

УДК 539.377

© 1991 г.

Ю. М. Коляно, Б. В. Процюк, В. М. Синюта

СТАТИЧЕСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

Предлагается основанная на использовании обобщенных функций методика решения осесимметричных статических задач термоупругости для свободного от внешней нагрузки многослойного неограниченного сплошного цилиндра, через поверхность которого происходит конвективный теплообмен при переменном коэффициенте теплоотдачи.

1. Уравнения с разрывными и сингулярными коэффициентами двумерной статической задачи термоупругости многослойных цилиндров. Рассмотрим свободный от внешних нагрузок цилиндр кругового поперечного сечения, составленный из произвольного числа концентрично расположенных слоев с различными физико-механическими характеристиками. Цилиндр нагревается путем конвективного теплообмена с окружающей средой переменной температуры. Предполагаем, что между слоями цилиндра осуществляется идеальный термомеханический контакт, а коэффициент теплоотдачи — функция осевой координаты.

Физико-механические характеристики многослойного цилиндра как единого целого представим в виде [1]

$$p(r) = p_1 + \sum (p_{k+1} - p_k) S(r - r_k), \quad S(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $S(x)$ — функция Хевисайда [2], r_k, p_k — соответственно внешний радиус и характеристика k -го слоя, n — количество слоев. Выше и всюду далее, если не оговорено противное, суммирование ведется по k от $k = 1$ до $k = n - 1$.

Уравнение теплопроводности рассматриваемого неоднородного тела имеет вид [1]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda^t(r) \frac{\partial t}{\partial r} \right] + \lambda^t(r) \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2)$$

где коэффициент теплопроводности $\lambda^t(r)$ представляется по формуле (1.1).

Воспользовавшись рассуждениями, аналогичными приведенным в [1], при учете связи обобщенной и классической производной и условий идеального теплового контакта

$$t|_{r=r_{k+0}} = t|_{r=r_{k-0}}, \quad \partial t / \partial r|_{r=r_{k+0}} = K_k^\lambda \partial t / \partial r|_{r=r_{k-0}} \quad (1.3)$$

из (1.2) получим уравнение ($\delta(x)$ — дельта-функция)

$$\Delta t - \sum (\partial t / \partial r|_{r=r_{k+0}} - \partial t / \partial r|_{r=r_{k-0}}) \delta(r - r_k) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad K_k^\lambda = \frac{\lambda_k^t}{\lambda_{k+1}^t}$$

При учете второго условия (1.3) уравнение (1.4) преобразуется к виду

$$\Delta t + \sum (1 - K_k^\lambda) \partial t / \partial r|_{r=r_{k-0}} \delta(r - r_k) = 0 \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) эквивалентно уравнению теплопроводности для каждого слоя и условиям идеального теплового контакта. Действительно

$$t(r, z) = t_1(r, z) + \sum [t_{k+1}(r, z) - t_k(r, z)] S(r - r_k)$$

где $t_k(r, z)$ — температура k -го слоя цилиндра.

Определяя обобщенные производные функции $t(r, z)$ согласно [2] и подставляя их в уравнение (1.5), получим

$$\Delta t_1 + \sum [\Delta t_{k+1} - \Delta t_k] S(r - r_k) + \sum \{ [\partial t / \partial r]_{r=r_{k+0}} - \\ - K_k \lambda \partial t / \partial r|_{r=r_{k-0}} \} \delta(r - r_k) + [t_{k+1}|_{r=r_{k+0}} - t_k|_{r=r_{k-0}}] [r_k^{-1} \delta(r - r_k) + \\ + \delta'(r - r_k)] = 0$$

Отсюда следует [3], что

$$\Delta t_k = 0 \text{ при } r_{r-1} < r < r_k \\ t_{k+1}|_{r=r_{k+0}} = t_k|_{r=r_{k-0}}, \quad \partial t|_{k+1} / \partial t|_{r=r_{k+0}} = K_k \lambda \partial t_k / \partial r|_{r=r_{k-0}}$$

Из аналогичных рассуждений путем подстановки известных соотношений Дюгамеля — Неймана [4] в уравнения равновесия приходим к следующей системе уравнений:

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} \right) - \frac{\beta}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial t}{\partial r} + \\ + \sum \frac{1}{\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1}} \left\{ 2(\mu_{k+1} - \mu_k) \frac{\partial u_r}{\partial r} + (\lambda_{k+1} - \lambda_k) e - \right. \\ \left. - (\beta_{k+1} - \beta_k) t \right\} \Big|_{r=r_{k-0}} \delta(r - r_k) = 0 \quad (1.6) \\ \Delta u_z + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial e}{\partial z} - \beta \frac{\partial t}{\partial z} + \sum \gamma_k^{(1)} \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right\} \delta(r - r_k) = 0 \\ e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \beta = \alpha' (3\lambda + 2\mu), \quad \gamma_k^{(1)} = \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+1}}$$

Здесь u_r, u_z — соответственно радиальное и осевое перемещения; λ, μ, α' — соответственно коэффициенты Ламе и температурный коэффициент линейного расширения, имеющие вид (1.1).

