

УДК 531.36

© 1991 г.

С. Г. Артышев

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ  
ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Изучается плоское движение материальной точки под действием силы, обратно пропорциональной расстоянию до неподвижного центра переменной массы. Рассматривается случай, при котором движение тела можно интегрировать с использованием специально полученного первого интеграла.

1. Уравнение движения частицы единичной массы в поле логарифмического потенциала имеет вид

$$z'' + f(t)/\bar{z} = 0 \quad (1.1)$$

где  $z(t) = x(t) + iy(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$  — комплексная координата частицы на плоскости,  $t$  — время,  $x(t)$ ,  $y(t)$  — декартовы координаты частицы,  $r(t)$ ,  $\varphi(t)$  — полярные координаты,  $f(t)$  — действительная функция времени, черта означает комплексное сопряжение. Если  $f(t) > 0$ , то частица притягивается к силовому центру, расположенному в начале координат; если  $f(t) < 0$  — отталкивается. Полная энергия

$$E(t) = (x^2 + y^2)/2 + f(t) \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

не сохраняется, а момент импульса

$$M = i(z\bar{z}' - \bar{z}z')/2 = r^2\varphi' \quad (1.2)$$

есть интеграл движения.

Изучим случай, когда  $p(t) = 1/f(t)$  — многочлен второй степени относительно времени

$$p(t) = at^2 + bt + c$$

где  $a, b, c$  — действительные постоянные. При помощи известного метода [1] для уравнения (1.1) найден функционально независимый от (1.2) интеграл движения

$$I = pz\bar{z}' - p'(\bar{z}z' + z\bar{z}')/2 + p''z\bar{z}/2 + \ln(z\bar{z}/|p|) \quad (1.3)$$

После перехода к полярным координатам интеграл движения (1.3) запишем в виде

$$I = p(r^2 + M^2/r^2) - p'rr' + p''r^2/2 + \ln(r^2/|p|)$$

Если вместо неизвестной функции  $r(t)$  ввести функцию  $u(t) = r^2(t)/p(t)$ , то приходим к уравнению

$$p^2u'^2 = -4u \ln|u| + 4Iu + Du^2 - 4M^2$$

где  $D = b^2 - 4ac$  — дискриминант многочлена  $p(t)$ .

Представим постоянную  $I$  в виде  $I = \ln j$ ,  $j > 0$ , а также обозначим  $v = u/j$ ,  $q = j^{1/2}p/2$ ,  $\mu = M/j^{1/2}$ ,  $\delta = ja/4$ ,  $\alpha = aj^{1/2}/2$ ,  $\beta = bj^{1/2}/2$ ,  $\gamma = cj^{1/2}/2$ . Введем модифицированное время

