Прикладная математика и механика. Том 55, вып. 6, 1991

УДК 539.374

С. И. Репин

О ВАРИАЦИОННЫХ ПОСТАНОВКАХ ДЛЯ РАЗРЫВНЫХ ПОЛЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕЗ УПРОЧНЕНИЯ

Рассматривается вопрос о построении и использовании расширенных вариационных постановок, позволяющих в явном виде анализировать разрывные поля перемещений для широкого класса задач деформационной теории пластичности. Исследуются как трехмерные, так и плоские задачи с критериями пластичности Мизеса и Шлейхера — Моро. Для случая кусочно-гладкой линии разрыва показано, что из существования седловой точки расширенного лагранжиана следует интегральное неравенство, накладывающее определенные условия на след тензора напряжений на линии разрыва. На основании других соображений разные варианты этого условия были получены ранее [1—3] для ряда проблем теории пластичности. В предположении достаточной регулярности напряжений из указанного условия следует простое алгебраическое соотношение, связывающее на линии разрыва значение тензора напряжений и параметры, определяющие величину и направление разрыва. Приведенные примеры показывают, что, вообще говоря, разрывным решениям соответствует лишь часть напряженных состояний, лежащих на поверхности текучести.

Вариационные постановки для задач деформационной теории идеальной пластичности исследовались разными авторами (см., в частности, [4—11]). Известно, что эти постановки обладают рядом особенностей. Так, задача в напряжениях здесь состоит в минимизации квадратичного функционала на множестве статически допустимых полей напряжений, удовлетворяющих условиям текучести, и в случае, если это множество не пусто, всегда однозначно разрешима [4]. Двойственной к ней будет задача минимизации выпуклого функционала на множестве допустимых полей перемещений. Эта вариационная постановка является в отличие от предыдущей экстремальной задачей без ограничений, удобной для численного анализа в случае гарантии существования ее решения. Однако соответствующие примеры показывают, что данная постановка математически некорректна, поскольку возможно возникновение разрывных решений, на которых исходный функционал не определен [5]. Таким образом, возникает необходимость построения расширенной (релаксированной) задачи, которая, сохраняя значение точной нижней грани, позволяет явно учесть все предельные элементы исходной постановки.

Полные вариационные расширения для задач деформационной теории с критерием пластичности Мизеса были построены ([5—9], см. также приведенную в этих работах библиографию). Однако математические формулировки полных вариационных расширений весьма абстрактны. Например, пространство функций ограниченной деформации, на котором определен расширенный функционал в [7—9], состоит из суммируемых вектор-функций, для которых тензор деформаций — мера Радона. Поэтому с прикладной точки зрения удобнее использовать так называемые частичные расширения, в которых функционал определяется на функциях, имеющих разрывы первого рода вдоль некоторых поверхностей (линий). Частичные расширения имеют простой вид и могут быть эффективно использованы при численном решении задач [12—14].

Основная цель данной работы — построение частичных расширений для широкого класса задач деформационной теории пластичности.

1. Задача определения напряжений σ и перемещений u в рамках деформационной теории сводится к нахождению решения системы

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ в } \Omega \tag{1.1}$$

$$u_i = u_i^0 \text{ на } \Gamma_1,\ \sigma_{ij}n_j = F_i \text{ на } \Gamma_2$$

$$\varepsilon_{ij}(u) = A_{ijkl}\sigma_{kl} + \lambda_{ij},\ 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

при выполнении условия

$$\lambda_{ij}(\tau_{ij} - \sigma_{ij}) \leqslant 0, \ \forall \tau \in M_c^k, \ G(\tau) \leqslant 0 \qquad (1.2)$$

Здесь $\Omega \in R^k$ ($k = 2, 3$) — область с границей Γ непрерывной по Липшицу, занятая упругопластическим телом, A_{ijkl} — компоненты тензора упругости, f, F — векторы объемных и поверхностных сил, n — внешняя нормаль к Γ, M_c^k — множество симметричных тензоров размерности k, G: $M_c^k \to R^1$ — выпуклая функция, определяющая пластические свойства материала и используется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Предполагается, что

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing \qquad (1.3)$$

$$f \in (L^2(\Omega))^k, \ F \in (L^2(\Gamma_2))^k, \ u^0 \in (H^1(\Omega))^k$$

Введем в рассмотрение гильбертово пространство

$$\Sigma = \{\sigma \in M_c^k: \sigma = \{\sigma_{ij}\}, \ \sigma_{ij} \in L^2(\Omega)\}$$

Скалярное произведение в нем определяется как $(\sigma, \tau) = \int\limits_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij}dx$.