Можно также показать, что система (1.6) эквивалентна системе уравнений равновесия в перемещениях для каждого слоя и условиям идеального термомеханического контакта.

Отметим, что уравнение (1.5) и система (1.6) могут быть получены при помощи ассоциативного, некоммутативного произведения¹

$$f(x) \delta(x - a) = f(a + 0) \delta(x - a) \\ \delta(x - a) f(x) = f(a - 0) \delta(x - a) \quad (1.7)$$

и правила обобщенного дифференцирования произведения

$$[f(x) g(x)]' = f(x) g'(x) + f'(x) g(x) \quad (1.8)$$

где $f(x), g(x)$ — достаточно гладкие функции во всей рассматриваемой области, за исключением конечного числа точек, в которых каждая из них имеет разрывы первого рода.

2. Термонапряженное состояние многослойного цилиндра. Для определения температурного поля и обусловленных им перемещений имеем уравнение (1.5) и систему уравнений (1.6) при следующих граничных ус-

¹ Процюк Б. В. Температурные поля и напряжения в многослойных цилиндрических телах: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Львов, 1983. 17 с.

ЛОВИЯХ:

$$\lambda_n^t \partial t / \partial r + \alpha(z)(t - t_c(z)) = 0 \text{ при } r = r_n \quad (2.1)$$

$$t \neq \infty \text{ при } r = 0; t, \partial t / \partial z \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm \infty$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0 \text{ при } r = r_n; u_r \neq \infty, u_z \neq \infty \text{ при } r = 0 \quad (2.2)$$

Здесь $t_c(z)$ — температура окружающей среды, $\alpha(z)$ — коэффициент теплоотдачи, σ_{rr} и σ_{rz} — нормальные и касательные напряжения.

Представляя коэффициент теплоотдачи в виде $\alpha(z) = \alpha_1 + \alpha_0(z)$ и используя функцию Грина [5], получим решение задачи (1.5), (2.1)

$$t(r, z) = \int_0^\infty M_1(z, \eta) T(r, \eta) d\eta \quad (2.3)$$

$$M_1(z, \eta) = \frac{1}{\pi A} \int_{-\infty}^\infty [\alpha(\zeta) t_c(\zeta) - \alpha_0(\zeta) t(r_n, \zeta)] \cos \eta(z - \zeta) d\zeta$$

$$T(r, \eta) = I_0(\eta r) - \eta \Sigma (1 - K_k^\lambda) r_k \psi_{0,0}(r, r_k) H_{1,k}^t S(r - r_k)$$

$$A = \lambda_n^t \eta H_{1,n}^t + \alpha_1 H_{0,n}^t$$

$$H_{i,k}^t = I_i(\eta r_k) - \eta \sum_{m=1}^{k-1} (1 - K_m^\lambda) r_m \psi_{i,0}(r_k, r_m) H_{1,m}^t$$

$$\psi_{i,j}(x, y) = I_i(\eta x) K_j(\eta y) + (-1)^{i+j+1} K_i(\eta x) I_j(\eta y)$$

Здесь $I_j(x)$, $K_j(x)$ — модифицированные функции Бесселя порядка j , $t(r_n, z)$ — решение интегрального уравнения

$$t(r_n, z) = \int_0^\infty M_1(z, \eta) H_{0,n}^t d\eta$$

Постоянная α_1 принадлежит интервалу изменения $\alpha(z)$. Для решения задачи (1.6), (2.2) представим u_r , u_z через термоупругий потенциал перемещений

$$u_r = u + \partial \Phi / \partial r, \quad u_z = v + \partial \Phi / \partial z \quad (2.4)$$

а функции Φ , u , v ищем в виде

$$\Phi = \int_0^\infty M_1(z, \eta) \varphi(r, \eta) d\eta$$

$$u = \int_0^\infty M_1(z, \eta) U(r, \eta) d\eta, \quad v = \int_0^\infty M_2(z, \eta) V(r, \eta) d\eta \quad (2.5)$$

$$M_2(z, \eta) = \frac{1}{\pi A} \int_{-\infty}^\infty [\alpha(\zeta) t_c(\zeta) - \alpha_0(\zeta) t(r_n, \zeta)] \sin \eta(z - \zeta) d\zeta$$