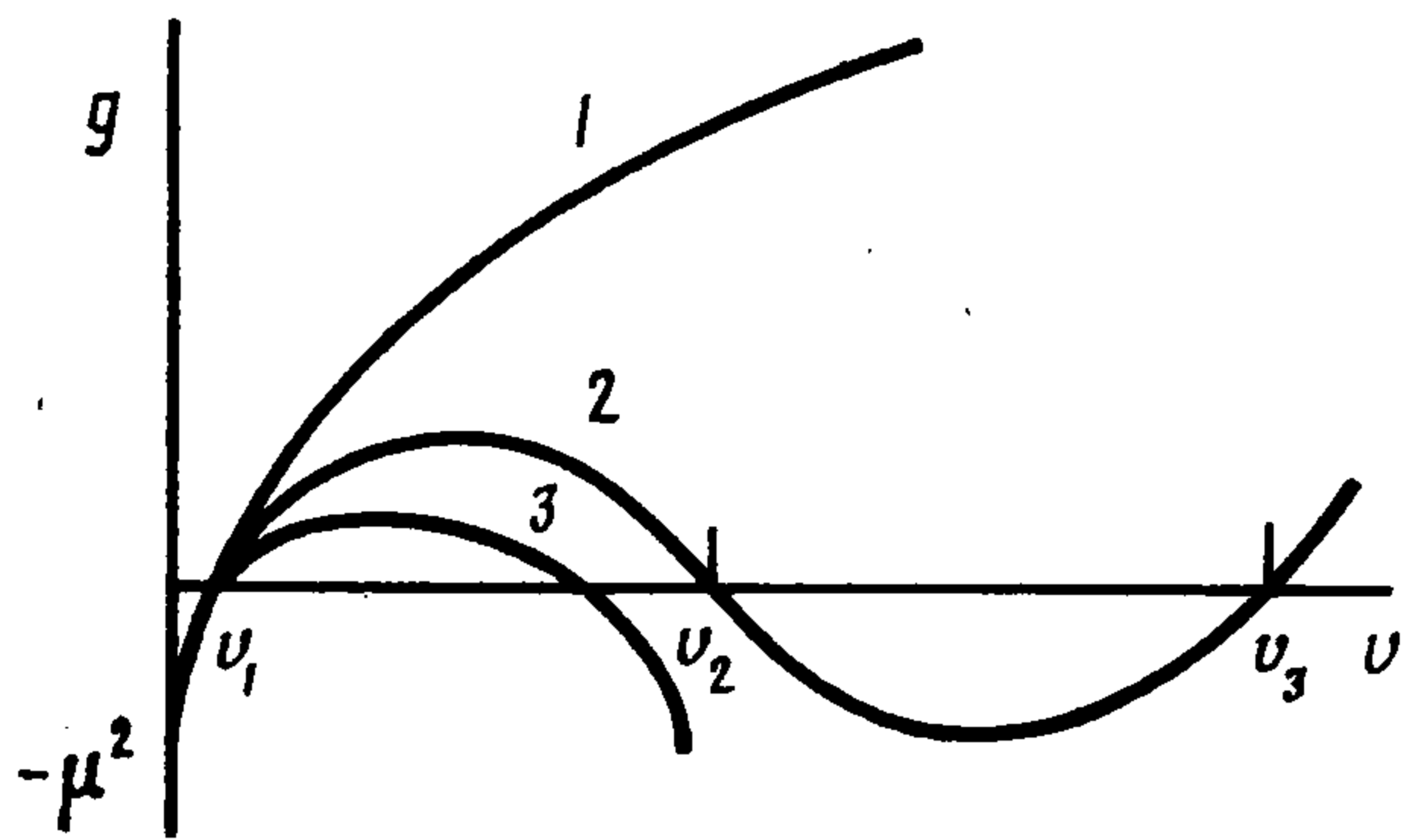
$$\tau = \int_{t_0}^t \frac{d\xi}{q(\xi)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \left| \ln \frac{(s - \sqrt{\delta})(s_0 + \sqrt{\delta})}{(s + \sqrt{\delta})(s_0 - \sqrt{\delta})} \right|, & \alpha \neq 0, \delta > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-\delta}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{s}{\sqrt{-\delta}} - \operatorname{arctg} \frac{s_0}{\sqrt{-\delta}} \right], & \delta < 0 \\ 2/s_0 - 2/s, & \alpha \neq 0, \delta = 0 \\ \beta^{-1} \ln |(\beta t + \gamma)/(\beta t_0 + \gamma)|, & \alpha = 0, \beta \neq 0 \\ (t - t_0)/\gamma, & \alpha = 0, \beta = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