Введем множества

$$\Sigma_0 = \{\sigma \in \Sigma: \sigma_{ij,j} \in L^2(\Omega)\}$$

$$U = \{u: u \in (H^1(\Omega))^k, \ u = u^0 \text{ на } \Gamma_1\}$$

$$M = \{\sigma \in \Sigma_0: \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \text{ в } \Omega, \ n_i\sigma_{ij} = F_j \text{ на } \Gamma_2\}$$

Множество M содержит статически допустимые поля напряжений. Определим множество тензоров, удовлетворяющих условию пластичности

$$K = \{\sigma \in \Sigma: G(\sigma) \leqslant 0 \text{ п.в. в } \Omega\}$$

Тогда, если множество $K \cap M$ не пусто, а u^*, σ^* — решение задачи (1.1)—(1.2), то поле напряжений σ^* минимизирует на $K \cap M$ функционал

$$\Phi(\sigma) = a(\sigma, \sigma) - \int\limits_{\Gamma_1} n_i\sigma_{ij}u_j^0 d\Gamma \qquad (1.4)$$

$$a(\sigma, \sigma) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\,dx$$

Доказано (см., например, [4]), что если $K \cap M \neq \phi$, то решение этой задачи существует и единственно. Однако использование (1.4) для решения конкретных задач затруднено, поскольку минимизация производится не на всем пространстве, а на множестве $K \cap M$, т. е. множестве тензоров, удовлетворяющих ограничениям в виде равенств (уравнения равновесия и силовые граничные условия) и неравенств (условия пластичности). Кроме того, возникает проблема построения поля перемещений, отвечающего полю напряжений. Заметим, что в рамках исходной постановки такого поля перемещений может и не существовать.

Задачу (1.1), (1.2) можно поставить также в форме задачи отыскания седловой точки лагранжиана

$$l(\sigma, u) = \int\limits_\Omega (\varepsilon_{ij}(u)\sigma_{ij} - f_iu_i)\,dx - a(\sigma, \sigma) - \int\limits_{\Gamma_2} F_iu_i d\Gamma$$

Можно показать, что задача минимизации функционала (1.4) на $K \cap M$ эквивалентна задаче

$$\sup_{\sigma \in K} \inf_{u \in U} l(\sigma, u)$$

причем (см. [4])

$$\sup_{\sigma \in K} \inf_{u \in U} l(\sigma, u) = \inf_{u \in U} \sup_{\sigma \in K} l(\sigma, u) = C \qquad (1.5)$$

и первая компонента седловой точки существует и совпадает с σ^*. Вычисляя супремум по σ в правой части равенства (1.5), приходим к двойственной задаче, которая будет задачей минимизации выпуклого функционала

$$J(u) = \sup_{\sigma \in K} l(\sigma, u)$$

на множестве U [15]. Например, если материал изотропный, а $G(\sigma) = |\sigma^D|^2 - 2k_*^2$ (критерий Мизеса), где σ^D — девиатор тензора σ, $|\sigma| = (\sigma_{ij}\sigma_{ij})^{1/2}$, k_* — предел текучести, то

$$J(u) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2} k_0 (\operatorname{div} u)^2 + H(|\varepsilon^D(u)|) - f_i u_i\right] dx - \int_{\Gamma_2} F_i u_i \, d\Gamma \tag{1.6}$$

$$H(t) = \begin{cases} \mu t^2, & t \leqslant k_*/(\sqrt{2}\mu) \\ k_*(\sqrt{2}t - k_*/(2\mu)), & t > k_*/(\sqrt{2}\mu) \end{cases}$$

Здесь ε^D — девиатор тензора деформаций, а k_0, μ — упругие константы материала.

Если задача

$$\inf_{u \in U} J(u) \tag{1.7}$$

имеет решение u^*, то пара (u^*, σ^*) является седловой точкой $l(\sigma, u)$ и наоборот, если $l(\sigma, u)$ имеет седловую точку, то ее компоненты — решения задач (1.4), (1.7).

Вариационная постановка (1.7) может быть использована для построения решения задачи (1.1—1.2). Она более удобна, так как минимизация осуществляется на всем пространстве U, что особенно важно при использовании вариационно-разностных методов. Однако задача (1.7) имеет существенный недостаток: ее решение может не существовать.

Это связано с тем, что $J(u)$ некоэрцитивен на U и коэрцитивен лишь на нерефлексивном пространстве (для функционала (1.6) соответствующие пространства введены в [5]). Такие трудности обусловлены возможностью возникновения разрывных решений, на которых $J(u)$ не определен. Поэтому появляется необходимость построения вариационного расширения данного класса задач, включающего в рассмотрение все предельные функции исходного множества. Эти проблемы интенсивно изучались в последнее время (см. [5—8], где даны соответствующие абстрактные расширения, получены [5] расширенные формулировки для задач с критерием пластичности Мизеса, в которых допускаются разрывы перемещений на некоторых поверхностях). Следует отметить, что полные вариационные расширения имеют достаточно абстрактную форму и непосредственное их использование для решения задач затруднительно. В то же время, если при расширении множества U ограничиться функциями, которые могут иметь разрывы лишь вдоль некоторых поверхностей (кривых в плоском случае), то можно явно построить соответствующие расширенные вариационные постановки и использовать их при решении конкретных задач и при построении численных методов.

