УДК 539.374

В. М. Садовский

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЛ

Приводятся результаты исследования вариационных неравенств, возникающих в динамических задачах теории упруго-идеальнопластического течения Прандтля — Рейсса. Для неравенства общего вида формулируется понятие обобщенного решения, на основе которого выписана полная система соотношений сильного разрыва. Получены априорные оценки, позволяющие доказать единственность и непрерывную зависимость «в малом» по времени решений задачи Коши и начально-краевых задач с диссипативными граничными условиями, а также оценки близости решений вариационного неравенства и системы уравнений с малым параметром, описывающей упруго-вязкопластическое деформирование тел. На примере задачи о распространении плоских волн в упругопластическом полупространстве с начальными напряжениями иллюстрируется отличие разрывных решений в теории течения с условием пластичности Мизеса и условием Треска — Сен-Венана.

1. Гиперболические вариационные неравенства. В геометрически линейном приближении модель упругопластического тела Прандтля — Рейсса составляют уравнения движения, закон Гука и определяющие соотношения необратимого деформирования, которые могут быть записаны в виде принципа максимума скорости диссипации энергии [1]:

$$\rho v_{i,t} = \sigma_{ij,j}, \quad e_{ij}^0 = a_{ijkl}\sigma_{kl,t} \tag{1.1}$$

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})\, e_{ij}^p \leqslant 0 \tag{1.2}$$

$$1/_2\,(v_{i,j} + v_{j,i}) = e_{ij}^0 + e_{ij}^p$$

Здесь ρ — плотность; v_i — вектор скорости в декартовой системе координат x_1, x_2, x_3; a_{ijkl} — тензор модулей упругой податливости, обладающий симметрией и свойством положительной определенности; e_{ij}^0, e_{ij}^p — упругие и пластические составляющие тензора скоростей деформации.

Принцип максимума (1.2) выполняется для произвольной вариации тензора напряжений σ_{ij}, подчиненной ограничению

$$f(\sigma_{ij}^*) \leqslant 1 \tag{1.3}$$

где f — выпуклая функция текучести материала.

Система соотношений (1.1), (1.2) эквивалентна неравенству

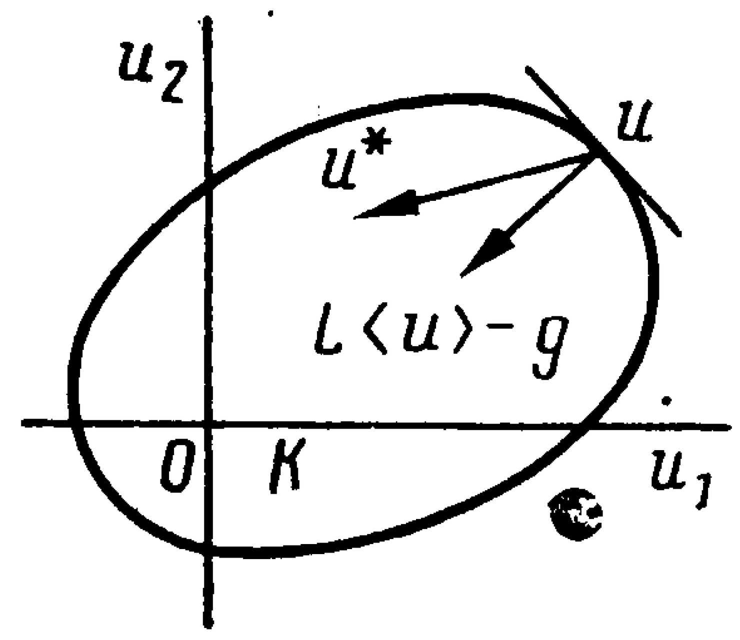
$$(v_i^* - v_i)(\rho v_{i,t} - \sigma_{ij,j}) + (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij})(a_{ijkl}\sigma_{kl,t} - v_{i,j}) \geqslant 0 \tag{1.4}$$

в котором вариация вектора скорости произвольна.