После подстановки выражений (2.3)—(2.5) в (1.6), (2.2) и умножения первого уравнения (1.6) слева на $(\lambda + 2\mu)/\mu$ согласно (1.7) получаем уравнение для определения φ :

$$L_0 \varphi = b T, \quad b = \beta / (\lambda + 2\mu) \quad (2.6)$$

и соответственно систему уравнений и граничные условия для определения U , V :

$$L_1 U + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{d\varepsilon}{dr} + F_1 = 0, \quad L_0 V - \frac{\lambda + \mu}{\mu} \eta \varepsilon + F_2 = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{dU}{dr} + \frac{\lambda_n}{2\mu_n} \varepsilon = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \eta^2 \varphi \quad (2.8)$$

$$\frac{dV}{dr} - \eta U = 2\eta \frac{d\varphi}{dr} \text{ при } r = r_n; \quad U \neq \infty, V \neq \infty \text{ при } r = 0$$

Здесь

$$L_0 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \eta^2, \quad L_1 = L_0 - \frac{1}{r^2}, \quad \varepsilon = \frac{dU}{dr} + \frac{U}{r} + \eta V$$

$$F_1(r, \eta) = -\frac{1}{\eta} \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 \gamma_k^{(m)} H_k^{(m)} \delta(r - r_k), \quad \gamma_k^{(2)} = \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\mu_{k+1}}$$

$$F_2(r, \eta) = \sum \gamma_k^{(1)} H_k^{(3)} \delta(r - r_k)$$

$$H_k^{(1)} = -2\eta \left(\frac{dU}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} + \eta^2 \varphi \right) \Big|_{r=r_k-0} \quad (2.9)$$

$$H_k^{(2)} = -\eta \varepsilon \Big|_{r=r_k-0}, \quad H_k^{(3)} = \left(\frac{dV}{dr} - \eta U - 2\eta \frac{d\varphi}{dr} \right) \Big|_{r=r_k-0}$$

Решая уравнение (2.6), находим

$$\begin{aligned} \varphi(r, \eta) = & \frac{br}{2\eta} I_1(\eta r) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ (b_{m+1} - b_m) r_m^2 f_1(r, r_m) + \right. \\ & \left. + (1 - K_m^\lambda) r_m H_{1,m}^t \left[b_{m+1} f_2(r, r_m, r_m) + \sum_{l=m+1}^{n-1} (b_{l+1} - b_l) f_2(r, r_m, r_l) \right] \right\} \\ f_1(r, r_m) = & [(I_0(\eta r_m) \psi_{0,0}(r, r_m) + I_1(\eta r_m) \psi_{0,1}(r, r_m)) S(r - r_m) \\ f_2(r, r_m, r_l) = & [r \psi_{1,0}(r, r_m) - \eta r_l^2 (\psi_{0,0}(r_l, r_m) \psi_{0,0}(r, r_l) + \\ & + \psi_{1,0}(r_l, r_m) \psi_{0,1}(r, r_l))] S(r - r_l) \end{aligned}$$

Система уравнений (2.7) после ряда преобразований с использованием правила (1.8) и произведения (1.7) сводится к следующей системе:

$$U = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\eta^3} \left[\frac{d(L_0 V)}{dr} + \frac{dF_2}{dr} + F_3 \right] + \frac{F_1}{\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dV}{dr} \quad (2.10)$$

$$L_0^2 V = - \left[\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \eta \left(\frac{dF_1}{dr} + \frac{F_1}{r} + \eta F_2 \right) + L_0 F_2 + \frac{dF_3}{dr} + \frac{F_3}{r} - \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \eta F_4 \right]$$

Здесь

$$F_3(r, \eta) = \sum \gamma_k^{(3)} H_k^{(2)} \delta(r - r_k), \quad F_4(r, \eta) = \eta \sum \gamma_k^{(3)} \gamma_k^{(4)} H_k^{(4)} \delta(r - r_k)$$

$$H_k^{(4)} = \left(\frac{dV}{dr} + \eta U \right) \Big|_{r=r_k-0}, \quad \gamma_k^{(3)} = \frac{\lambda_{k+1}}{\mu_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{\mu_k}, \quad \gamma_k^{(4)} = \frac{\mu_k}{\lambda_k + 2\mu_k} \quad (2.11)$$

Ограниченное при $r = 0$ решение второго уравнения системы (2.10) имеет вид (c_1, c_2 — неизвестные постоянные)

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \sum [(r \psi_{1,1}(r, r_k) P_k^{(1)} - r_k \psi_{0,0}(r, r_k) P_k^{(2)}) S(r - r_k) - \\ & - \eta f_2(r, r_k, r_k) P_k^{(3)}] + c_1 I_0(\eta r) + c_2 r I_1(\eta r) \end{aligned} \quad (2.12)$$