2. Рассмотрим задачу отыскания седловой точки лагранжиана $l(\sigma, u)$: $K \times U \to R^1$, предполагая, что условие (1.5) выполнено и что первая компонента седловой точки σ^* существует, т. е.

$$\sup_{\sigma \in K} \Phi(\sigma) = \Phi(\sigma^*); \; \Phi(\sigma) = \inf_{u \in U} l(\sigma, u) \tag{2.1}$$

Построим лагранжиан $l'(\sigma, u)$: $K \times U' \to R^1$, который должен совпадать с $l(\sigma, u)$ на $K \times U$, сохранять в качестве задачи для переменной σ постановку (2.1) и обладать тем свойством, что если (σ^*, u^*) — седловая точка $l'(\sigma, u)$, то ее можно приблизить последовательностью элементов из $K \times U$. Для этого рассмотрим банахово пространство V, такое, что множество U непрерывно вложено и всюду плотно в V, и $U \subset U' \subset V$.

Потребуем выполнения следующих условий:

$$
\begin{aligned}
&1^\circ.\ l'(\sigma, u) = l(\sigma, u),\ \forall u \in U,\ \forall \sigma \in K \\
&2^\circ.\ \inf_{u \in U'} l'(\sigma, u) = \inf_{u \in U} l(\sigma, u),\ \forall \sigma \in K \\
&3^\circ.\ \forall u' \in U'\ \exists \{u_m\} \in U\colon u_m \to u' \text{ в } V_w \\
&\qquad \lim_{m \to \infty} l(\sigma, u_m) \leqslant l'(\sigma, u')\ \forall \sigma \in K \cap M
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Условия 2.2 показывают, что $l'(\sigma, u)$ — продолжение $l(\sigma, u)$ на $K \times U'$ с сохранением вариационной задачи (2.1).

Утверждение 1. При выполнении условий (2.2) лагранжиан $l'(\sigma, u)$ обладает следующими свойствами.

1°. Если (σ^*, u^*) — седловая точка $l(\sigma, u)$ на $K \times U$ то (σ^*, u^*) — седловая точка $l'(\sigma, u)$ на $K \times U'$

2°. $\sup\limits_{\sigma \in K} \inf\limits_{u \in U'} l'(\sigma, u) = \inf\limits_{u \in U'} \sup\limits_{\sigma \in K} l'(\sigma, u) = C$

3°. Если (σ^*, u^*) — седловая точка $l'(\sigma, u)$ на $K \times U'$, то существует последовательность $\{u_m\} \in U$ такая, что $u_m \to u^*$ в V и

$$
\lim_{m \to \infty} l(\sigma^*, u_m) = l'(\sigma^*, u^*) \tag{2.3}
$$

Доказательство. Из (2.2) следует

$$
\sup_{\sigma \in K} \inf_{u \in U'} l'(\sigma, u) = \sup_{\sigma \in K} \inf_{u \in U} l(\sigma, u) = C
$$

$$
\inf_{u \in U'} \sup_{\sigma \in K} l'(\sigma, u) \leqslant \inf_{u \in U} \sup_{\sigma \in K} l(\sigma, u) = C
$$

откуда вытекают первые два пункта утверждения. Предположим, что (σ^*, u^*) — седловая точка $l'(\sigma, u)$, тогда из последнего условия (2.2) следует, что существует последовательность $\{u_m\} \in U$, такая, что $u_m \to u^*$ в V и

$$
\lim_{m \to \infty} l(\sigma^*, u_m) \leqslant l'(\sigma^*, u^*) = C
$$

С другой стороны,

$$
l(\sigma^*, u_m) = l'(\sigma^*, u_m) \geqslant \inf_{u \in U'} l'(\sigma^*, u) = C
$$

Следовательно, имеет место соотношение (2.5).

Используя лагранжиан $l'(\sigma, u)$, можно построить задачу

$$
\inf_{u \in U'} J'(u);\ J'(u) = \sup_{\sigma \in K} l'(\sigma, u) \tag{2.4}
$$

двойственной к которой также будет задача (2.1). Из известных свойств седловых точек вытекает, что если задача (2.4) имеет решение u^*, то (σ^*, u^*) — седловая точка $l'(\sigma, u)$ на $K \times U'$. и если (σ^*, u^*) — седловая точка $l'(\sigma, u)$, то u^* — решение задачи (2.4).