$$(s = 2\alpha t + \beta, s_0 = 2\alpha t_0 + \beta)$$

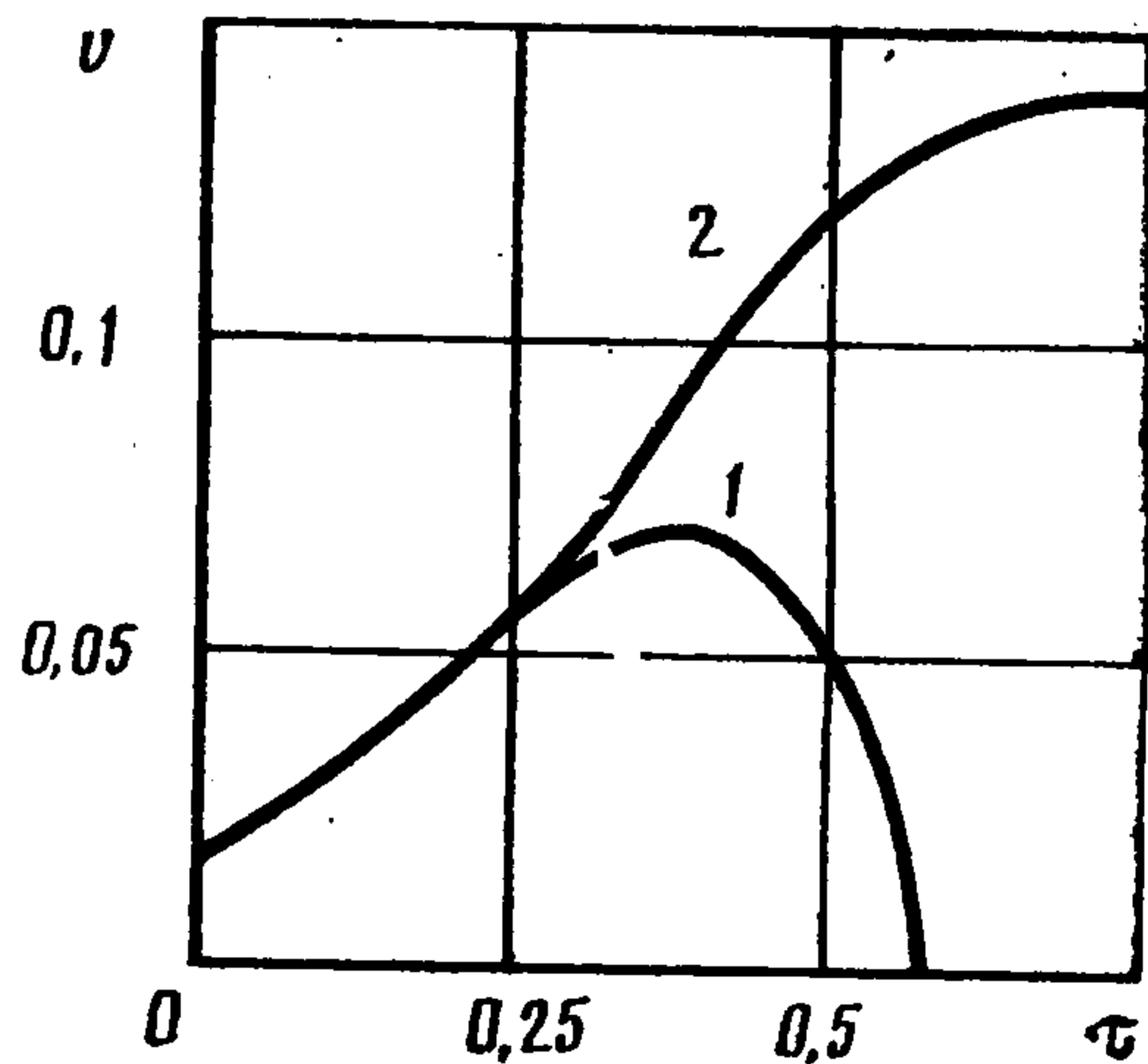
где  $t_0$  — начальный момент. Так как  $d\tau/dt = 2/(p\sqrt{j})$ , то интегралы движения (1.2) и (1.3) принимают соответственно вид

