$$
$$s_4 = (h_0h_1 + A^2h_2)\,\tau^4/4!,\ h_2 = 1/2v_0^2$$
$$s_5 = (A^3h_3 + A\,(h_1^2 + h_0h_2))\,\tau^5/5!,\ h_3 = -1/v_0^3$$
$$s_6 = [A^4h_4 + A^2\,(6h_0h_3 + 5h_1h_2) + 3h_0^2h_2 + h_0h_1^2]\,\tau^6/6!,\ h_4 = 3/v_0^4$$
$$s_7 = [A^5h_5 + A^3\,(h_0h_4 + 11h_1h_3 + 5h_2^2) + A\,(15h_0\,(h_0h_3 + h_1h_2) + h_1^2h_2 + h_1^3)]\,\tau^7/7!,\ h_5 = -12/v_0^5$$

На фиг. 2 приводятся результаты решения уравнения (1.6) при $\delta = -11{,}700$; $\mu = 0{,}064$; $v_0 = 0{,}018$; $v_1 = 0{,}016$; $v_2 = 0{,}132$. Кривая *1* соответствует вычислению по формуле $v(\tau) = v_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_7$, а кривая *2* показывает результат счета с шагом $H = 0{,}001$ по алгоритму работы [3]. Особенность этого алгоритма, который дает высокую точность, состоит в том, что он позволяет в процессе счета сохранить значение первого интеграла (1.3) уравнения движения. В рассматриваемом примере до времени $\tau < 0{,}3$ результаты практически совпадают. Так как $\delta = -11{,}7 < 0$, то, согласно (1.4), (2.2) при измерении реального времени от $t_0 = -\infty$ до $+\infty$ модифицированное время изменяется на величину $\tau_1 = 2\pi/\sqrt{|\delta|} \simeq 1{,}8$. Поэтому приведенные выше аналитические формулы, дающие приближенное решение, могут оказаться применимыми на большом интервале реального времени.

Отметим, что в частном случае $D = b^2 - 4ac = 0$ приходим к результату И. В. Мещерского.

Автор благодарит Д. В. Краснова за помощь в проведении вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артышев С. Г.* Об инвариантах одного линейного дифференциального уравнения // Математическое моделирование задач механики сплошной среды. М.: Энергоатомиздат, 1989, С. 3—6.
2. *Adomian G.* Convergent series solution of nonlinear equations // J. Comp. and Appl. Math. 1984. V. 11. No. 2. P. 225—230.
3. *Chao Yu. Qin.* An explicit energy-conserving numerical method for equations of the form $d^2x/dt^2 = f(x)$ // J. Comp. Phys. 1988. V. 79. No. 2. P. 473—476.

Москва

Поступила в редакцию
13.III.1990

УДК 532.5,515.466

В. М. Галкин, Ю. А. Степанянц

О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Дается математическое доказательство отсутствия стационарных решений солитонного типа у ряда уравнений, родственных уравнению Л. А. Островского, которое, в частности, описывает поверхностные и внутренние волны во вращающейся жидкости. Предлагается физическая интерпретация этого факта. Показано, что при ином характере высокочастотной дисперсии, соответствующей, например, капиллярным волнам на мелкой вращающейся жидкости, условия теоремы не выполняются, в результате чего снимается запрет на существование солитонов. При помощи численных расчетов построены в этом случае как одиночные солитоны, так и стационарные образования из них — мультисолитоны.

1. Постановка задачи. Рассмотрим класс нелинейных волновых уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + c\frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\alpha}{p}\frac{\partial\eta^p}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}\right) = \gamma\eta \tag{1.1}$$

Здесь $\eta(x, t)$ — неизвестная функция; $c, \alpha, \beta, \gamma, p$ — постоянные, причем $p > 1$. Уравнения данного семейства с одной стороны родственны обобщенным уравнениям Кортевега — де Вриза (КдВ) и переходят в них при $\gamma = 0$, а с другой стороны, их структура близка к структуре уравнения Кадомцева — Петвиашвили (КП). Впервые уравнение, принадлежащее к рассматриваемому классу (1.1) с $p = 2$, было выведено Л. А. Островским [1] для описания внутренних волн в океане. Впоследствии аналогичные уравнения были получены многими другими авторами для разных типов волн (см. обзор [2] и имеющиеся там ссылки).