В силу первого условия (2.2)

$$
J'(u) = J(u)\ \forall u \in U
$$

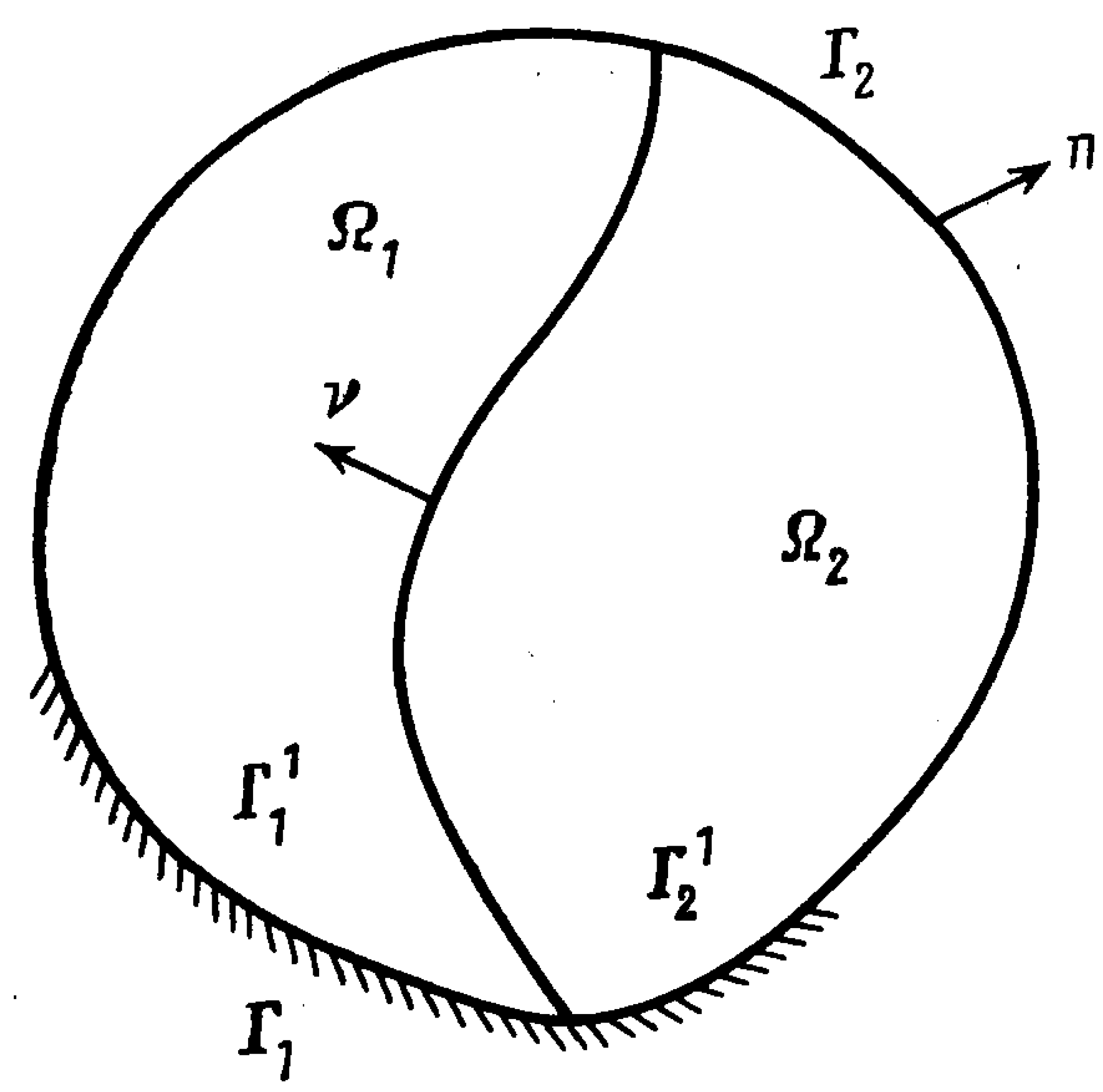
$$
\inf_{u \in U'} J'(u) = \inf_{u \in U'} \sup_{\sigma \in K} l'(\sigma, u) = C = \inf_{u \in U} J(u) \tag{2.5}
$$

Эти неравенства показывают, что построенный таким образом функционал $J'(u)$ является продолжением $J(u)$ на более широкое множество U' с сохранением точной нижней грани исходной задачи. Из равенств (2.5) также следует, что всякая минимизирующая последовательность в задаче (1.7) будет минимизирующей и для (2.4), если же задача (1.7) имеет решение, то последнее является также решением задачи (2.4).

Утверждение 1 показывает, что задачи относительно лагранжианов $l(\sigma, u)$ и $l'(\sigma, u)$ тесно связаны. Первая компонента седловой точки существует в обоих случаях и определяется однозначно. Вторая компонента при этом должна удовлетворять условиям

$$l(\sigma, u^*) \leqslant l(\sigma^*, u^*) \leqslant l(\sigma^*, u), \ \forall u \in U, \ \forall \sigma \in K \tag{2.6}$$
$$l'(\sigma, u^*) \leqslant l'(\sigma^*, u^*) \leqslant l'(\sigma^*, u), \quad \forall u \in U', \quad \forall \sigma \in K$$

Если $u^* \in U'$ и $u^* \notin U$, то $l'(\sigma, u)$ имеет седловую точку и второе условие (2.6) выполнено, в то же время первое условие (2.6) не выполнено, поскольку лагранжиан $l(\sigma, u)$ не определен на u^*. В этом случае полю напряжений σ^*, являющемуся решением задачи в напряжениях не соответствует никакое поле перемещений из U, но соответствует поле перемещений из более широкого класса U'. Последнее может быть сколь угодно точно приближено полями $\{u_m\}$, допустимыми в исходной постановке. Фактически это означает, что расширенная постановка — просто более корректная форма записи задачи, в которой явно учитываются те особенности, которые в скрытой форме содержатся и в исходной постановке.