$$d\varphi/d\tau = 1/2\mu/v \quad (1.5)$$

$$(dv/d\tau)^2 = -v \ln|v| + \delta v^2 - \mu^2 \quad (1.6)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Характер решения уравнения (1.6) определяется видом графика функции  $g(v) = -v \ln |v| + \delta v^2 - \mu^2$  (фиг. 1), начальным значением  $v_0 = v(0)$  и выбором знака начальной скорости  $dv(0)/d\tau$ . Ограничимся случаем, когда при всех  $t \geq t_0$  полином  $p(t) > 0$ . Тогда интерес представляют только точки области  $v \geq 0$ , в которых  $g(v) \geq 0$ . При  $\delta \geq 1/2$  функция  $g(v)$  имеет лишь один корень  $v_1$  (кривая 1 на фиг. 1). Координата  $v(\tau)$  частицы уходит на  $+\infty$  при возрастании  $\tau$ . Если начальная скорость отрицательна, то уходу на  $+\infty$  предшествует остановка и поворот частицы в точке  $v = v_1$ . Когда  $0 < \delta < 1/2$ , у функции  $g(v)$  появляются локальные максимум и минимум (кривая 2 на фиг. 1) и в зависимости от величины  $\mu^2$  она либо один раз обращается в нуль (характер движения при этом будет такой же, как выше), либо два раза, либо три. В случае двух корней один из них ( $w$ ) имеет кратность два:  $g(w) = g'(w) = 0$  и поэтому он является точным стационарным относительно модифицированного времени  $\tau$  решением уравнения (1.6). Соответствующее решение исходного уравнения (1.1) есть спираль вида

$$r^2(t) = jp(t)w, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + 1/2\mu/w \tau(t), \quad t \geq t_0 \quad (2.1)$$

где  $\varphi_0$  — начальный угол. Если  $w = v_1 = v_2 < v_3$ , то решение (2.1) устойчивое; если  $v_2 = v_3 = w > v_1$  — неустойчивое, и при стремлении  $v(\tau) \rightarrow w$  частица в масштабе модифицированного времени совершает лимитационное движение. В случае трех различных корней  $v_1 < v_2 < v_3$  (кривая 2 на фиг. 1) частица может совершать инфинитное движение в области  $v \geq v_3$  и периодическое движение в интервале, ограниченном корнями  $v_1$  и  $v_2$ . При этом две спирали, задаваемые формулами (2.1), в которых соответственно  $w = v_1$  и  $w = v_2$ , могут рассматриваться как две границы, между которыми расположена истинная траектория.

Когда  $\delta \leq 0$ , функция  $g(v)$  в зависимости от  $\mu^2$  имеет либо ни одного, либо один, либо два корня (кривая 3 на фиг. 1). Частица может совершать в масштабе модифицированного времени  $\tau$  только периодическое движение в интервале, ограниченном двумя корнями. Оно переходит в устойчивую спиральную траекторию, когда два корня  $v_1$  и  $v_2$  сливаются. В частности, при  $\delta = 0$ ,  $\mu^2 = 1/e$  имеем траекторию, описываемую формулами (2.1), в которых  $w = 1/e$ , где  $e$  — основание натурального логарифма.

Неограниченному интервалу  $[t_0, \infty)$  первоначального времени  $t$  может отвечать, согласно выражению (1.4), ограниченный промежуток  $[0, \tau_1)$  модифицированного времени  $\tau$ . Например, при  $\delta < 0$ ,  $\alpha > 0$  получаем

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{-\delta}} \left( \pi - 2 \arctg \frac{s_0}{\sqrt{-\delta}} \right) \quad (2.2)$$

Решение уравнения

$$\tau_1 = \int_{v_0}^w \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi \ln |\xi| + \delta \xi^2 - \mu^2}}$$

относительно  $w$  определяет при помощи выражений (2.1) спиральную кривую, к которой с ростом времени стремится реальная траектория частицы. В случаях, когда время  $\tau_1$  конечно, целесообразно находить аналитическое решение нелинейного уравнения в виде ряда Маклорена по методу работы [2]. Применение его к уравнению (1.6) дает разложение