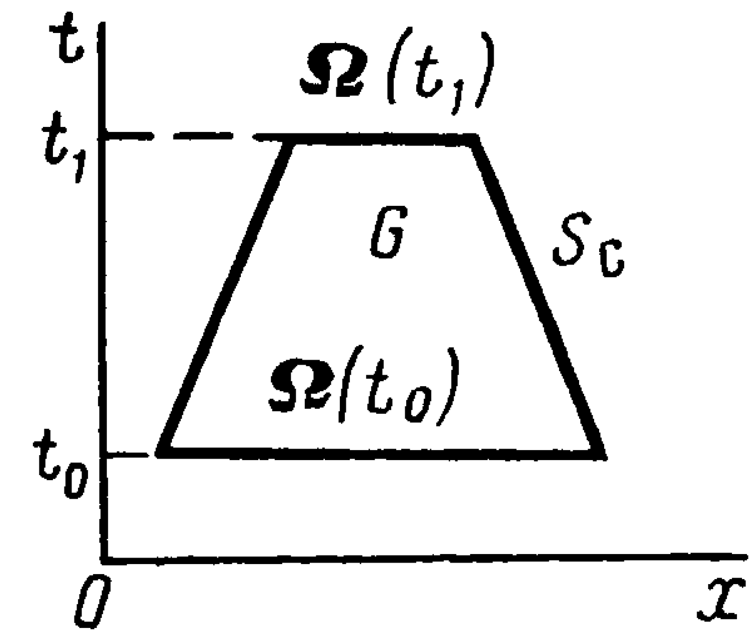
Подобную формулировку допускают некоторые частные модели динамического деформирования, основанные на теории течения, например, модели упругопластических пластин и оболочек типа Тимошенко. Вариационное неравенство наиболее общего вида может быть записано в матричной форме:

$$(u^* - u)(L\langle u\rangle - g) \geqslant 0, \quad u,\ u^* \in K \tag{1.5}$$

$$L\langle u\rangle = Au_{,t} - \sum_{s=1}^{n} B^s u_{,s} - Qu$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь $g = g\,(t, x)$ — заданная в области решения задачи $G \subset R^{n+1}\,(t, x)$ m — мерная вектор-функция, $A = A\,(t, x)$ и $B^s = B^s\,(t, x)$ — симметричные $(m \times m)$-матрицы, причем матрица A строго положительно определена, $Q = Q\,(t, x)$ — $(m \times m)$-матрица, $K = K\,(t, x)$ — выпуклое замкнутое множество допустимых состояний, u^* — произвольный элемент K. Дифференциальный оператор L является гиперболическим по Фридрихсу [2].

Для модели Прандтля — Рейсса вектор неизвестных функций $u = u\,(t, x)$ составляют скорости и напряжения, симметричные матрицы A и B^s содержат коэффициенты, входящие в неравенство (1.4) при производных по времени и координатам. Вектор g и матрица Q равны нулю, а множество K определяется ограничением (1.3).

На фиг. 1 приведена геометрическая интерпретация вариационного неравенства в пространстве $R^m\,(u)$. В силу неравенства (1.5) угол между вектором $L\langle u\rangle - g$ и произвольной допустимой вариацией решения является острым, поэтому

$$L\langle u\rangle - g = 0 \tag{1.6}$$

если u — внутренняя точка множества K, и вектор $L\langle u\rangle - g$ направлен по внутренней нормали к границе K, если u — граничная точка. В случае гладкой границы неравенство (1.5) эквивалентно системе уравнений

$$L\langle u\rangle = g - \gamma\partial f/\partial u,\ f \leqslant 1 \tag{1.7}$$

в которой $f\,(t, x, u) = \min\,\{r > 0\colon u\,/\,r \in K\}$ — выпуклая и положительно-однородная по u функция Минковского множества K, $\gamma = \gamma\,(t, x)$ — неотрицательный множитель, равный нулю при $f\,(u) < 1$. При $f\,(u) = 1$ множитель γ может быть найден из (1.7) с учетом теоремы Эйлера для однородных функций

$$\gamma = u\,(g - L\langle u\rangle) \tag{1.8}$$

Для модели (1.1)—(1.3) система квазилинейных уравнений (1.7), (1.8) представляет собой формулировку соотношений динамического деформирования на основе ассоциированного закона течения.