3. Рассмотрим наиболее простой случай, когда $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2$, $\Omega_1 \bigcap \bigcap \Omega_2 = \varnothing$ (фигура), где Ω_1, Ω_2 — открытые области границы которых $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ непрерывны по Липшицу, а $\gamma = \partial\Omega_1 \bigcap \partial\Omega_2$. Обозначим $\Gamma_i^s = \Gamma_i \bigcap \partial\Omega_s$, $(i, s = 1, 2)$ и введем множества

$$U' = \{u(x): u(x) = u^s(x) \text{ при } x \in \Omega_s, \ u^s(x) \in U, \ s = 1, 2\}$$

$$K_0 = \{\tau \in \Sigma_0: G(\tau) \leqslant 0 \text{ п. в. в } \Omega\}$$

Пусть $V = L^p(\Omega)$, $p > 1$, ν — вектор нормали к поверхности (линии) γ, $v = u^1 - u^2$, $\tau \in K_0$. Обозначим

$$[\tau, v] = \int_\gamma \nu_i \tau_{ij} v_j \, d\Gamma; \quad R_\gamma(v) = \sup_{\tau \in K_0} [\tau, v] \tag{3.1}$$

Заметим, что поскольку след v на линии γ принадлежит пространству $H^{1/2}$, а $\tau \in K_0$, то данное выражение имеет смысл. Определим расширенный лагранжиан следующим образом:

$$l'(\sigma, u) = L_\gamma(\sigma, u) + R_\gamma(v)$$

$$L_\gamma(\sigma, u) = \sum_{s=1}^{2} \left[\int_{\Omega_s} (\varepsilon_{ij}(u^s)\sigma_{ij} - u_i^s f_i)\, dx - \int_{\Gamma_2^s} u_i^s F_i \, d\Gamma \right] - a(\sigma, \sigma)$$

Видно, что $U \subset U' \subset V$, причем, если $u^1 = u^2 = u(x)$, $u(x) \in U$, то $l'(\sigma, u) = l(\sigma, u)$, так что первое из условий (2.2) выполнено. Для проверки второго условия используем неравенство

$$\inf_{u \in U'} l'(\sigma, u) \leqslant \inf_{u \in U} l(\sigma, u) = \inf \left[\int_\Omega (\varepsilon_{ij}(u)\sigma_{ij} - u_i f_i)\, dx - \int_{\Gamma_2} u_i F_i \, d\Gamma \right] - a(\sigma, \sigma)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой линейный функционал относительно u, его инфимум отличен от $-\infty$ только в случае

$\sigma \overline{\in} M$, Если же $\sigma \in M$, то, интегрируя по частям, получим

$$L_\gamma (\sigma, u) = \Phi (\sigma) - [\sigma, v]$$

Поскольку

$$\inf_{u \in U'} \sup_{\tau \in K_0} [\tau - \sigma, v] \leqslant \inf_{u \in U} \sup_{\tau \in K_0} [\tau - \sigma, v] = 0$$

$$\sup_{\tau \in K_0} \inf_{u \in U'} [\tau - \sigma, v] \geqslant 0$$

то

$$\inf_{u \in U'} l' (\sigma, u) = \begin{cases} \Phi (\sigma), & \text{если } \sigma \in M \\ -\infty & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Для проверки последнего условия (2.2) построим последовательность $v_m (x) = u^2 + \varphi_m (x)(u^1 - u^2)$, где $\varphi_m (x)$ — гладкая функция, $0 \leqslant \varphi_m (x) \leqslant 1$, $\varphi_m (x) = 1$ в Ω_1, $\varphi_m (x) = 0$ в Ω_{2m}, где

$$\Omega_{2m} = \{x \in \Omega_2\colon \operatorname{dist} (x, \partial\Omega_2) > h/m, \ h = \text{const}\}$$

При $m \to \infty$ имеем $\varphi_m (x) \to \chi (\Omega_2)$, где χ — характеристическая функция множества. Тогда

$$v_m \in U, \ v_m (x) \to u' (x) bV, \ u' (x) \in U', \ u' (x) = u^s (x)$$

при $x \in \Omega_s$ $(s = 1, 2)$ и

$$l (\sigma, v_m) = \sum_{s=1}^{2} \Big[\int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij} (u^s) \sigma_{ij} \, dx - \int_{\Gamma_2^s} u_i^s F_i \, d\Gamma \Big] -$$

$$- \int_{\Omega} (v_m)_i f_i \, dx - a (\sigma, \sigma) + \int_{\omega_m} \varepsilon_{ij} (v_m - u^2) \sigma_{ij} \, dx,$$