$$v(\tau) = v_0 + s_1 + s_2 + \dots$$

Приведем полученные выражения для семи первых членов:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= A\tau, \quad A = (-v_0 \ln |v_0| + \delta v_0^2 - \mu^2)^{1/2} \\
 s_2 &= h_0 \tau^2 / 2!, \quad h_0 = (2\delta v_0 - 1 - \ln |v_0|) / 2 \\
 s_3 &= A h_1 \tau^3 / 3!, \quad h_1 = (2\delta - 1/v_0) / 2 \\
 s_4 &= (h_0 h_1 + A^2 h_2) \tau^4 / 4!, \quad h_2 = 1/2v_0^2 \\
 s_5 &= (A^3 h_3 + A (h_1^2 + h_0 h_2)) \tau^5 / 5!, \quad h_3 = -1/v_0^3 \\
 s_6 &= [A^4 h_4 + A^2 (6h_0 h_3 + 5h_1 h_2) + 3h_0^2 h_2 + h_0 h_1^2] \tau^6 / 6!, \quad h_4 = 3/v_0^4 \\
 s_7 &= [A^5 h_5 + A^3 (h_0 h_4 + 11h_1 h_3 + 5h_2^2) + A (15h_0 (h_0 h_3 + h_1 h_2) + \\
 &\quad + h_1^2 h_2 + h_1^3)] \tau^7 / 7!, \quad h_5 = -12/v_0^5
 \end{aligned}$$

На фиг. 2 приводятся результаты решения уравнения (1.6) при  $\delta = -11,700$ ;  $\mu = 0,064$ ;  $v_0 = 0,018$ ;  $v_1 = 0,016$ ;  $v_2 = 0,132$ . Кривая 1 соответствует вычислению по формуле  $v(\tau) = v_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_7$ , а кривая 2 показывает результат счета с шагом  $H = 0,001$  по алгоритму работы [3]. Особенность этого алгоритма, который дает высокую точность, состоит в том, что он позволяет в процессе счета сохранить значение первого интеграла (1.3) уравнения движения. В рассматриваемом примере до времени  $\tau < 0,3$  результаты практически совпадают. Так как  $\delta = -11,7 < 0$ , то, согласно (1.4), (2.2) при измерении реального времени от  $t_0 = -\infty$  до  $+\infty$  модифицированное время изменяется на величину  $\tau_1 = 2\pi/\sqrt{|\delta|} \simeq 1,8$ . Поэтому приведенные выше аналитические формулы, дающие приближенное решение, могут оказаться применимыми на большом интервале реального времени.

Отметим, что в частном случае  $D = b^2 - 4ac = 0$  приходим к результату И. В. Мещерского.

Автор благодарит Д. В. Краснова за помощь в проведении вычислений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Артышев С. Г. Об инвариантах одного линейного дифференциального уравнения // Математическое моделирование задач механики сплошной среды. М.: Энергоатомиздат, 1989, С. 3—6.
2. Adomian G. Convergent series solution of nonlinear equations // J. Comp. and Appl. Math. 1984. V. 11. No. 2. P. 225—230.
3. Chao Yu. Qin. An explicit energy-conserving numerical method for equations of the form  $d^2x/dt^2 = f(x)$  // J. Comp. Phys. 1988. V. 79. No. 2. P. 473—476.

Москва

Поступила в редакцию  
13.III.1990

УДК 532.5,515.466

© 1991 г.

В. М. Галкин, Ю. А. Степанянц

#### О СУЩЕСТВОВАНИИ СТАЦИОНАРНЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Дается математическое доказательство отсутствия стационарных решений солитонного типа у ряда уравнений, родственных уравнению Л. А. Островского, которое, в частности, описывает поверхностные и внутренние волны во вращающейся жидкости. Предлагается физическая интерпретация этого факта. Показано, что при ином характере высокочастотной дисперсии, соответствующей, например, капиллярным волнам на мелкой вращающейся жидкости, условия теоремы не выполняются, в результате чего снимается запрет на существование солитонов. При помощи численных расчетов построены в этом случае как одиночные солитоны, так и стационарные образования из них — мультисолитоны.

1. Постановка задачи. Рассмотрим класс нелинейных волновых уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + c \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial \eta^p}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right) = \gamma \eta \quad (1.1)$$