Сходство обобщенного уравнения (1.1) с классическими уравнениями КдВ и КП, отличительной чертой которых является наличие солитонных решений (под солитонами будем понимать стационарные уединенные волны, не касаясь вопросов их устойчивости, эволюционности и т. д.), позволяет предполагать возможность существования таких же решений и в рамках уравнения (1.1). Оказалось, однако, что несмотря на относительную простоту этого уравнения, до сих пор не удалось дать полного описания его стационарных решений (в обзоре [2] приведены отдельные классы таких решений, построенные на ЭВМ). Была предпринята попытка [3] доказательства того, что уравнение (1.1) при $p = 2$ и одинаковых знаках параметров β и γ не обладает солитонными решениями. Однако это доказательство, излишне сложное, содержит ряд сомнительных утверждений, хотя и приводит к верному результату.

Ниже предлагается весьма простое и строгое доказательство отсутствия солитонных решений при $\beta\gamma > 0$ не только для собственно уравнения Л. А. Островского, но и для его обобщений с произвольным значением p, а также для ряда других родственных уравнений (см. [4, 5]).

Отметим, что некоторые из уравнений этого класса имеют прямое отношение к физическим системам. В частности при $p = 3$ уравнение (1.1) описывает распространение внутренних волн четных мод, обладающих кубичной нелинейностью, во вращающемся океане.

2. «Антисолитонная» теорема. Рассматривая стационарные решения уравнения (1.1), зависящие от одной переменной $\xi = x - Vt$, перепишем его в форме системы [3]

$$u'' = -\sigma p^{-1} u^p + au + bv, \quad v'' = u \tag{2.1}$$

$$u = \eta \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^{1/(p-1)}, \quad a = \frac{V - c}{\beta}, \quad b = \frac{\gamma}{\beta}, \quad \sigma = \begin{cases} 1, & \text{если } p \text{ четное} \\ \operatorname{sign}(\alpha/\beta), & \text{если } p \text{ нечетное} \end{cases}.$$

(штрихи означают дифференцирование по ξ). Далее будем интересоваться солитонными решениями системы (2.1), для которых функция $u(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ вместе со своими производными.

Докажем, что таких решений не существует при положительном значении параметра b. Прежде всего отметим, что система (2.1) обладает интегралом

$$H^\circ = {}^1/_2 [(u')^2 + b(v')^2] + \sigma p^{-1}(p + 1)^{-1} u^{p+1} - {}^1/_2 a u^2 - buv \tag{2.2}$$

На солитонном решении вдали от его вершины, которую для определенности поместим в начало координат, систему (2.1) можно линеаризовать, пренебрегая слагаемым $\sim u^p$. Из полученной таким образом линейной системы вытекает простое характеристическое уравнение для решений, пропорциональных $e^{\lambda\xi}$,

$$\lambda^4 - a\lambda^2 - b = 0 \tag{2.3}$$

Можно убедиться, что при любом знаке a и при $b > 0$ оно всегда имеет пару чисто мнимых корней и пару чисто действительных корней, равных по модулю и противоположных по знаку. Мнимые корни в дальнейшем рассматривать не будем, ибо им соответствуют нелокализованные решения. Действительные же корни в принципе могли бы соответствовать асимптотикам солитонных решений. Обозначим действительный положительный корень $\lambda_1 = [a/2 + \sqrt{a^2/4 + b}\,]^{1/2}$ и запишем асимптотику возможного солитонного решения

$$u(\xi) \sim \begin{cases} A \exp(\lambda_1 \xi), & \text{при } \xi \to -\infty \\ B \exp(-\lambda_1 \xi), & \text{при } \xi \to \infty \end{cases}$$

Предположим далее, что коэффициент $A > 0\ (< 0)$, тогда и $u(\xi) > 0\ (< 0)$ при $\xi \to -\infty$. Из условия $v'(\pm\infty) = 0$ и теоремы Ролля следует обращение в нуль хотя бы в одной точке второй производной функции v. Выберем наименьшее значение ξ_1, при котором выполняется равенство $v''(\xi_1) = 0$. Тогда на интервале $(-\infty, \xi_1)$ имеем $u(\xi) >$