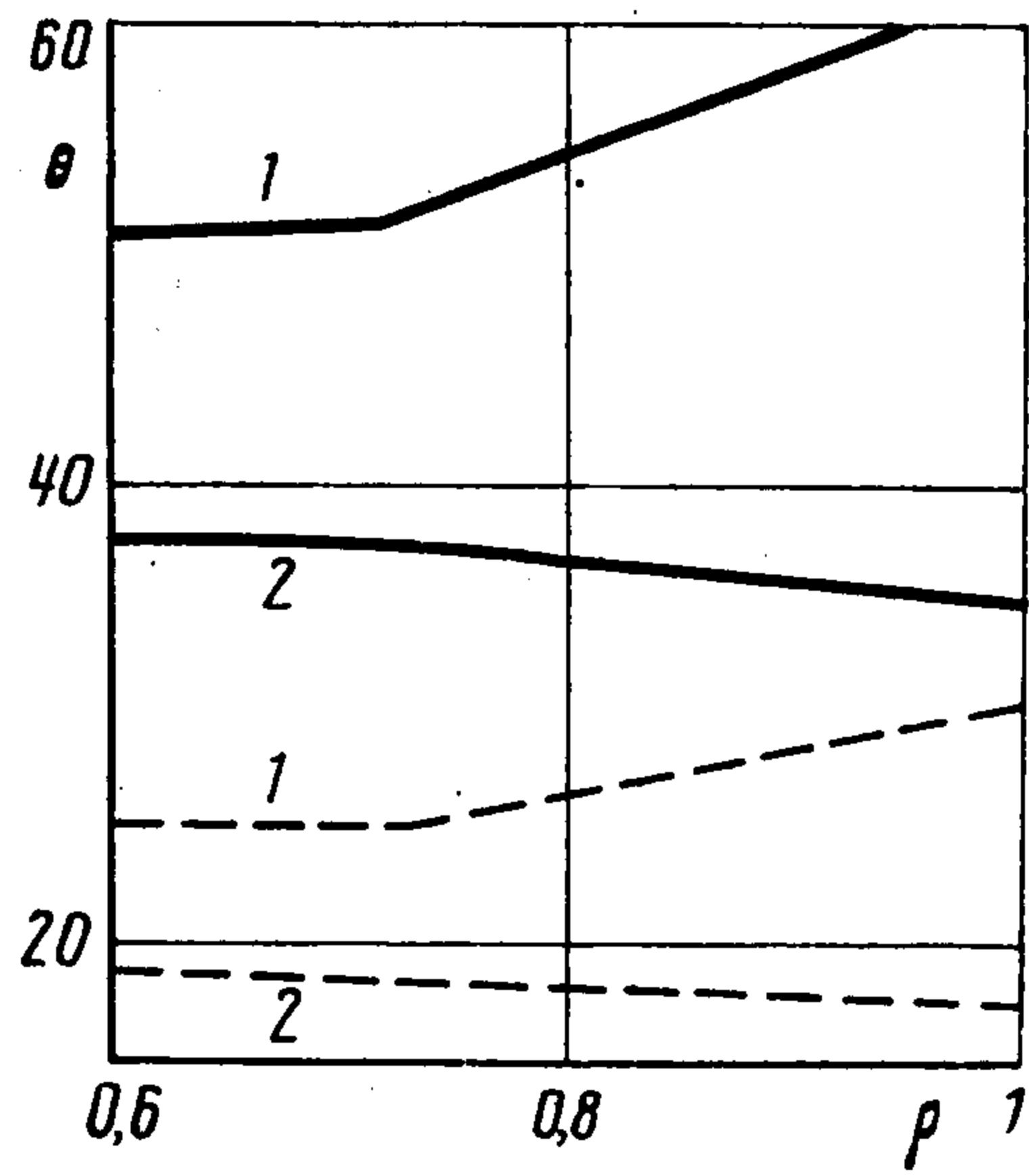
$$P_k^{(i)} = r_k \sum_{m=0}^1 \omega_k^{(i+m)} H_k^{(i+m)} \quad (i = 1, 3), \quad P_k^{(2)} = P_k^{(1)} + 2\gamma_k^{(1)} H_k^{(3)}$$

$$\omega_k^{(1)} = \omega_k^{(3)} = (1 - \gamma_{k+1}^{(4)}) \gamma_k^{(1)}, \quad \omega_k^{(2)} = (1 - \gamma_{k+1}^{(4)}) \gamma_k^{(2)} - \gamma_k^{(3)}, \quad \omega_k^{(4)} = \gamma_{k+1}^{(4)} - \gamma_k^{(4)}$$