где $\omega_m = \Omega \setminus \Omega_{2m}$. Интегрируя по частям, получим для последнего слагаемого выражение

$$[\sigma, v] - \int_{\omega_m} \varphi_m v_i \sigma_{ij, j} \, dx$$

Первое слагаемое не зависит от m, а второе в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега стремится к нулю при $m \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{m \to \infty} l (\sigma, v_m) = L_\gamma (\sigma, u') + [\sigma, v] \leqslant l' (\sigma, u')$$

Таким образом, условия (2.2) выполнены и, следовательно, для $l' (\sigma, u)$ имеет место утверждение 1.

При помощи лагранжиана $l' (\sigma, u)$ теперь можно построить расширенную задачу

$$\inf_{u \in U'} J' (u'), \ J' (u) = J_\gamma (u) + R_\gamma (v) \tag{3.2}$$

$$J_\gamma (u) = \sup_{\sigma \in K} L_\gamma (\sigma, u), \ v = u^1 - u^2$$

Член $R_\gamma (v)$ имеет смысл «штрафа» за разрыв поля перемещений на линии γ, и вычисляется в соответствии с (3.1). При этом супремум удобно вычислять на множестве непрерывных в окрестности γ тензоров τ, которые образуют в K_0 всюду плотное подмножество.

Если в пространстве тензоров M_c^k определить функцию

$$\Psi (e) = \sup_{G(\tau) \leqslant 0} \tau_{ij} e_{ij}, \ \Psi\colon M_c^k \to R^1 \tag{3.3}$$

которая является опорной функцией выпуклого множества $\{\tau\colon \tau \in M_c^k, G (\tau) \leqslant 0\}$, то

$$R_\gamma (v) = \int_{\gamma} \Psi (e (v)) \, dx, \quad 2e_{ij} = \nu_i v_j + \nu_j v_i \tag{3.4}$$

В силу свойств опорных функций отсюда следует, что $R_\gamma(v)$ является положительно однородной и субаддитивной функцией v.

Утверждение 2. Если существует седловая точка $(\sigma^*, u^*) \in K \times U'$ лагранжиана $l'(\sigma, u)$, причем $u^* = u^s(x)$ при $x \in \Omega_s$, $u^s(x) \in U$ ($s = 1, 2$), то след тензора σ^* на линии разрыва перемещений γ должен удовлетворять условию

$$[\tau - \sigma^*, v] = \int_\gamma (\tau_{ij} - \sigma_{ij}^*) e_{ij}(v) d\Gamma \leqslant 0, \quad \forall \tau \in K_0 \qquad (3.5)$$

$$(v = u^1 - u^2)$$

Доказательство. Если $(\sigma^*\ u^*)$ — седловая точка, то

$$L_\gamma(\sigma^*, u^*) + \sup_{\tau \in K_0} [\tau, v^*] \leqslant L_\gamma(\sigma^*, w) + \sup_{\tau \in K_0} [\tau, w'] \ \forall w \in U'$$

$$w(x) = w^s(x), \text{ если } x \in \Omega_s,\ w^s(x) \in U,\ s = 1, 2,\ w' = w^1 - w^2$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\sigma^* \in K \cap M$, имеем

$$\sup_{\tau \in K_0} [\tau - \sigma^*, v] \leqslant \sup_{\tau \in K_0} [\tau - \sigma^*, w'],\ \forall w \in U'$$

Оценив сверху правую часть этого неравенства на функции $w \in U$ получим (3.5).

Из (3.5) следует, что если $G(\sigma^*) < 0$ то $e(v) \equiv 0$, т. е. в упругой области разрывов быть не может. Если $G(\sigma^*) = 0$ и след тензора σ^* — функция, определенная почти во всех точках γ (что будет, например, когда $\sigma_{ij}^* \in W_p^1(\Omega)$, $p > 1$), то почти во всех точках γ тензор $e(v)$ должен быть направлен по нормали к поверхности текучести $G(\sigma) = 0$ в точке $\sigma = \sigma^*$ (для негладкой поверхности $e(v)$ должен принадлежать соответствующему конусу субнормалей). При этом, если G — дифференцируемая функция, то (3.5) приводит к известному [1] соотношению

$$e_{ij}(v) = \lambda g_{ij}(\sigma^*),\ g_{ij} = \partial G / \partial \sigma_{ij},\ \lambda \geqslant 0 \qquad (3.6)$$

Существование разрыва $v(x) \neq 0$, $x \in \gamma$ возможно только в том случае, если в точке x имеет решение следующая система:

$$\nu_i v_j + \nu_j v_i = g_{ij}(\sigma^*),\ |\nu| = 1,\ G(\sigma^*) = 0 \qquad (3.7)$$

Оказывается, что в общем случае система (3.7) имеет решение не при любых σ^*, лежащих на поверхности текучести. Например, в задаче о плоском напряженном состоянии с критерием пластичности Мизеса решение отсутствует при $0.5 < \sigma_1/\sigma_2 < 2$ (σ_1, σ_2 — главные напряжения), что соответствует области эллиптичности [16] системы уравнений в напряжениях. В задаче о плоской деформации с критерием Мизеса система (3.7) всегда имеет решение, анализ которого приводит к известному выводу о возможности разрывов вдоль характеристик.