> 0 (< 0), а в точке ξ_1 в силу второго уравнения системы (2.1) $u(\xi_1) = 0$. Обращаясь к интегралу (2.2), можно заключить, что на солитонном решении $H^\circ = 0$. Но тогда в точке ξ_1 имеем $u'(\xi_1) = v'(\xi_1) = 0$. Теперь снова можно воспользоваться теоремой Ролля, из которой вытекает, что $v'' = 0$ хотя бы в одной точке $\xi_2 \in (-\infty, \xi_1)$. Но это противоречит предположению о том, что ξ_1 — наименьшее значение, при котором $v'' = 0$. Отсюда следует, что предположение о наличии солитонного решения с нулевыми асимптотиками на бесконечности не верно.

3. Солитонные решения уравнения Л. А. Островского при $b < 0$. Приведенное в разд. 2 доказательство «антисолитонной» теоремы существенно основано на положительности коэффициента b: при $b < 0$ оно теряет силу. В последнем случае поиск стационарных решений уравнения Л. А. Островского (при $p = 2$, $a = 75$, $b = 1200$) на ЭВМ методом В. И. Петвиашвили [6] приводит к солитонному решению, структура которого изображена сплошной линией на фиг. 1. Благодаря наличию локальных экстремумов вне вершины солитона здесь возможно образование связанных состояний из двух и более солитонов — мультисолитонные решения. Штриховой линией показано стационарное решение уравнения Л. А. Островского в виде бисолитона при тех же значениях параметров.

Дадим теперь физическую интерпретацию возможности существования солитонных решений в рамках уравнения (1.1). Линеаризуя (1.1) и отыскивая решения полученного линейного уравнения в виде $\eta \sim \exp(i\omega t - ikx)$, найдем соответствующее дисперсионное соотношение для волн бесконечно малой амплитуды

$$\omega = ck + \gamma/k - \beta k^3$$

Отсюда следует выражение для фазовой скорости ω/k. График ее зависимости от k показан на фиг. 2 при различных знаках β и $\gamma > 0$. Видно, что при $\beta > 0$, линейные возмущения могут существовать во всем диапазоне фазовых скоростей от $-\infty$ до $+\infty$. Вследствие этого движущийся с произвольной скоростью в такой среде объект неизбежно будет находиться в резонансе с какой-нибудь линейной волной, что приведет к ее возбуждению. Поэтому локализованное возмущение при движении будет испытывать радиационное затухание и, значит, не будет стационарным.

Эти рассуждения однако нельзя считать вполне строгими, ибо генерация линейных возмущений зависит еще и от структуры движущегося источника. В частности, в некоторых случаях возможны солитонные решения со сложной внутренней структурой при наличии резонанса с линейными возмущениями [7, 8]. У таких солитонов в процессе движения происходит как бы одновременная генерация и поглощение возбуждаемых волн во внутренней области. Подобного рода решения обычно образуют конечное или счетное множество и неустойчивы к малым возмущениям.

Отметим также, что при наличии резонанса возможны решения, представляющие собой стационарно движущиеся солитоны на фоне периодических волн. Полная энергия таких возмущений бесконечна, и здесь они не рассматриваются.

Если же $\beta < 0$, то линейные возмущения могут существовать лишь в полуограниченном диапазоне фазовых скоростей при $\omega/k \geqslant c$. Тогда появляется возможность существования солитонов, не находящихся в резонансе с линейными возмущениями и не подверженных радиационному затуханию.

Для волн во вращающейся жидкости параметр $\gamma > 0$ [1—3]. В случае поверхностных гравитационных и внутренних волн в океане, кроме того, и $\beta > 0$ [1—3], поэтому у таких волн солитоны невозможны. Параметр β может быть отрицательным для капиллярных волн на поверхности мелкой вращающейся жидкости, либо для быстрых магнитозвуковых волн во вращающейся замагниченной плазме [2]. Для таких волн возможно существование не только одномерных, но и двумерных мультисолитонов [2].