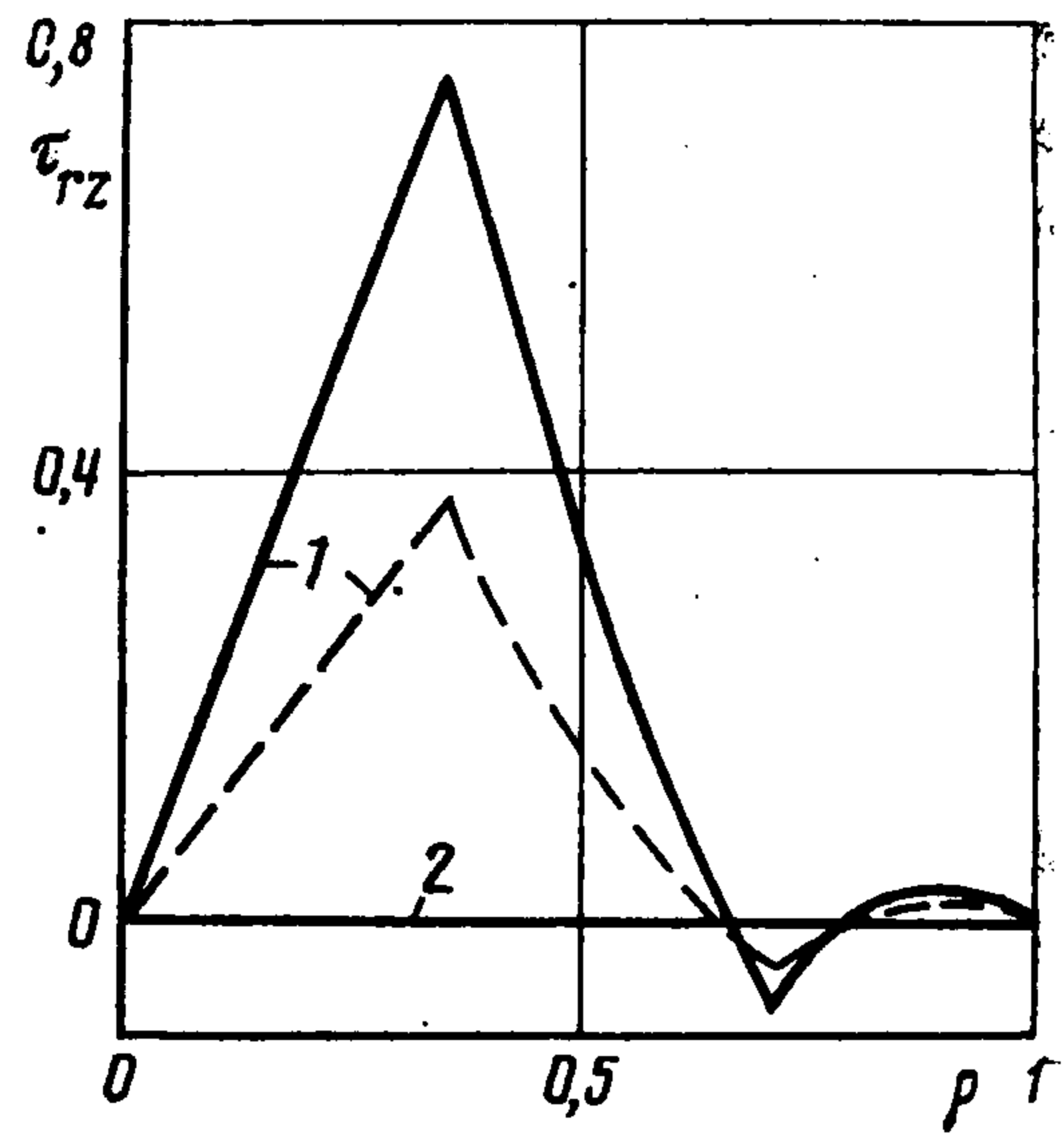
С использованием представления

$$P_k^{(i)} = \sum_{j=1}^3 c_j P_{k,j}^{(i)}, \quad H_k^{(i)} = \sum_{j=1}^3 c_j H_{k,j}^{(i)}, \quad c_3 = 1 \quad (2.13)$$