2. Обобщенные решения. При условии достаточной гладкости матриц — коэффициентов оператора L для всякого непрерывно-дифференцируемого решения вариационного неравенства (1.5) в области G выполнено неравенство

$$u^*L\langle u\rangle \geqslant \frac{1}{2}(uAu)_{,t} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(uB^s u)_{,s} - uRu + (u^* - u)\,g \tag{2.1}$$

$$2R = 2Q^0 + A_{,t} - \sum_{s=1}^{n} B^s_{,s},\ 2Q^0 = Q + Q'$$

где R — симметричная матрица, штрих означает операцию транспонирования. Умножение обеих частей (2.1) на неотрицательную финитную в G

функцию $\chi = \chi(t, x) \in C^\infty(G)$ и последующее интегрирование по области G с применением формулы Грина дают

$$\iint\limits_G (u^* - u/2)\left\{-(\chi A)_{,t} + \sum_{s=1}^{n} (\chi B^s)_{,s} - 2\chi Q^0\right\} u\, d\omega_x\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \iint\limits_G \{uL\langle u^*\rangle + (u^* - u)\, g\}\, \chi d\omega_x\, dt \tag{2.2}$$

В свою очередь из неравенства (2.2) путем преобразования интегралов в обратном порядке можно с учетом произвольности χ получить неравенства (2.1) и (1.5).

Интегральное неравенство (2.2) естественным образом определяет класс обобщенных решений (1.5), содержащий негладкие функции. В частности, в этот класс входят все пределы сходящихся по норме пространства $L^2(G)$ последовательностей классических решений. Данное утверждение доказывается предельным переходом в неравенстве (2.2), записанном для элементов одной последовательности.

Пусть далее $u = u(t, x)$ — обобщенное решение с сильным разрывом, удовлетворяющее неравенству (2.2) при всевозможных допустимых $u^* \in C^1(G)$ и непрерывно-дифференцируемое в области G, за исключением гиперповерхности S_0, на которой оно имеет разрыв первого рода. Гиперповерхность S_0 делит G на две подобласти G^+ и G^-. Преобразование входящих в (2.2) интегралов по каждой из этих подобластей позволяет получить

$$\int\limits_{S_0} [(u^* - u)\, Du]\, \chi\, d\sigma/\sqrt{1 + c^2} + \iint\limits_G (u^* - u)(L\langle u\rangle - g)\, \chi\, d\omega_x\, dt \geqslant 0 \tag{2.3}$$

$$D(t, x, c, \nu) = cA + \sum_{s=1}^{n} \nu_s B^s$$

Здесь квадратные скобки означают скачок функции на разрыве, ν_s — вектор нормали к фронту сильного разрыва, представляющему собой сечение S_0 гиперплоскостью $t = \text{const}$, $c \geqslant 0$ — скорость распространения фронта в направлении нормали. Единичный $(n + 1)$-мерный вектор $(-c, \nu) / \sqrt{1 + c^2}$ является внешней по отношению к G^+ нормалью к S_0.

Из неравенства (2.3) вытекает условие, выполненное в точках S_0, которое в силу симметрии матрицы D можно представить в виде

$$(u^* - u^0)\, D\,[u] \geqslant 0,\quad u^*,\ u^\pm \in K,\quad u^0 = (u^+ + u^-)/2 \tag{2.4}$$

где $u^\pm$ — односторонние пределы решения на S_0.