4. «Антисолитонная» теорема для уравнения В. И. Ширыы. Наряду с уравнением Л. А. Островского в теории нелинейных волн во вращающейся жидкости рассматривается также несколько более общее уравнение [4, 5]

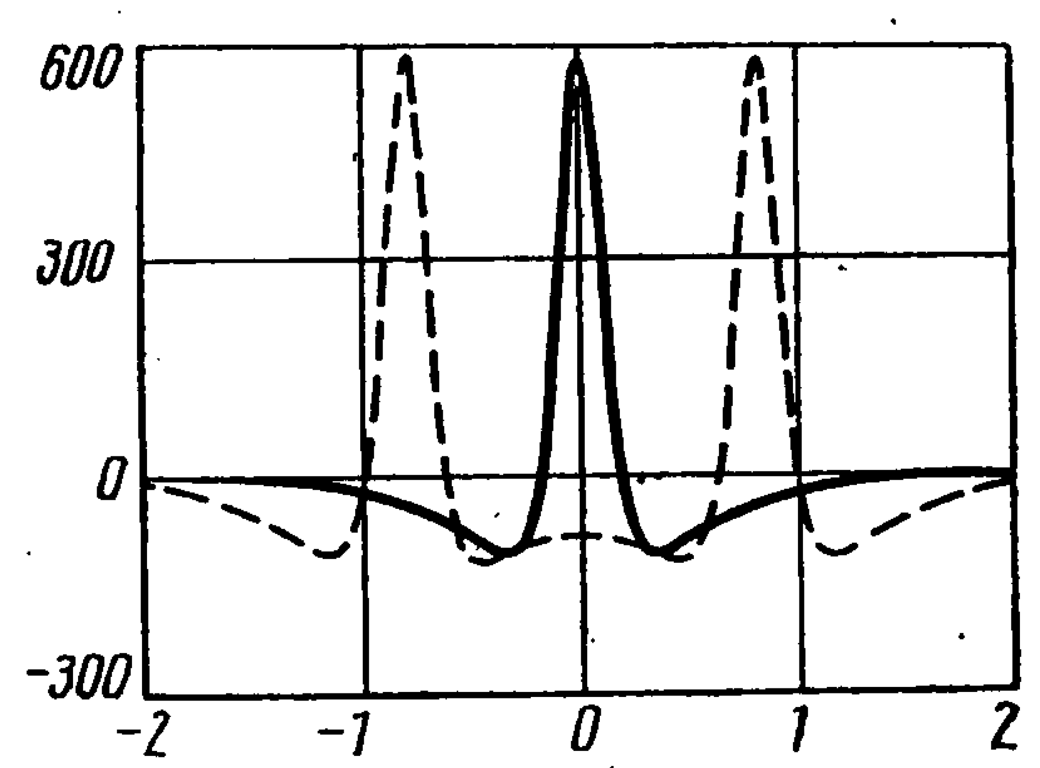
$$v_{tt} - c^2 v_{xx} + \Omega^2 v - \frac{1}{3}\beta v_{ttxx} = [v_t v_x (\Omega + v_x)^{-1}]_t + \frac{1}{2}\Omega[(v_t)^2(\Omega + v_x)^{-2}]_x \quad (4.1)$$

Для стационарных волн это уравнение принимает вид [2]