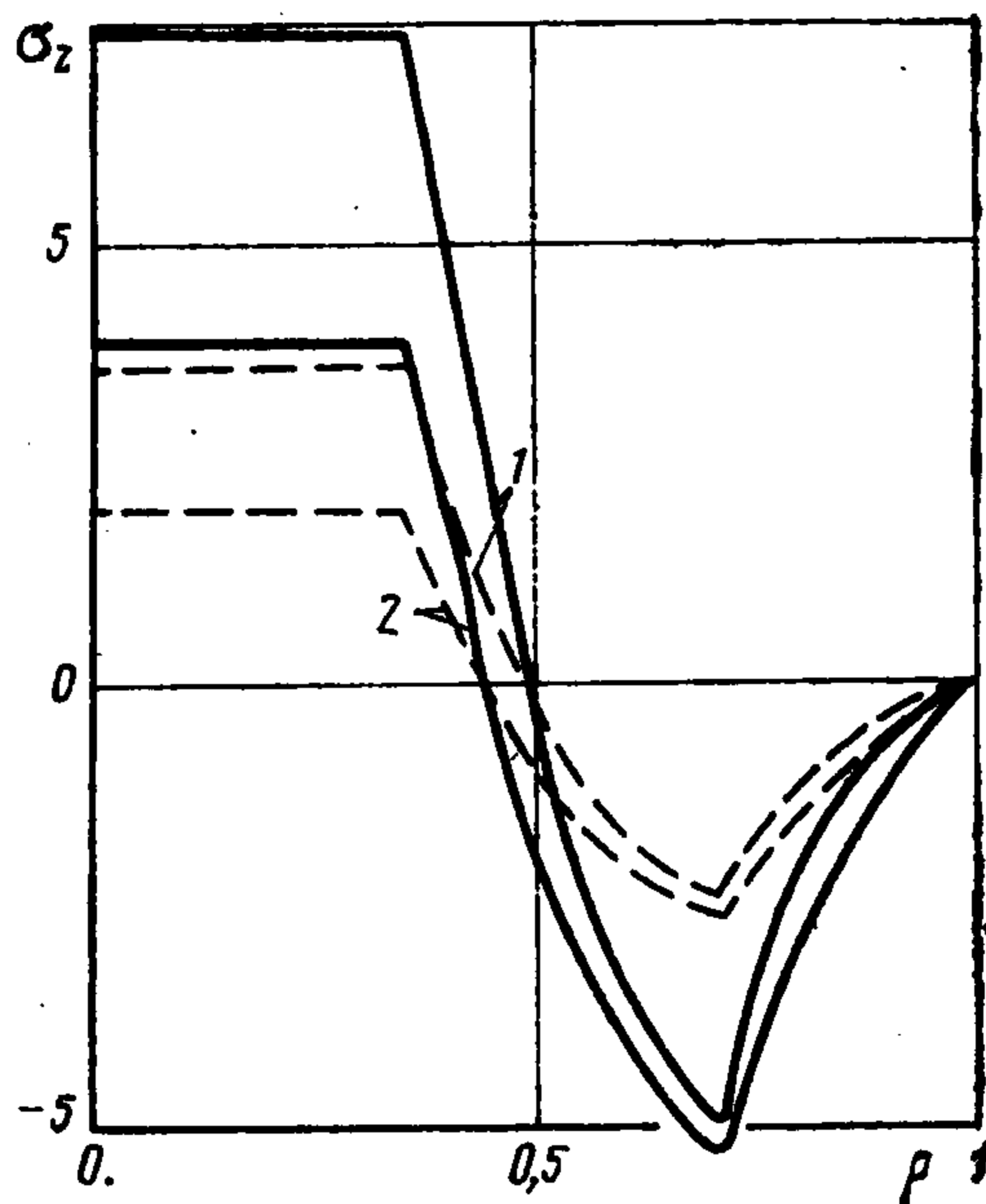
из (2.12) и первого уравнения системы (2.10) находим искомые соотношения для U и V . Величины $H_{k,j}^{(i)}$ определяются из рекуррентных соотношений, которые получаются в результате подстановки представлений (2.13) и соотношений для U, V в (2.9), (2.11). Постоянные c_1, c_2 , найденные из гранич-