Условие (2.4) имеет геометрическую интерпретацию, аналогичную интерпретации вариационного неравенства (1.5). Если середина отрезка $[u^+, u^-] \subset K$ лежит строго внутри K, то $D\,[u] = 0$. Если же u^0 — граничная точка, что в силу выпуклости K возможно только когда весь отрезок принадлежит границе, то направление вектора $D\,[u]$ совпадает с направлением ее внутренней нормали. В случае гладкой границы K имеет место равенство

$$D\,[u] = -\gamma_0 \partial f(u^0) / \partial u \tag{2.5}$$

$$\gamma_0 = \begin{cases} 0, & f(u^0) < 1 \\ -[uDu]/2 \geqslant 0, & f(u^0) = 1 \end{cases}$$

Проблема построения разрывных решений в теории упругопластического течения Прандтля — Рейсса впервые рассматривалась Манделем [3], сделавшим ошибочный вывод о неоднозначности описания поверхностей разрыва скоростей и напряжений в рамках этой теории. Полная система уравнений сильного разрыва для моделей упруго-идеальнопластического деформирования и деформирования с учетом линейного изотропного и трансляционного упрочнения была выписана [4] исходя из соображения о максимальной диссипации энергии при переходе через разрыв. Матричная форма этой системы для упруго-идеальнопластических сред совпадает с (2.5).

В работе [5] была показана невозможность обобщения квазилинейных уравнений Прандтля — Рейсса в виде полной системы интегральных законов сохранения. Таким образом, не удается получить соотношения на разрыве из (1.7), (1.8) аналогично моделям идеальных сред [6]. Формулировка (1.5) дает решение проблемы без привлечения каких-либо дополнительных соображений.

3. Априорные оценки решений. Пусть u и u' — два достаточно гладких решения вариационного неравенства (1.5), отвечающие различным непрерывным правым частям g и g'. Полагая $u^* = u'$ в (1.5) и $u^* = u$ в неравенстве, записанном для решения u', можно установить, что

$$(u' - u)\,(L\,\langle u' - u\rangle - g' + g) \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Для получения априорных оценок, аналогичных оценкам решений систем линейных гиперболических уравнений, строится специальная область типа усеченного конуса $G = \{(t,\ x)\colon\ t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ x \in \Omega\ (t)\}$, коническая поверхность которой S_c: $\varphi\,(t,\ x) = 0$ (фиг. 2) удовлетворяет условию Гамильтона — Якоби

$$\varphi_{,t} + H\ (t,\ x,\ \partial\varphi/\partial x) \geqslant 0 \tag{3.2}$$

где $c = H\ (t,\ x,\ \nu)$ — наименьший из m действительных корней характеристического уравнения для оператора L: $\det D\ (c,\ \nu) = 0$. Процедура построения таких областей описана, например, в [2].

Интегрирование неравенства (3.1) по области G дает

$$\begin{gathered}-\int\limits_S (u' - u)\, D\,(u' - u)\, d\sigma/\sqrt{1 + c^2} \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_G (u' - u)\,\{R\,(u' - u) + g' - g\}\, d\omega_x\, dt\end{gathered} \tag{3.3}$$

где S — граница G, а входящие в выражение для матрицы D коэффициенты c и ν_s имеют прежний смысл, но по отношению к гиперповерхности S. Условие (3.2) обеспечивает выполнение в точках S_c условия неположительной определенности матрицы D $(c,\ \nu)$, поэтому из (3.3) с учетом неравенства Коши — Буняковского следует

$$\begin{gathered}\|u' - u\|^2\,(t_1) \leqslant \|u' - u\|^2\,(t_0) + 2\alpha\int\limits_{t_0}^{t_1} \|u' - u\|^2\, dt + \\ + 2\beta\max_t \|g' - g\|\int\limits_{t_0}^{t_1} \|u' - u\|\, dt, \qquad \|u\|^2 = \int\limits_{\Omega(t)} uAu\, d\omega_x\end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $\|u\|$ — энергетическая норма, α и β — постоянные, зависящие от элементов матриц A и R.

Отсюда после стремления t_1, t_0 к промежуточному моменту времени t вытекает дифференциальное неравенство, позволяющее получить оценку

$$\begin{gathered}\|u' - u\|\,(t_1) \leqslant \|u' - u\|\,(t_0)\exp\{\alpha\,(t_1 - t_0)\} + \\ + \beta\int\limits_{t_0}^{t_1} \|g' - g\|\,(t)\exp\{\alpha\,(t_1 - t)\}\, dt\end{gathered} \tag{3.5}$$

На основании оценки (3.5) доказывается единственность в G и непрерывная зависимость от начальных данных и правой части решения задачи

Коши: $u|_{t=0} = u_0$. Из нее также следует ограниченность области зависимости (влияния) решений вариационного неравенства (1.5).