Если в трехмерной задаче с критерием пластичности выбрать оси декартовой системы координат совпадающими с направлением главных осей тензора σ^* в точке $x \in \gamma$, то из системы (3.7) следует, что возможен лишь тангенциальный разрыв. Разрывное решение возможно только в случае, если в данной системе координат девиатор σ^* — диагональный тензор, все диагональные компоненты которого различны и принимают одно из трех значений 0, k_*, $-k_*$. Этим напряженным состояниям отвечают шесть прямых, лежащих на поверхности цилиндра Мизеса и параллельных его оси.

Анализ условия (3.7) в осесимметричной задаче с условием Мизеса показывает, что линия разрыва может подходить к свободной поверхности цилиндрического тела только под углом $\pm 45°$ к образующей, что согласуется с известными экспериментальными данными ([17], с. 206).

Замечание. В случае, если $\Omega_2 = \Omega$, расширенный лагранжиан имеет вид

$$l'(\sigma, u) = (\varepsilon(u), \sigma) - a(\sigma, \sigma) - \int\limits_{\Omega} f_i u_i dx - \int\limits_{\Gamma_2} F_i u_i d\Gamma + R_\gamma(u - u^0)$$

$$R_\gamma(u - u^0) = \sup_{\tau \in K_0} \int\limits_{\Gamma_1} n_i \tau_{ij}(u_j^0 - u_j)\, d\Gamma$$

В этом случае слагаемое R_γ можно рассматривать как штраф за возможное нарушение граничного условия на Γ_1.

Результаты разд. 3 естественным образом обобщаются на случай, когда

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_N$$

$$\Omega_s \cap \Omega_t = \varnothing, \; \Gamma_{st} = \partial\Omega_s \cap \partial\Omega_t, \; \Gamma_s^1 = \partial\Omega_s \cap \Gamma_1$$

при $x \in \Omega_s$ $u(x) = u^s(x)$, $u^s(x) \in (H^1(\Omega))^k$, $s, t = 1, 2, \ldots N$.

В этом случае в выражении для $L_\gamma(\sigma, u)$ сумма вычисляется от 1 до N, а R_γ определяется выражением

$$\sup_{\tau \in K_0} \left(\sum_{s,t=1}^{M} \int\limits_{\Gamma_{st}} \nu_i \tau_{ij}(u_j^s - u_j^t)\, d\Gamma + \sum_{s=1}^{N} \int\limits_{\Gamma_s^1} \nu_i \tau_{ij}(u_j^0 - u_j)\, d\Gamma \right)$$

где соответствующий интеграл считается равным нулю, если Γ_{st} или Γ_s^1 — пустое множество.

4. Рассмотрим расширенные вариационные формулировки, вытекающие из формул (3.2)—(3.4) для некоторых важных случаев. Обозначим через e_0 и e^D шаровую и девиаторную части тензора e. Заметим, что $e_0 = \nu_i e_i = u_n^1 - u_n^2$ соответствует нормальной составляющей вектора v. Расширенный функционал, определенный на функциях, которые могут иметь разрыв вдоль линии γ, может быть записан в виде

$$J'(u) = \sum_{s=1}^{2} \left\{ \int\limits_{\Omega_s} (H(\varepsilon(u^s)) - f_i u_i^s)\, dx - \int\limits_{\Gamma_2^s} F_i u_i^s\, d\Gamma \right\} + \int\limits_{\gamma} \Psi(e(v))\, d\Gamma \quad (4.1)$$

где H, Ψ определяются выбором условия текучести.

Для трехмерной задачи с условием Мизеса $H(\varepsilon)$ вычисляется в соответствии с (1.6), а $\Psi(e) = \sqrt{2}k_* \mid e^D(v) \mid$. Вывод о необходимости включения в энергетические соотношения такого слагаемого содержится в [16], а строгое обоснование этого факта с позиций вариационного исчисления дано в [5, 6]. Об использовании соответствующей расширенной постановки для построения вариационно-разностных методов см. [12—14].