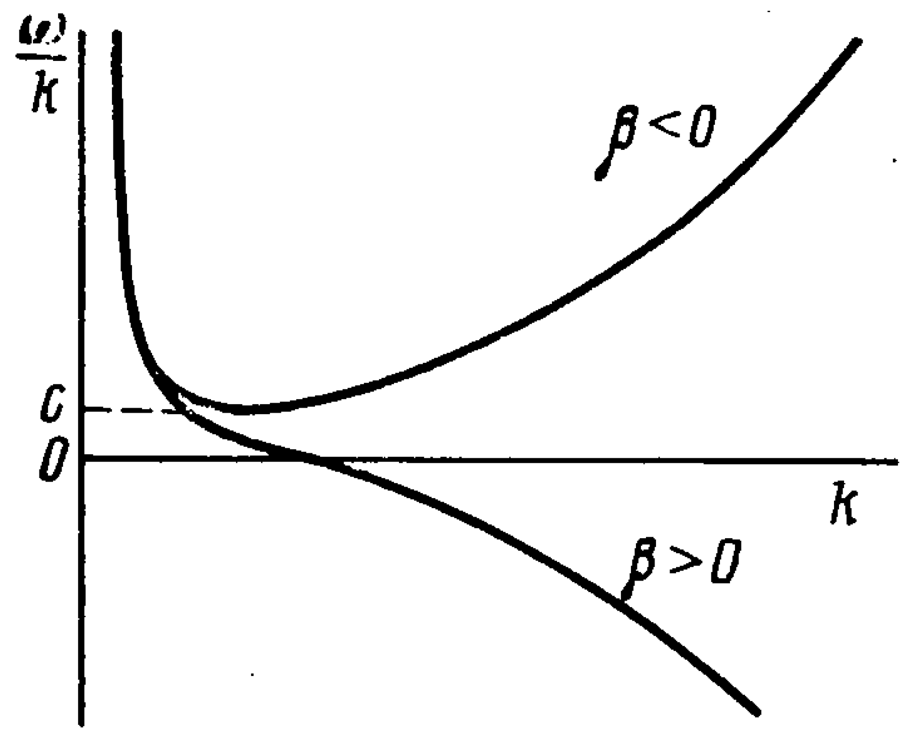
$$[Qw''' - Pw' + (3/2 + w')(w')^2(1 + w')^{-2}]' = Rw \quad (4.2)$$

$$w = v/\Omega, \quad Q = \beta/3, \quad P = 1 - c^2/V^2, \quad R = \Omega^2/V^2$$

где штрих по-прежнему означает дифференцирование по $\xi = x - Vt$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Это уравнение обладает первым интегралом:

$$H^\circ = 1/2Q^{-1}\,\{Rw^2 + Q\,(w'')^2 - 2Qw'w''' + (w')^2\,[(1 + w')^{-2} + P - 1]\} \qquad (4.3)$$

Прежде всего отметим, что, как следует непосредственно из уравнения (4.2), оно не может иметь решений типа ударных волн (кинков). Действительно, на таких решениях левая часть этого уравнения (а значит и w) обращается в нуль при $|\xi| \to\infty$. Теперь покажем, что при $RQ > 0$ гладких солитонных решений импульсного типа с нулевыми асимптотиками на бесконечности тоже быть не может. В самом деле, на таких решениях, как видно из (4.3), $H^\circ = 0$. Если предположить, что гладкое солитонное решение существует, то в точках экстремума должно выполняться равенство $w' = 0$, но тогда из (4.3) получим, что в указанных точках $Rw^2 + Q\,(w'')^2 = 0$. А это значит, что в точках экстремума $w = w'' = 0$. Другими словами, решение должно быть тривиальным: $w\,(\xi) \equiv 0$.

Физическая трактовка отсутствия солитонов для уравнения (4.2) с $RQ > 0$ является снова следствием того факта, что линейные возмущения в рамках уравнения (4.1) могут иметь любые фазовые скорости в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$.

5. Заключение. Помимо рассмотренных здесь уравнений существуют другие родственные уравнения, обладающие сходными свойствами, у которых наличие или отсутствие солитонных решений определяется соотношением коэффициентов, характеризующих низко- и высокочастотную дисперсию. Не для всех из этих уравнений удается дать строгое математическое доказательство «антисолитонной» теоремы, однако физические соображения, приведенные в разд. 3, обычно применимы и к этим уравнениям. В качестве примера рассмотрим уравнение, описывающее нелинейные внутренние волны во вращающемся глубоком океане [9]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\eta}{\partial t} + c\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + \alpha\eta\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + \delta\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\mathrm{H}\eta\right) = \gamma\eta$$

$$\mathrm{H}\eta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta\,(\zeta, t)}{x-\zeta}\,d\zeta \qquad (5.1)$$

(интеграл следует понимать в смысле главного значения).