Подобная оценка может быть получена в окрестности неподвижной гиперповерхности S_u с заданными на ней диссипативными граничными условиями, выполнение которых для вектор-функций u и u' обеспечивает справедливость неравенства

$$(u' - u) \sum_{s=1}^{n} \nu_s B^s (u' - u) \leqslant 0 \tag{3.6}$$

где ν_s — внешняя по отношению к области решения задачи нормаль к S_u. В данном случае в качестве G достаточно взять часть усеченного конуса, отделяемую S_u.∎

Предположение о гладкости решений при выводе оценок можно ослабить. Пусть в G имеется гиперповерхность сильного разрыва решений S_0. Тогда в силу условия на разрыве (2.4), взятого при $u^* = (u')^0$, и аналогичного условия, в котором u и u' переставлены местами, справедливо неравенство

$$[(u' - u)\, D\, (u' - u)] \leqslant 0 \tag{3.7}$$

Интегрирование (3.1) с применением формулы Грина позволяет получить неравенство, отличающееся от (3.3) дополнительным слагаемым, подынтегральное выражение в котором совпадает с (3.7). Из этого неравенства снова вытекает (3.3) и далее (3.5).

Пусть $\pi(u) = \pi(t, x, u)$ — оператор проектирования на множество K в евклидовой метрике, u — гладкое решение вариационного неравенства (1.5), а u' — решение следующей системы полулинейных уравнений с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$L\langle u'\rangle = g - \{u' - \pi(u')\}/(2\varepsilon) \tag{3.8}$$

Согласно определению оператора проектирования

$$\{u^* - \pi(u')\}\{u' - \pi(u')\} \leqslant 0, \quad u^* \in K$$

Таким образом:

$$(u^* - u')(L\langle u'\rangle - g) \geqslant \| u' - \pi(u')\|_0^2/(2\varepsilon) \tag{3.9}$$

Интегрируя неравенство, полученное в результате сложения неравенства (3.9), взятого при $u^* = u$, и (1.5) при $u^* = \pi(u')$, по области типа усеченного конуса, можно установить, что

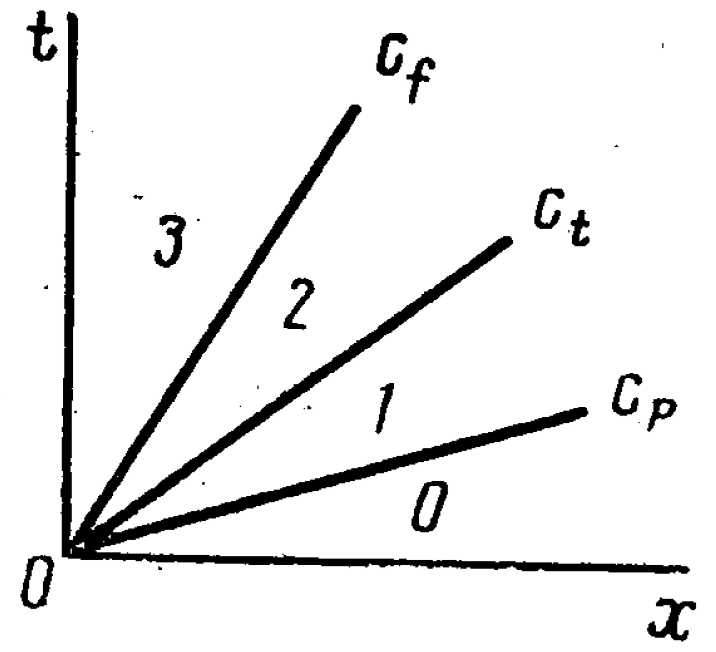
$$\exp(2\alpha t) d\, \{\| u' - u\|^2 \exp(-2\alpha\, t)\}/dt + \| u' - \pi(u')\|_0^2/\varepsilon \leqslant$$
$$\leqslant 2\, \| u' - \pi(u')\|_0\, \| L\langle u\rangle - g\|_0$$