Рассмотрим задачу о плоском напряженном состоянии с условием текучести Мизеса, которое для $\sigma \in M_c^2$ можно записать в виде

$$a^2 \mid \sigma^D \mid^2 + b^2 \sigma_0^2 \leqslant k_*^2, \; a = 1/\sqrt{2}, \; b = 1/\sqrt{12}, \; \sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

Тогда расширенная постановка (4.1) имеет наиболее простой вид для несжимаемой среды ($k_0 = \infty$). В этом случае

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} {}^1/_6 E t^2(\varepsilon), & \text{если } t \leqslant 3k_*/E \\ k_*(t(\varepsilon) - {}^3/_2 k_* E), & \text{если } t > 3k_*/E \end{cases}$$

где $t(\varepsilon) = (2 \mid \varepsilon^D \mid^2 + 3\varepsilon_0^2)^{1/2}$, а E — модуль Юнга. Функция $\Psi(e)$ при $k_0 \leqslant \infty$ имеет вид

$$\Psi(e) = k^*(2 \mid e^D \mid^2 + 3e_0^2)^{1/2}$$

Известно, что во многих задачах (при анализе поведения грунтов, пористых сред и др.) используются критерии пластичности, учитывающие зависимость от первого инварианта тензора напряжений, которые называют условиями Шлейхера — Моро [17, 18]

$$G(\sigma) = |\sigma^D| + h(\sigma_0) \leqslant 0, \quad \sigma \in M_c^3 \tag{4.2}$$

Здесь h — выпуклая функция, определяющая зависимость $G(\sigma)$ от σ_0. Часто применяется критерий Кулона — Мора [18], который является частным случаем (4.2) при $h(\sigma_0) = a\sigma_0 - b$, где a, b постоянные.

В этом случае для H и Ψ получим следующие выражения:

$$\Psi(e) = \begin{cases} be_0/(3a), & \text{если } e_0 \geqslant 0 \text{ и } |e^D| \leqslant e_0/(3a) \\ +\infty & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

$$H(\varepsilon) = C_1(2\varepsilon_0 - C_2) + H_1(\varepsilon_0', |\varepsilon^D|), \quad \varepsilon_0' = \varepsilon_0 - C_2$$

$$C_1 = b/(6a), \quad C_2 = b/(3ak_0), \quad C_3 = [a^2/\mu + 2/(9k_0)]^{-1}$$

причем $H_1 \equiv 0$ если $\varepsilon_0' > 3a|\varepsilon^D|$, а в других случаях вычисляется согласно правилу

$$H_1(\varepsilon) = \begin{cases} \mu|\varepsilon^D|^2 + k_0(\varepsilon_0')^2/2, & \text{если } \varepsilon_0' \leqslant -2\mu|\varepsilon^D|/(3ak_0) \\ C_3(3a|\varepsilon^D| - \varepsilon_0')^2, & \text{если } \varepsilon_0' > -2\mu|\varepsilon^D|/(3ak_0) \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hill R.* Discontinuity relations in mechanics of solids // Progress in solid Mechanics. Amsterdam: North-Holland, 1961, V. 2. P. 247—276.
2. *Каменярж Я. А.* Условия на поверхности разрыва в жесткопластическом анализе. // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 506—517.
3. *Куксин С. Б.* Условия на разрыве решений уравнений Прандтля — Рейсса. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1065—1068.
4. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
5. *Серегин Г. А.* О корректности вариационных проблем механики идеально упругопластических сред. // Докл. АН СССР. 1984. Т. 276. № 1. С. 71—75.
6. *Серегин Г. А.* О постановках задач теории идеально упругопластического тела. // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 849—859.
7. *Anzellotti G., Giaquinta M.* Existence of the Displacements Field for an Elasto-plastic Body Subject to Hencky's Law and von Mises Yield Condition // Manuscr. Math. 1980. V. 32. № 1—2. P. 101—136.
8. *Kohn R., Temam R.* Dual spaces of stresses and strains with application to Hencky plasticity // Appl. Math. Optim. 1983. V. 10. № 1. P. 1—35.
9. *Temam R., Strang G.* Functions of bounded deformation // Arch. Ration. Mech. and Analysis. 1980. V. 75. № 1. P. 7—21.
10. *Каменярж Я. А.* О двойственных задачах теории предельной нагрузки для идеально пластических тел. // Докл. АН СССР. 1979. Т. 245. № 1. С. 51—54.
11. *Каменярж Я. А.* О постановках задачи теории идеальной пластичности. // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 490—496.
12. *Серегин Г. А.* Вариационно-разностные схемы для задач механики идеально-упругопластических сред. // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. № 2. С. 237—253.
13. *Репин С. И.* Вариационно-разностный метод решения задач идеальной пластичности, учитывающий возможность возникновения разрывов. // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28. № 3. С. 449—453.
14. *Репин С. И.* Вариационно-разностный метод решения задач с функционалами линейного роста. // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1989. Т. 29. № 5. С. 693—708.
15. *Greenberg H. J.* Complementary Minimum Principles for an Elastic Plastic Material // Quart. Appl. Math. 1948. V. 7. No. 1. P. 85—95.
16. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420с.
17. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 648 с.
18. *Drucker D. C., Prager W.* Soil mechanics and plastic analysis or limit design // Quart. Appl. Math. 1952. V. 10. No. 2. P. 157—165.

Ленинград

Поступила в редакцию 23.X.1990