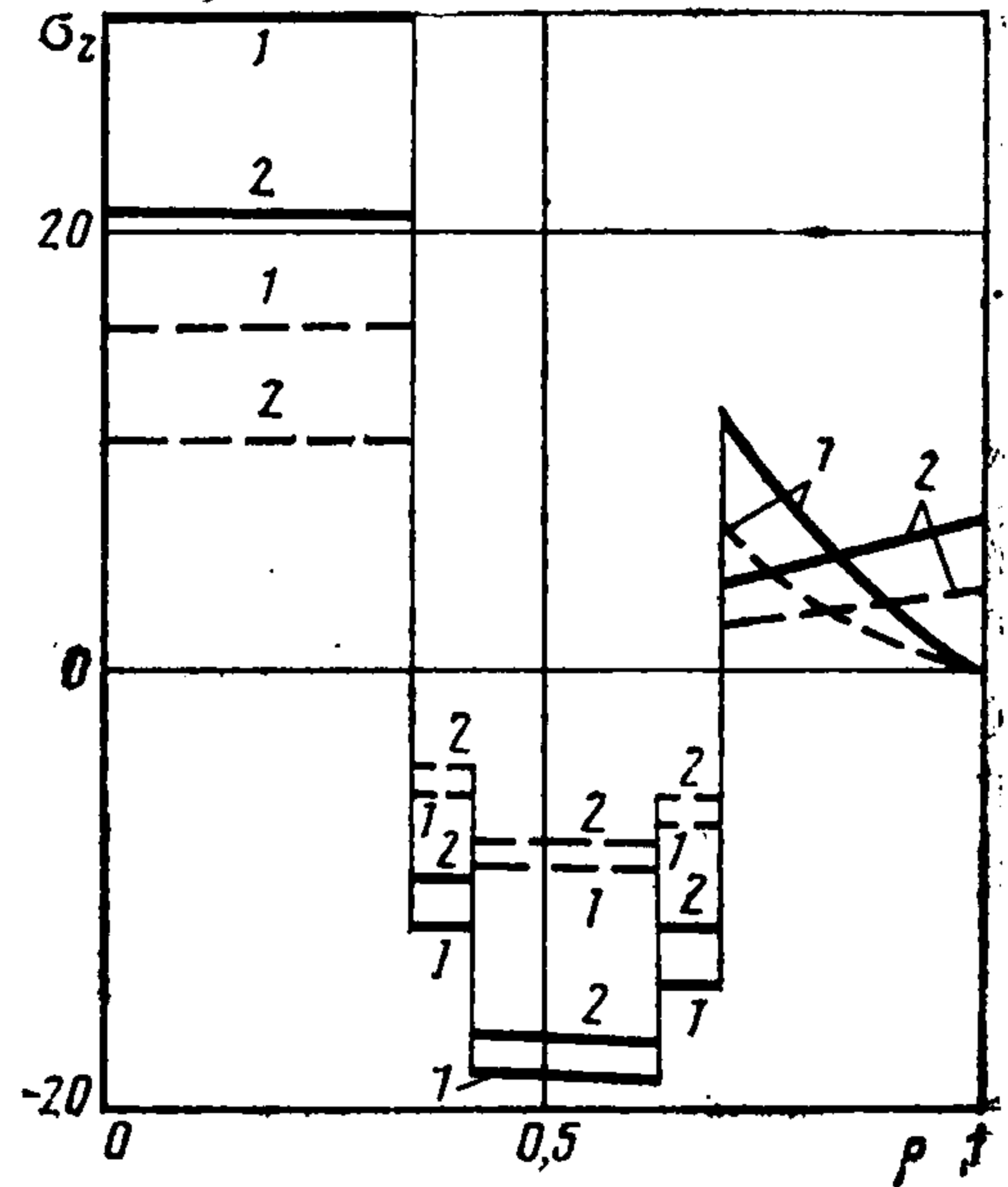
Фиг. 1



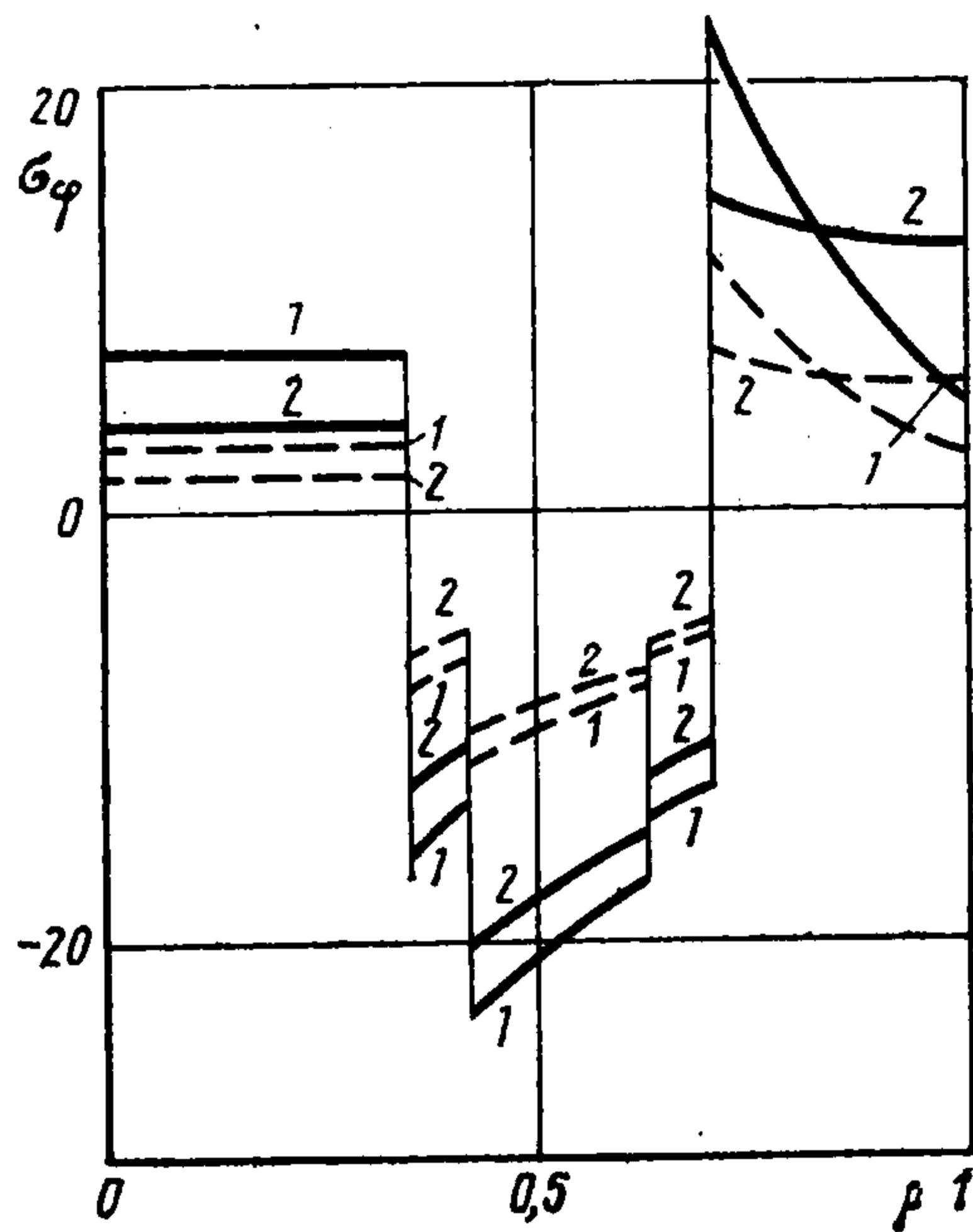
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