где $\| u \|_0$ — норма пространства $L^2(G)$. Отсюда после применения ε-неравенства и интегрирования по t следует оценка

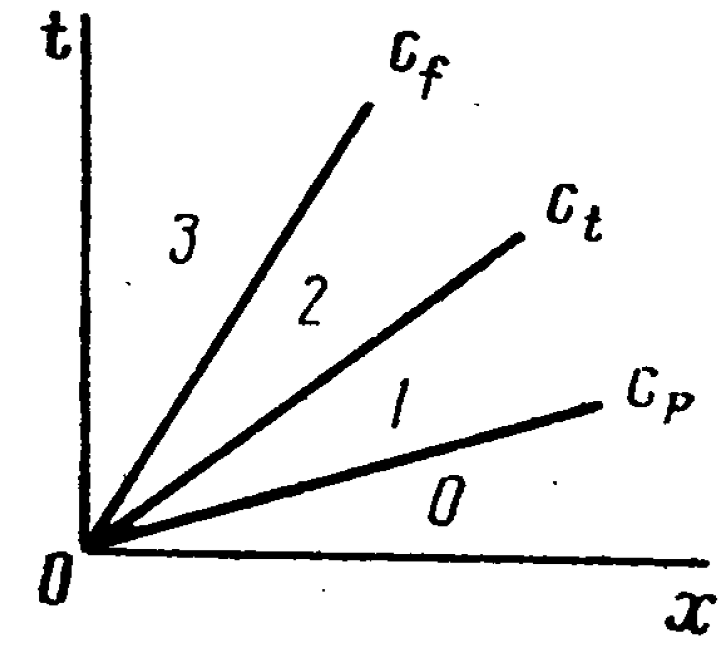
$$\| u' - u\|^2 (t_1) \leqslant \| u' - u\|^2 (t_0) \exp\{2\alpha(t_1 - t_0)\} +$$
$$+ \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \| L\langle u\rangle - g\|_0^2 (t) \exp\{2\alpha(t_1 - t)\}\, dt \tag{3.10}$$

которая показывает, что при одинаковых начальных данных норма разности решений (1.5) и (3.8) есть величина порядка $\sqrt{\varepsilon}$.

Вытекающее из (3.10) утверждение о сходимости при $\varepsilon \to 0$ решений системы уравнений (3.8) можно обобщить. Если $u'(t, x, \varepsilon)$ — семейство решений, сходящееся в $L^2(G)$ к вектор-функции $u(t, x)$ (не обязательно гладкой), то u — обобщенное решение вариационного неравенства (1.5).



Фиг. 3



Фиг. 4

Действительно, так как из (3.9) следует неравенство (1.5), то для u' как и для предельной функции, справедливо интегральное неравенство (2.2). Кроме этого, имеет место тождество

$$\iint\limits_G \{\pi(u') - u'\}\,\psi d\omega_x\,dt = 2\varepsilon \iint\limits_G (u'L'\langle\psi\rangle - g\psi)\,d\omega_x\,dt \qquad (3.11)$$

где L' — формально сопряженный с L оператор, $\psi = \psi(t, x)$ — финитная в G вектор-функция класса $C^1(G)$. Предельный переход в этом тождестве с учетом произвольности ψ дает: $u = \pi(u) \in K$.

Ранее были рассмотрены [1] вопросы разрешимости системы уравнений упруго-вязкопластического течения, т. е. системы (3.8) для модели (1.1)—(1.3), а также вопросы сходимости по параметру вязкости ε. Дано [6] обобщение теоремы существования в теории упругопластического течения, доказанной [1] при весьма ограничительных требованиях. Однако сформулированное в этих работах понятие обобщенного решения не допускает сильных разрывов.