При отыскании стационарных решений данное уравнение удобно представить в виде системы, аналогичной (2.1):

$$(\mathrm{H}u)' = -\frac{1}{2}\,u^2 + au + bv, \quad v'' = u$$

$$u = \alpha\eta/\delta, \quad a = (V - c)/\delta, \quad b = \gamma/\delta \qquad (5.2)$$

(штрих означает дифференцирование по $\xi = x - Vt$). У системы (5.2) есть первый интеграл

$$H^\circ = \int\limits_{-\infty}^{\xi} u'\,(\mathrm{H}u)'\,d\xi + \frac{1}{2}\,b\,(v')^2 + \frac{1}{6}\,u^3 - \frac{1}{2}\,au^2 - buv \qquad (5.3)$$

Однако использовать этот интеграл для доказательства отсутствия солитонных решений у системы (5.2) в духе проведенного в разд. 2 здесь не удается из-за того, что первое интегральное слагаемое в правой части равенства (5.3) не определено по знаку. Физические же соображения, основанные на анализе вида дисперсионной кривой $\omega = ck + \gamma/k - \delta k^2$, говорят о том, что при $b = \gamma/\delta > 0$ (ситуация, характерная для внутренних волн в океане) солитонных решений здесь также не должно быть.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Островский Л. А.* Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // Океанология. 1978. Т. 18. N. 2. С. 181—191.
2. *Островский Л. А., Степанянц Ю. А.* Нелинейные поверхностные и внутренние волны во вращающейся жидкости // Нелинейные волны. М.: Наука, 1991.
3. *Leonov A. I.* The effect of Earth rotation on the propagation of weak nonlinear surface and internal long oceanic waves // Annals New York Acad. Sci. 1981. V. 373. P. 150—159.
4. *Шрира В. И.* Распространение длинных нелинейных волн в слое вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1981. Т. 17. N 1. С. 76—81.
5. *Шрира В. И.* О длинных существенно нелинейных волнах во вращающемся океане // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. N. 4. С. 395—405.
6. *Петвиашвили В. И., Похотелов О. А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989. 199 с.
7. *Козлов В. А., Литвак А. Г., Суворов Е. В.* Солитоны огибающих релятивистских сильных электромагнитных волн // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. Вып. 1. С. 148—157.
8. *Bogomolov Ya. L., Kol'chugina I. A., Litvak A. G., Sergeev A. M.* Near-sonic Langmuir solitons // Phys. Lett. 1982. V. 94A. N. 9. P. 447—450.
9. *Grimshaw R.* Evolution equations for weakly nonlinear long internal waves in a rotating fluid // Stud. Appl. Math. 1985. V. 73. Pt. 1. P. 1—33.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
24.VIII.1990

УДК 533.6.01 : 534

В. А. Поздеев

МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВРЕМЕНИ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

При помощи нового метода решения краевых задач с подвижными границами для линейного волнового уравнения [1—3] получено решение краевой задачи с заданием граничных условий трех типов [4].

Ранее [5] был разработан наиболее общий метод решения задач теории теплопроводности, диффузии и волновых процессов при наличии движущихся границ, где использовано разложение по мгновенным собственным частотам. Однако практическая реализация этого метода очень трудоемка.

1. Математическая постановка краевой задачи. Рассмотрим [5] краевую нестационарную задачу излучения осесимметричных волн, вызванных некоторыми физическими процессами, происходящими на движущейся поверхности. Требуется найти функцию потенциала φ, удовлетворяющую линейному волновому уравнению при наличии симметрии по пространственной координате r:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \tag{1.1}$$

где $m = 0, 1, 2$; t — время; c_0 — скорость распространения возмущений. Начальные условия в области изменения координаты $r \geqslant R_0$ полагаем нулевыми

$$\varphi\,|_{t=0} = \partial\varphi/\partial t\,|_{t=0} = 0 \tag{1.2}$$

Кроме того, полагаем, что искомая функция φ удовлетворяет условию излучения, согласно которому решение уравнения (1.1) содержит лишь убегающие волны. Решение уравнения (1.1) при учете начальных условий (1.2) и условия излучения имеет вид

$$\varphi\,(r, t) = f\,(t^\circ)\, r^{-m/2}, \quad t^\circ = t - (r - R_0)/c_0 \tag{1.3}$$

где t° — волновой аргумент. Заметим, что решение (1.3) при $m = 1$ является приближенным, справедливым [6] при достаточно больших значениях координаты r. Более тщательный анализ дает условие применимости решения вида (1.3) при $m = 1$: $c_0t/R_0 \ll 1$.