ных условий (2.8), имеют вид

$$c_1 = (g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22}) / D, \quad c_2 = (g_{13}g_{21} - g_{23}g_{11}) / D$$

$$D = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12}, \quad g_{1j} = \frac{1}{2} (H_{n,j}^{(1)} + (\lambda_n/\mu_n) H_{n,j}^{(2)}), \quad g_{2j} = H_{n,j}^{(3)}$$

В качестве примера для случая изменения температуры окружающей среды и коэффициента теплоотдачи по закону

$$t_c(z) = t_0 N(z), \quad \alpha(z) = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) N(z)$$

$$N(z) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(20(|z/r_n| - 2))$$

проведены расчеты температурного поля и соответствующих температурных напряжений в пятислойной цилиндрической системе при следующих значениях термоупругих и геометрических характеристик:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= 11,8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \nu_1 = 0,26, \alpha_1^t = 0,25 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}, \lambda_1^t = 80 \text{ Вт/мК} \\
 E_2 &= 2,7 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \alpha_2 = 0,33, \nu_2^t = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}, \lambda_2^t = 46,1 \text{ Вт/мК} \\
 E_3 &= 11,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \nu_3 = 0,35, \alpha_3^t = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}, \lambda_3^t = 393,6 \text{ Вт/мК} \\
 E_4 &= E_2, \nu_4 = \nu_2, \alpha_4^t = \alpha_2^t, \lambda_4^t = \lambda_2^t \\
 E_5 &= 20,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \nu_5 = 0,26, \alpha_5^t = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ 1/К}, \lambda_5^t = 6,3 \text{ Вт/мК} \\
 r_1 &= 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}, r_2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ м}, r_3 = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}, r_4 = 10^{-2} \text{ м}, r_5 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ м}
 \end{aligned}$$

Здесь E_k — модуль Юнга, ν_k — коэффициент Пуассона k -го слоя.

Сплошными линиями на фиг. 1—5 изображены результаты расчетов при переменном коэффициенте теплоотдачи ($\alpha_1 = 100 \text{ Вт/м}^2\text{К}$, $\alpha_2 = 350 \text{ Вт/м}^2\text{К}$), а штриховыми линиями — при постоянном коэффициенте ($\alpha_1 = \alpha_2 = 100 \text{ Вт/м}^2\text{К}$). На фиг. 1 представлена зависимость безразмерной температуры $\theta = 10^2 t/t_0$, а на фиг. 2—5 — соответственно зависимости безразмерных касательных и нормальных напряжений

$$\tau_{rz} = 10^2 \frac{\sigma_{rz}}{\sigma_0}, \quad \sigma_r = 10^2 \frac{\sigma_{rr}}{\sigma_0}, \quad \sigma_z = 10^2 \frac{\sigma_{zz}}{\sigma_0}, \quad \sigma_\varphi = 10^2 \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\sigma_0} \quad (\sigma_0 = \alpha_5^t E_5 t_0)$$

от $\rho = r/r_5$ при следующих значениях $z/r_5 = 0$ (кривые 1) и $z/z_5 = 3$ (кривые 2).

Из приведенных графиков следует: значения температуры и абсолютные значения напряжений в цилиндре при переменном коэффициенте теплоотдачи примерно в два раза больше их значений при постоянном коэффициенте; с ростом безразмерной осевой координаты z/r_5 от 0 до 3 температура и напряжения по абсолютной величине уменьшаются всюду, за исключением интервала $0,85 < \rho < 1$, на котором осевые напряжения σ_z (фиг. 4) и кольцевые σ_φ (фиг. 5) увеличиваются; максимальными растягивающими напряжениями являются осевые напряжения σ_z в первом слое, в то время как максимальными сжимающими — кольцевые напряжения σ_φ на границе соединения третьего и четвертого слоев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
3. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: Секвенциальный подход. М.: Мир, 1976. 311 с.
4. Коваленко А. Д. Избранные труды. Киев: Наук. думка, 1976. 762 с.
5. Процюк Б. В., Синюта В. М. Функция Грина стационарной осесимметрической задачи теплопроводности для многослойного цилиндра // Вестн. Львов. ун-та. Сер. механико-математическая. 1988. Вып. 30. С. 48—51.