Как отмечалось в ряде работ (например, [8]), под разрывным решением для модели Прандтля — Рейсса естественно понимать предел по параметру вязкости последовательности решений системы уравнений упруго-вязкопластического течения. Доказанное здесь утверждение устанавливает эквивалентность такого понятия с понятием обобщенного решения, сформулированным в разд. 2.

4. Упругопластические волны в полупространстве. В замкнутой форме строится разрывное решение задачи о распространении плоских волн напряжений, вызванных внезапным приложением постоянного нормального давления $p > 0$ к поверхности полупространства $x_1 \geqslant 0$, предварительно сжатого в поперечном направлении напряжением q. В данной задаче система координат совпадает с главными направлениями тензора напряжений. Необходимые для решения соотношения, связывающие скачки неизвестных функций на поверхностях разрыва, дает вариационное неравенство (2.4):

$$(\sigma_i^* - \sigma_i^\circ)\left\{\frac{\rho c^2}{2\mu}\left([\sigma_i] - \frac{3\lambda\sigma}{3\lambda + 2\mu}\right) - [\sigma_1]\,\delta_{i1}\right\} \geqslant 0 \qquad (4.1)$$

Здесь и ниже $\sigma = \sigma_i\delta_{ii}/3$ — среднее (гидростатическое) напряжение, δ_{ij} — символ Кронеккера; λ, μ и τ_s — параметры Ламе материала и предел текучести при чистом сдвиге.

В зависимости от величин напряжений p и q решение по теории упругопластического течения с условием пластичности Треска — Сен-Венана

$$f = \max_{i,j} |\sigma_i - \sigma_j| / (2\tau_s)$$

имеет одну, две или три поверхности разрыва (фиг. 3). Первая из них, упругий предвестник, движется со скоростью продольных волн $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. Перед фронтом предвестника

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -q \quad (0 < q < 2\tau_s) \qquad (4.2)$$

При $p \leqslant p_* = (\lambda + 2\mu)\tau_s/\mu$ за фронтом вплоть до границы полупространства реализуется равномерное напряженное состояние:

$$\sigma_1 = -p, \ \sigma_2 = -\lambda p/(\lambda + 2\mu), \ \sigma_3 = \sigma_2 - q \qquad (4.3)$$

При $p_* < p \leqslant p^* = p_* + (\lambda + 2\mu)q/\mu$ возникает разрыв, отвечающий состоянию неполной пластичности, когда отрезок $[\sigma_i^+, \sigma_i^-]$ в пространстве напряжений целиком принадлежит грани призмы текучести. Скорость перемещения разрыва равна $c_t = \sqrt{(\lambda + \mu)/\rho}$. В области 1, перед его фронтом

$$\sigma_1 = -p_*, \ \sigma_2 = -\lambda\tau_s/\mu, \ \sigma_3 = \sigma_2 - q \qquad (4.4)$$

За фронтом вплоть до границы

$$\sigma_1 = -p, \ \sigma_2 = -p + 2\tau_s, \ \sigma_3 = \lambda(\tau_s - p)/(\lambda + \mu) - q \qquad (4.5)$$

Наконец, в случае $p > p^*$ реализуется трехволновая конфигурация. Третий разрыв, за фронтом которого осуществляется состояние полной пластичности, имеет скорость $c_f = \sqrt{(\lambda + 2\mu/3)/\rho}$. В области 1 напряжения по-прежнему задаются формулами (4.4). В области 2

$$\sigma_1 = -p^*, \ \sigma_2 = \sigma_3 = -(\lambda + \mu)q/\mu - \lambda\tau_s/\mu \qquad (4.6)$$

И в области 3

$$\sigma_1 = -p, \ \sigma_2 = \sigma_3 = -p + 2\tau_s \qquad (4.7)$$

Согласно доказанному выше утверждению, приведенное решение задачи единственно в классе кусочно-разрывных функций. Единственное решение этой же задачи по теории течения с условием Мизеса

$$f = \sqrt{\sum_{i,j}(\sigma_i - \sigma_j)^2}/(2\sigma_s)$$

где σ_s — предел текучести при растяжении, независимо от величины p имеет один разрыв — упругий предвестник. При $p \leqslant p_*' = (\lambda + 2\mu)(q + \sqrt{4\sigma_s^2 - 3q^2})/(4\mu)$ напряженное состояние в полупространстве определяется формулами (4.2), (4.3). При бóльших значениях p в области 1 (фиг. 4), за фронтом предвестника

$$\sigma_1 = -p_*', \ \sigma_2 = -\lambda p_*'/(\lambda + 2\mu), \ \sigma_3 = \sigma_2 - q \qquad (4.8)$$

К состоянию 1 непрерывно примыкает автомодельное решение, зависящее от переменной $c = x/t$, для определения которого из (1.7), (1.8) может быть получена система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\rho c^2 - \lambda - 2\mu)d\sigma_1/dc = \gamma'(\sigma_1 - \sigma)$$
$$\rho c^2 d\sigma_i/dc - \lambda d\sigma_1/dc = \gamma'(\sigma_i - \sigma), \ (i = 2, 3)$$
$$\gamma' = -3\mu\sigma_s^{-2}(\sigma_1 - \sigma)\, d\sigma_1/dc \geqslant 0$$

Поверхность склейки решений распространяется со скоростью $c_* = \sqrt{c_f^2 + \mu q^2/(\rho\sigma_s^2)}$. В области 2 выражение для среднего напряжения имеет вид

$$3\sigma = \frac{3\lambda + 2\mu}{4\mu}\sigma_s \ln\frac{\varphi(c)}{\varphi(c_*)} - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu}p_*' - q \qquad (4.9)$$

а главные напряжения таковы:

$$\sigma_1 = \sigma - 2\sigma_s\varphi_p(c)/3, \ \sigma_2 = \sigma + \sigma_s\{\varphi_p(c)/3 + \varphi_f(c)/\sqrt{3}\},$$
$$\sigma_3 = \sigma + \sigma_s\{\varphi_p(c)/3 - \varphi_f(c)/\sqrt{3}\} \qquad (4.10)$$

Здесь

$$\varphi = \frac{1 + \varphi_p(c)}{1 - \varphi_p(c)}, \quad \varphi_p = \left(\frac{c_p^2 - c^2}{c_p^2 - c_f^2}\right)^{1/2}, \quad \varphi_f = \left(\frac{c^2 - c_f^2}{c_p^2 - c_f^2}\right)^{1/2}$$

Скорость движения границы области 2 $c = c^*$ является корнем уравнения

$$\sigma_1(c) + p = 0 \tag{4.11}$$

Такой корень существует при $p > p_*'$ на интервале (c_*, c_f), так как функция в левой части (4.11) имеет перемену знака. В области 3 реализуется однородное напряженное состояние, определяемое формулами (4.9), (4.10) при $c = c^*$.

В пределе при $q \to 0$ выполняется равенство $c_* = c^* = c_f$. Таким образом, в случае $q = 0$ появляется вторая поверхность сильного разрыва, движущаяся со скоростью c_f. Соответствующие напряжения являются кусочно-постоянными функциями.

Приведенные решения могут быть использованы в качестве тестов при построении численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дюво Г., Лионс Ж.- Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 391 с.
3. *Мандель Ж.* Пластические волны в неограниченной трехмерной среде. // Механика: Период. сб. перев. иностр. статей. 1963. № 5. С. 119—141.
4. *Быковцев Г. И., Кретова Л. Д.* О распространении ударных волн в упругопластических средах. // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 106—116.
5. *Кукуджанов В. Н.* К исследованию уравнений динамики упругопластических сред при конечных деформациях. // Нелинейные волны деформаций. Таллинн, 1977. Т. 2. С. 102—105.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
7. *Куксин С. Б.* Применение монотонных полугрупп в теории идеально-упругопластичности // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37. Вып. 5. С. 189—190.
8. *Кукуджанов В. Н.* Численные методы решения неодномерных задач динамики упругопластических сред. // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. Материалы 6-й Всесоюз. конф. Ч. 1. Новосибирск: Изд-во Ин-та теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1980. С. 105—120.

Красноярск

Поступила в редакцию
23.V.1990